Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006596**

ID профиля: **274061**

Вариант 16

Черновик

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 15 \\ \hline 170 \\ +34 \\ \hline 510 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ \times 15 \\ \hline 525 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 592 \\ -559 \\ \hline 33 \end{array}$$

$559+y=592$

33

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

$(x^2-4ax+4a^2)+(\cancel{2a}y^2$

$-2x(2a+y)$

$a(5a-4x+6y)+x^2-2xy+2y^2$

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

$x^2+y^2-4x-2x+2y+4+1=0$

$(x^2-6x+9)+(y^2+2y+4)=8$

$(x-3)^2+(y+1)^2$

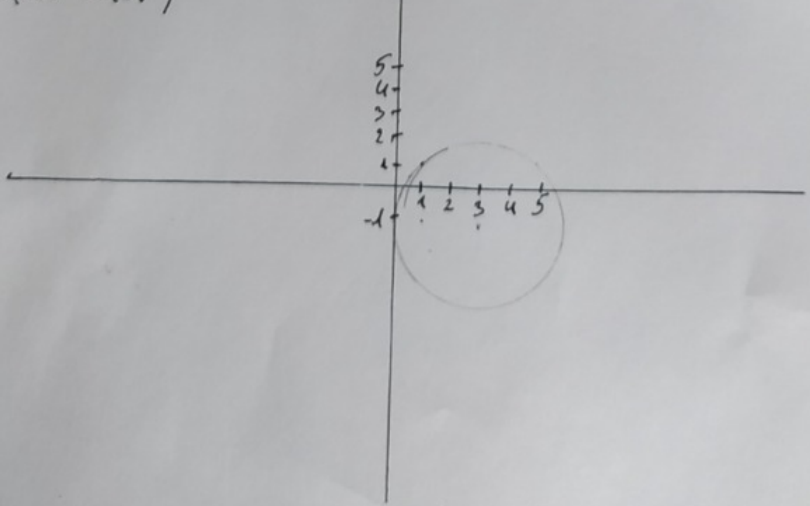
$x^2-2xy+2y^2+6y-4x+5=0$

$-2a(\cancel{2a}\,2x+3y)$

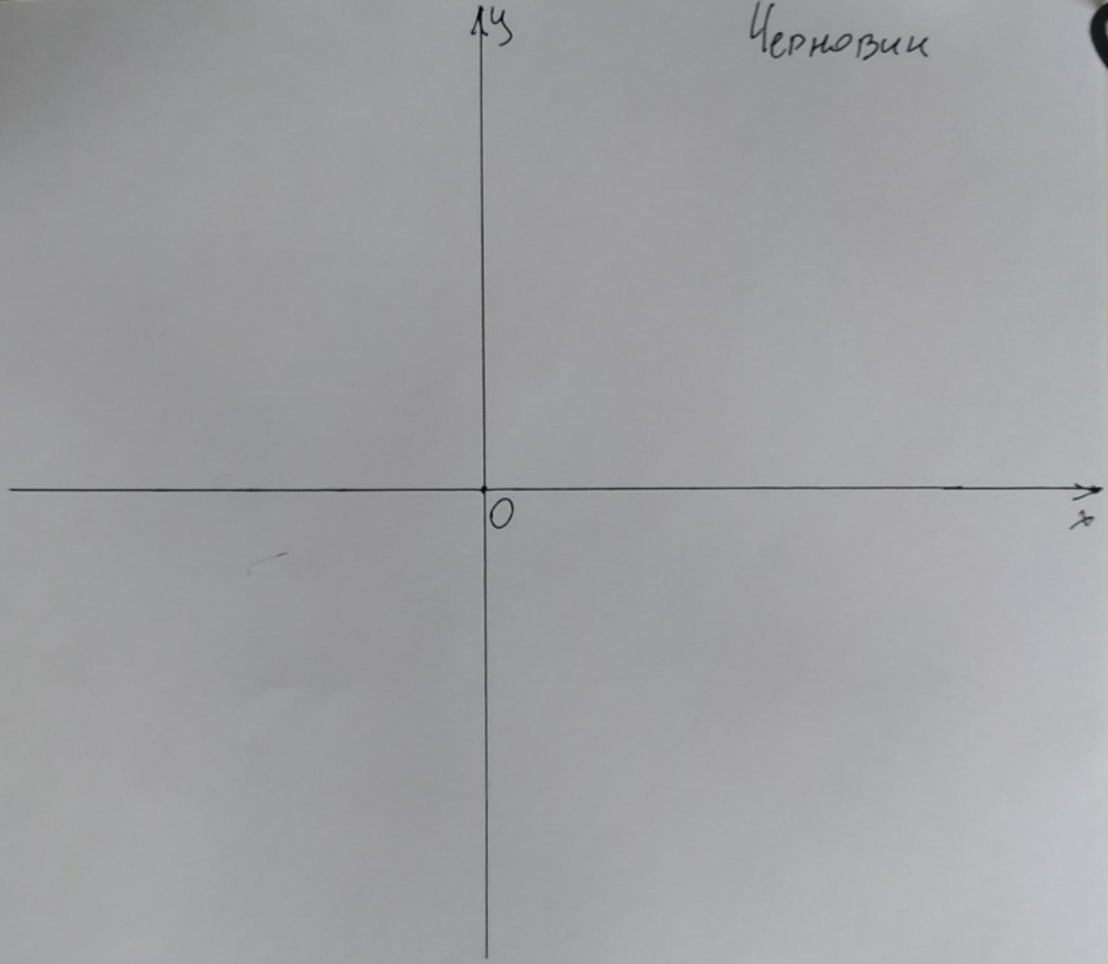
$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+\cancel{2}2a^2y+4a^2+1=0$

$(ax)^2+(ay)^2$

$a^2(x^2-4ax+4a^2)$



Черновик



2) Пусть x - самое маленькое число; ~~y - сумма~~ Чистовик

z - самое большое число; y - сумма всех остальных чисел.

$35x + y + z = 592$

$x + y + 16z = 592$ $\Rightarrow$ $35x + y + z = x + y + 16z$

$35x + z = x + 16z$

$34x = 15z$

$(34; 15) = 0 \Rightarrow z \vdots 34;\ x \vdots 15$

$34 \cdot 15 = 510$, т.е. мы не сможем сделать $z > 34$, если же мы возьмем $z = 0$, то и $x = 0$, противоречие услов.

$\Rightarrow z = 34 \Rightarrow x = 15$

(Произведение $34 \cdot 15 \cdot m$, где m - добавочный множитель, $0 < 34 \cdot 15 \cdot m \leq 592$ только при $m = 1$)

$35x + y + z = 592 \Rightarrow 525 + y + 34 = 592 \Rightarrow y = 33$

Мы помним, что x - наименьшее число; $x = 15$.

Среднее арифметическое чисел, сумма которых равна y, должна быть больше 15: Пусть n - кол-во таких чисел.

$\frac{33}{n} > 15 \Rightarrow n = 1; 2$

При $n = 1$:

Число равно 33, т.е. на доске записана тройка

15, 33, 34

При $n = 2$:

$a + b = 33 \Rightarrow$

При $a \leq 15$: неуд.

$a = 16; b = 17$

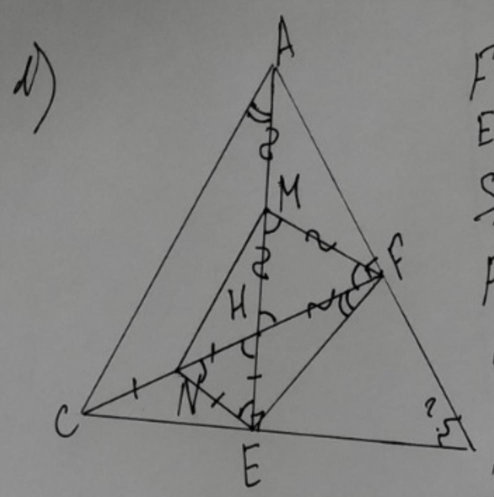
$a = 17; b = 16$

При $a \geq 18$: $b \leq 15$ неуд.

Ответ: 15, 33, 34 ; 15; 16; 17; 34

3

1)



$FM = 1$
$EN = 4$
$S_{ABC} = ?$

Чистовик

FM - медиана в $\triangle AHF \Rightarrow FM = AM = MH$

EN - медиана в $\triangle CHE \Rightarrow EN = CN = NH$

Т.к. $FM \parallel EN$, то $\angle HMF = \angle HEN$

В $\angle NHE = \angle MHF$ (т.к. вертикальные),

Но, так как $\triangle NEH$ - равнобедренный, то $\angle HEN = \angle NHE$,
то и $\triangle HMF$ и $\triangle NEH$ - равносторонние. $\Rightarrow \angle CHE = \angle MHF = 60^\circ$.

Четырехугольник $EHFB$ - вписанный ($\angle HEB + \angle HFB = 180^\circ$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EHF + \angle EBF = 180^\circ$. $\angle CHE + \angle EHF = 180^\circ \Rightarrow \angle EBF = \angle CBA = \angle CHE = 60^\circ$.

Рассмотрим $\triangle HAF$. $AF = HA \cdot \sin\angle AHF = HA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Рассмотрим $\triangle CHE$. $CE = CH \cdot \sin\angle CHE = CH \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{CE^2 + AE^2} = \sqrt{48 + 36} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

$\triangle CHA \sim \triangle EHF$ (по двум сторонам и углу $\angle CHA$) $\Rightarrow \angle CFE = \angle CAE \Rightarrow$
$\Rightarrow$ четырехугольник $ACEF$ - вписанный. $\Rightarrow \angle ACB = \angle EFB$.

$EB = AB \cdot \cos\angle ABE = \underline{x} \Rightarrow FB = CB \cdot \cos\angle CBF = \frac{x}{2} + 2\sqrt{3}$

$\frac{BF}{BC} = \frac{EB}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{FE} = \frac{2}{1} \Rightarrow FE = \sqrt{21}$

Рассмотрим $\triangle BEF$. По т. косинусов: $EF^2 = EB^2 + BF^2 - 2EB \cdot BF \cdot \cos 60^\circ$

$21 = x^2 + \frac{x^2}{4} + 2x\sqrt{3} + 12 - \cancel{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$9 = x^2 + \frac{x^2}{4} + \cancel{2x\sqrt{3}} - \cancel{2x\sqrt{3}} - \frac{x^2}{2}$; $\frac{3x^2}{4} - 9 = 0$; $\frac{3x^2}{4} = 9$; $x^2 = 12$;

$\underline{x_1 = 2\sqrt{3}}$; $x_2 = -2\sqrt{3}$ (неуд.) ; $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AE = 3\sqrt{3} \cdot 6 = \underline{18\sqrt{3}}$ 1

211006596 (U274061 M1275326)

По т. Синусов:

Чистовик

$\frac{AC}{\sin\angle CBA} = 2R$, где R - радиус описанной окружности.

$2R = \frac{AC}{\sin\angle CBA} = \frac{2\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{7} \Rightarrow R = \underline{2\sqrt{7}}$.

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$; $R = 2\sqrt{7}$

2

211006596 (U274061 M1275326)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006596**

ID профиля: **274061**

Вариант 16

Черновик

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$x^2=a$

$y^2=b$

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2-0{,}5ab=19 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cancel{\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ 2a^2+2b^2-ab=38 \end{cases}}$$

$\cancel{2a^2+2b^2-2a-2b=36}$

$\cancel{2a(a-1)+2b(b-1)=36}$

$\cancel{(a+b)^2=19+2{,}5ab}$

$\cancel{a^2+2a+b^2+2b-1{,}5ab=21}$

$\cancel{(a+1)^2+(b+1)^2=}$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases} \Rightarrow$$

$x^2=a$

$y^2=b$

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19$

$a^2+b^2-\frac{1}{2}ab-1{,}5ab=19-1{,}5ab$

$(a-b)^2=\cancel{21}\ 19-1{,}5ab$

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2-0{,}5ab=19$

$a+b=c$

$ab=d$

$2c-d=2$

$c^2-2{,}5d=19$

$14 \times 4 = 56$

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2-0{,}5ab=19$

$2a^2+2b^2+2a+2b-2ab=21$

$(a-2)(2-b)=2a+2b-ab-4$

$(a-2)(2-b)=-2$

$\cancel{(a+1{,}5b)(a-1{,}5b)}$

$\cancel{2a+2b-2a^2-2b}$

$2(a^2-a)+2(b^2-b)=36$

$a(a-2)+b(b-2)=18$

$a(a-2)=18-b(b-2)$

$2a^2+2b^2-ab+6a+6b-3ab$

$\cancel{(a+b)^2-2ab}$

211006596 (U274061 M1275327)

Чистовик

Б) Всего карточек-дублей у нас 16 (так как всего от 1 до 16 - 16 чисел, значит и дублей 16).

Рассмотрим 2 случая:

1. Дубль ; Не дубль
2. Дубль ; Дубль.

1 случай:

~~Изя~~ из дублей мы можем выбрать одну карту C_{16}^{1} способами. Не дубль мы можем выбрать C_{15}^{2} способами, так как мы берем из набора из 15 оставшихся видов чисел 2 разных без повторений. Всего таких способов: $C_{16}^{1} \cdot C_{15}^{2} = 1680$ способов.

2 случай:

2 разных дубля мы можем выбрать C_{16}^{2} способами.

$C_{16}^{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ способов.

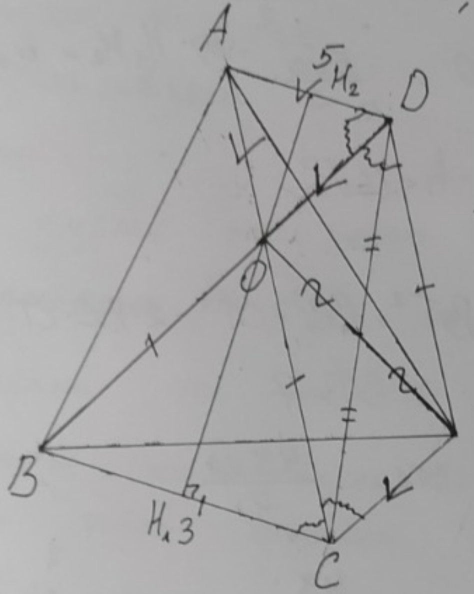
Значит, кол-во способов выбрать такие карточки равно $C_{16}^{1} \cdot C_{15}^{2} + C_{16}^{2} = 1800$ способов.

Ответ: 1800 способов.

211006596 (U274061 M1275327)

6) а) Если $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные, Чистовик.

то $\angle DAO = \angle OCB \Rightarrow AD \parallel BC$. Если мы удваиваем медиану в $\triangle DOC$, то $ODTC$ - параллелограмм. $\Rightarrow OD = TC$; $OC = DT$. $\angle DOC = 180 - \angle BOC = 120° \Rightarrow \angle ODT = 180 - \angle DOC = 60° = \angle OCT$. $AD = DO = TC$. $BC = CO = DT$. $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120°$



$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120°$. $\triangle BCT = \triangle ADT$ по 2-м сторонам и углу между ними. $\Rightarrow AT = TB$.

$\angle DTC = \angle DOC$ в параллелограмме. $\angle DAT = \angle BTC$.

Сумма углов $\angle DTA$ и $\angle BTC$ равна сумме углов $\angle ATD + \angle DAT = 180 - \angle ADT = 60°$. $\Rightarrow \angle ATB = \angle DTC - (\angle ATD + \angle BTC) = 60°$. Рассмотрим $\triangle ATB$. Он равнобедренный, угол при вершине равен $60° \Rightarrow \triangle ATB$ - правильный.

ч.т.д.

Чистовик.

б) Найдем сумму высот $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - это и будет общей высотой в трапеции $ABCD$.

$OH_1 = BC \cdot \sin \angle BCO = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$OH_2 = AD \cdot \sin \angle ADO = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H_1H_2 = 4\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h = 16\sqrt{3}$

Рассмотрим $\triangle BCT$:

По т. Косинусов: $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos \angle BCT$

$BT^2 = 9 + 25 + 15 = 49 \Rightarrow BT = 7$

$S_{BTA} = \frac{1}{2} \cdot BT^2 \cdot \sin \angle BTA = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{49\sqrt{3}}{4}}{16\sqrt{3}} = \frac{\frac{49}{4}}{16} = \frac{49}{64}$$

Ответ: $\frac{49}{64}$.

4) $\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-0{,}5x^2y^2=19 \end{cases} \Rightarrow$ $x^2+y^2=a$; $x^2y^2=b$

Чистовик

ОДЗ: $a \geq 0$, $b \geq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a-b=2 \\ a^2-2{,}5b=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a-5b=10 \\ 2a^2-5b=38 \end{cases} \Rightarrow 2a^2-10a=28$

$a^2-5a-14=0$

$D=25+56=81$

$a_1=\frac{5-9}{2}=-2$ неуд. по ОДЗ.

$a_2=\frac{5+9}{2}=7 \Rightarrow b=12$

$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ x^2y^2=12 \end{cases} \Rightarrow$ $x_1^2=3;\ y_1^2=4$; $x_2^2=4;\ y_2^2=3. \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1=\pm\sqrt{3};\ y_1=\pm 2 \\ x_2=\pm 2;\ y_2=\pm\sqrt{3} \end{array}}$$

Ответ: $x_1=\sqrt{3};\ y_1=2$

$x_2=-\sqrt{3};\ y_2=2$

$x_3=\sqrt{3};\ y_3=-2$

$x_4=-\sqrt{3};\ y_4=-2$

$x_5=2;\ y_5=\sqrt{3}$

$x_6=-2;\ y_6=\sqrt{3}$

$x_7=2;\ y_7=-\sqrt{3}$

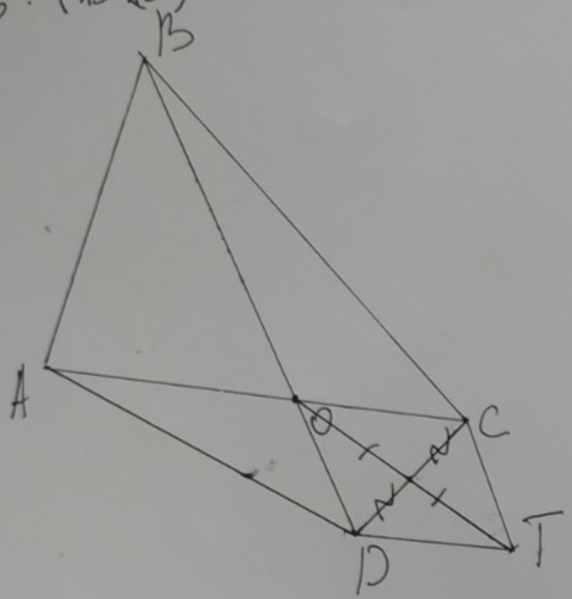
$x_8=-2;\ y_8=-\sqrt{3}$

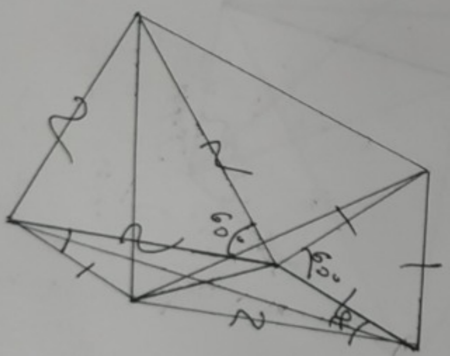
211006596 (U274061 M1275327)

Черновик.

~~16 · (15+~~

~~16 · (15·15)~~

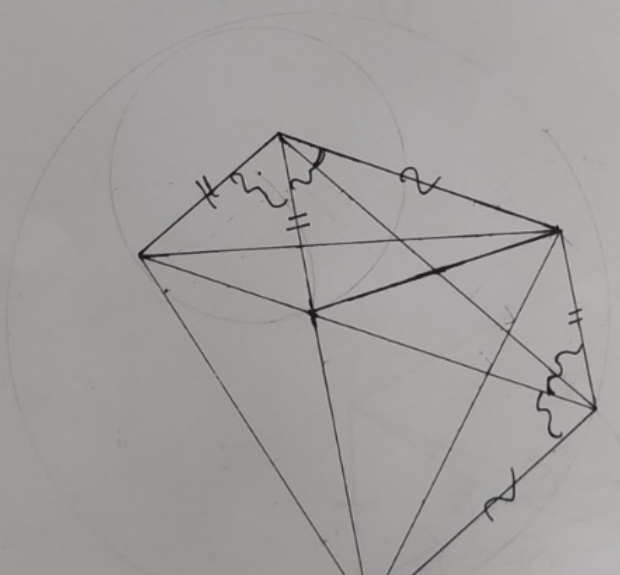




$16 \cdot C^2_{15} + C^2_{16}$

~~$16 \cdot (15 \cdot 14)+$~~

Черновик



211006596 (U274061 M1275327)

ОДЗ: Черновик.

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-0,5x^2y^2=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^2+y^2=a \\ x^2y^2=b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a\geq 0 \\ b\geq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-b=2 \\ a^2-2,5b=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a-5b=10 \\ 2a^2-5b=38 \end{cases} \Rightarrow 2a^2-10a=28$$

$2a^2-10a-28=0$

$\textcircled{2}\ a^2-5a-14=0$

$D=25+56=81$

$a_1=\frac{5-9}{2}=-2$ неуд. по ОДЗ

$a_2=\frac{5+9}{2}=\underline{7} \Rightarrow b=12$

$$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ x^2y^2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^2=3;\ y_1^2=4 \\ x_2^2=4;\ y_2^2=3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=\sqrt{3};\ y_1=2 \\ x_2=2;\ y_2=\sqrt{3} \end{matrix}$$

211006596 (U274061 M1275327)

Черновик

Всего карточек-дублей у нас 16 (всего от 1 до 16 — 16 чисел, значит и дублей 16). Рассмотрим 2 случая:

1. когда он выбирает дубль; не дубль.
2. когда он выбирает дубль; дубль.

1 случай: тогда всего вариантов взять таких карточек. $16\ C_{15}^{2}$

5+5+6+4+5+7 означает, что мы берем из набора из 15 чисел 2 разных числа без повторений.

20+12=32

$$16 \cdot \frac{15!}{2!\,13!} = \frac{15\cdot 14}{2}$$

$15\cdot 14\cdot 8 =$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 14 \\ \hline 60 \\ 15\ \ \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{210} \\ \times\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 210 \\ \times\ 8 \\ \hline 1680 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}$$