Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006518**

ID профиля: **561**

Вариант 16

№2 Чистовик (1)

У нас по условию есть несколько попарно различных чисел. Рассортируем по возрастанию

$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_i$

Скажем что их начальная сумма

n

$n = a_1 + a_2 \ldots + a_i$

нам известно что если увеличить самое маленькое число (a_1) в 35 раз или самое большое (a_i) в 16 раз то сумма чисел станет $m = 592$

то есть

$m - n = a_1(35-1) = a_i(16-1)$

$a_1 \cdot 34 = a_i \cdot 15 \Rightarrow a_1 \vdots 15$
$a_i \vdots 34$

при этом если $a_1 = 15 \cdot k$ где k - натуральное

то $a_i = 34 \cdot k$

посмотрим на сумму при только при двух этих чисел при $k=1$

$a_1 = 15$
$a_i = 34$

$a_1 \cdot \cancel{16}\, 35 + a_i = a_1 + a_i \cdot 16 = 559$

Заметим что при $k>1$ сумма будет больше в k раз, а $559 \cdot 2 > 592$, то есть $k=1$

211006518 (U561 M1276442)

Черновик

$$5a^2 + 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$$

$$\cancel{x^2 - x(2y+4a)}$$

$$y = kx$$

$$5a^2 - 4ax + 6akx + x^2 - 2kx^2 + 2k^2x^2$$

$$x^2(1 + 2k^2 - 2k) + x(6ak - 4a) + 5a^2 = 0$$

$$x = \frac{-6ak + 4a \pm \sqrt{36a^2k^2 - 48a^2k + 16a^2 - 20a^2 + 40a^2k - 40a^2k^2}}{2 - 4k + 4k^2}$$

$$5 - 4x + 6y + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$$

$$x^2 - x(2y + 4) + 2y^2 + 6y + 5 = 0$$

$$x = \frac{2y + 4 \pm \sqrt{4y^2 + 8y + 16 - 8y^2 - 24y - 20}}{2}$$

$$-4y^2 - 16y - 4 = 0$$

$$-y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Черновик

$a_1 \le a_2 \le \ldots a_?$

$\overset{15}{a_1} \cdot 34 = \overset{34}{a_i} \cdot 15$ $a_? \cdot 2 \cdot 17 = a_i \cdot 3 \cdot 5$

15 34

34

15 34

0 19

$$\frac{\cancel{9}9 \cdot 20}{\cancel{2}} = \cancel{990}\ 490$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 35 \\ \hline 75 \\ 45 \\ \hline 525 \end{array}$$

$\boxed{559}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 34 \\ \hline \end{array}$$

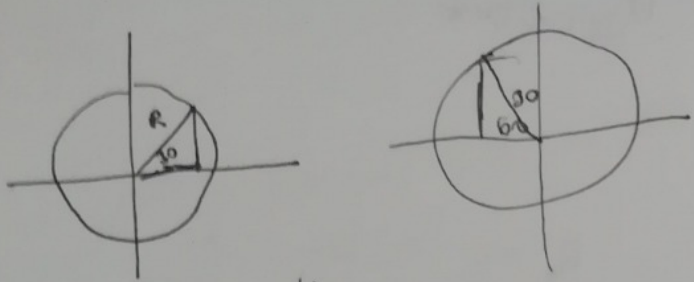
33

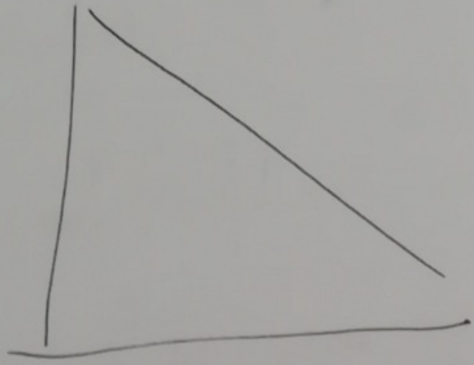
a_1

$$\begin{array}{r} 34 \\ 16 \\ \hline 204 \\ 34 \\ \hline 544 \end{array}$$

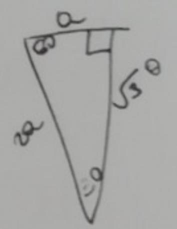
15 16 17 34

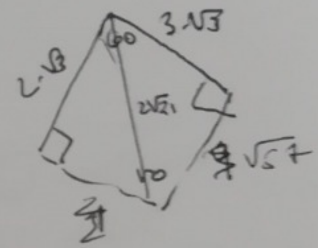
Черновик





$\alpha = 60°$

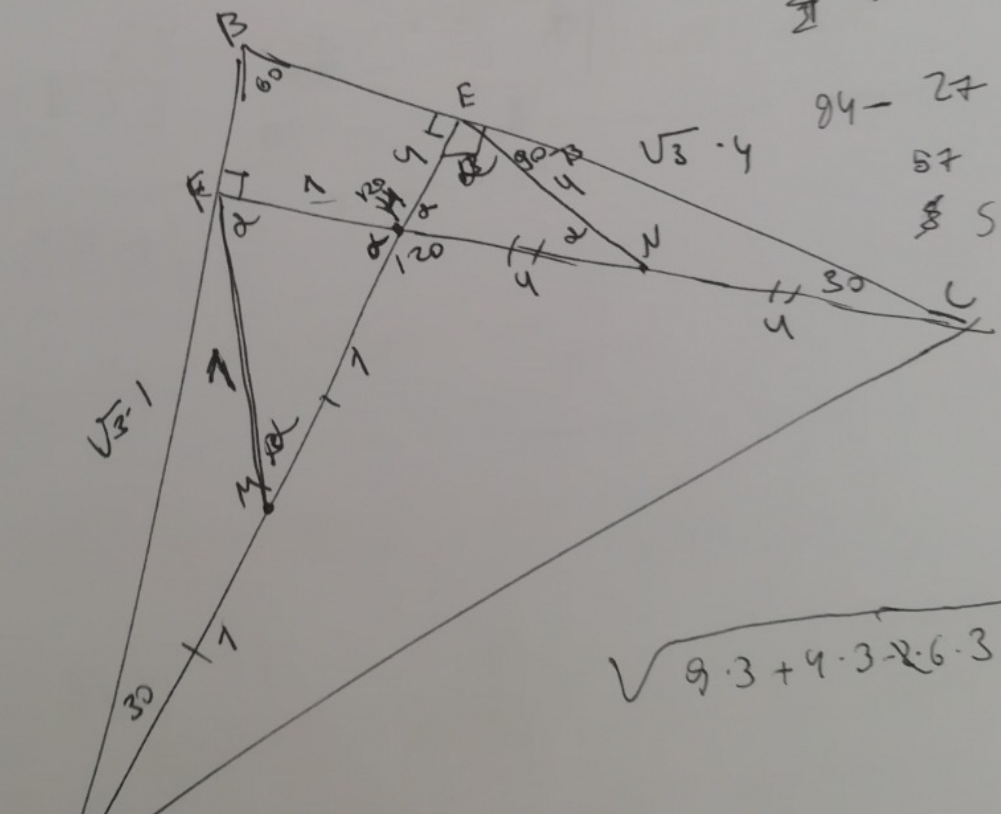




$94 - 27$

57

$57 = 3 \cdot 19$



$\sqrt{9 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cos 60}$

№1 Чистовик (4)

$\triangle CHE \sim \triangle CBF$ по 3 углам

$\frac{CH}{CB} = \frac{CE}{CF} = \frac{HE}{BF} = k_1$

т.к. $CE = \sqrt{3} \cdot 4$

$CF = 9$

$k_1 = \frac{CE}{CF} = \frac{\sqrt{3} \cdot 4}{9} = \frac{4}{\sqrt{3} \cdot 3}$

Ответ
$\angle ABC = 60^\circ$
$S_{ABC} = 18\sqrt{3}$
$R = 2\sqrt{7}$

$\frac{HE}{BF} = k_1$

$BF = \frac{HE}{k_1} = \frac{4}{\frac{4}{\sqrt{3} \cdot 3}} = \sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9}{\sqrt{3}}$

Аналогично с $\triangle AHF \sim \triangle ABE$ по 3 углам

$k_2 = \frac{AF}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}}$

$\frac{FH}{BE} = k_2$

$BE = \frac{FH}{k_2} = 2 \cdot \sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{CF \cdot AB}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{2}$

$= 18\sqrt{3}$

2 во

3 вопрос

Теперь по тео cos найдем AC

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(60)$

$AC^2 = 16 \cdot 3 + 36 \cdot 3 - \cancel{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$AC^2 = 48 + 108 - 72 = 84$

$AC = 2\sqrt{21}$

А по тео синусов

$2R = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \frac{AC}{\sin(60)}$

$= \frac{2\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{7}$

$R = 2\sqrt{7}$

211006518 (U561 M1276442)

№2 Чистовик ②

То есть чтобы сумма m стала готовой нужно распределить между (т.к a_1 и a_i - крайние им) ~~оп~~ ними сумму 592 - 559 = 33

15 34

То есть есть 2 варианта
в 1 число
то есть 33

15, 33, 34

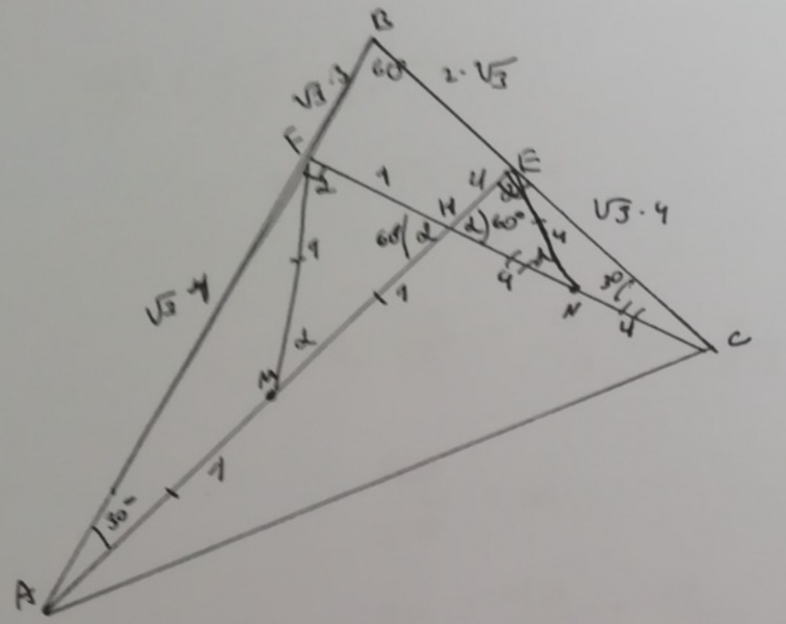
или 2, и тут будет только 1 вариант т.к оба числа должны лежать между - 16, 17 — 15, 16, 17, 34

3 и более отпадают т.к
сумма таких чисел
должна быть 15 · x - минимум
где x - кол-во самих
чисел
а при 33
x = 1 или x = 2

Ответ: $\boxed{15, 33, 34}$ или $\boxed{15, 16, 17, 34}$

211006518 (U561 M1276442)

№1 Шитов Виг 3



Т.к FM медиана в прямоугольном треугольнике опущенная из прямого угла $FM = HM = AM = 1$

Аналогично с EN в пр.тр. $\triangle HEC$ $EN = HN = CN = 4$

Заметим что $\angle FHM = \alpha \Rightarrow \angle EHN = \angle FHM = \alpha$ (вертикальн

$\angle HEN = \angle EHN = \alpha$ $(EN = HN)$

Аналогично с $\angle MFH$ так же $\angle ENH = \angle MFH$ (накрест лежащие) т.к $FM \parallel EN$ по условию

Получается что $\triangle MFH$ и $\triangle NEH$ – равносторонние

$\Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow FH = 1,\ EH = 4$

$\Rightarrow \angle FHE = 180° - \alpha = 120°$ $\angle BFH = \angle BEH = 90°$ (по усл

$\Rightarrow \underline{\angle ABC = 360° - \angle FHE - \angle BFH - \angle BEH = 60°}$

↑ Ответ

$\angle BAE = \angle BCF = 30°$ по сумме углов

$\Rightarrow AF = \sqrt{3} \cdot 1$ (по тр с углами $90°, 60°, 30°$)

$CE = \sqrt{3} \cdot 4$ ↗

Часть 2

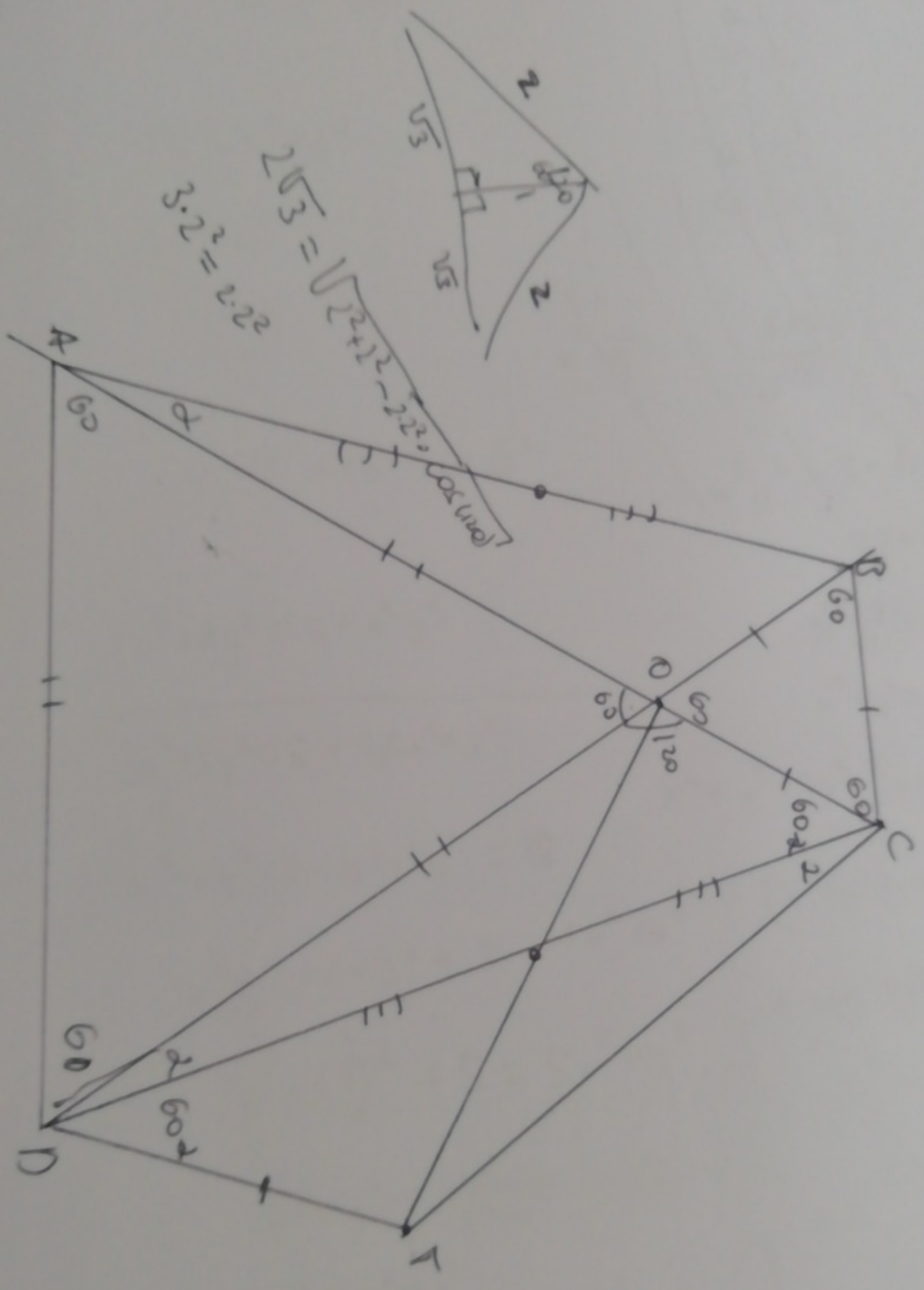
Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006518**

ID профиля: **561**

Вариант 16

Черновик



$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2+2^2-2\cdot 2^2\cdot \cos(120)}$
$3\cdot 2^2 = 2\cdot 2^2$
A
B
C
D
O

Черновик

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$

$x^4+y^4-0{,}5x^2y^2=19$

$3x^2+y^2=x^4+y^4$

$3x^2+3y^2$

$\frac{16\cdot 15}{2}$

$16\cdot 15+16=16^2$

a | b
k | c

a | b
c | k

$x^2+y^2=t=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$x^2y^2=3+\sqrt{5}$

$7+2\sqrt{12}=(x+y)^2$

$2x^2+2y^2=2+x^2y^2$

$5x^2+5y^2=5+2{,}5x^2y^2$

$x^4+y^4-0{,}5x^2y^2=19$

$x^4+y^4+2x^2y^2+5=5x^2+5y^2$

$(x^2+y^2)^2+5=5x^2+5y^2$

$x^2+y^2+\frac{5}{x^2+y^2}=5$

$t=x^2+y^2$

$t^2-5t+5=0$

$t=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

$x^2y^2=12$

$x^2+y^2=7$

$x^4+y^4+2x^2y^2+5=19+5x^2+5y^2$

$(x^2+y^2)^2=14+5(x^2+y^2)$

$t=(x^2+y^2)$

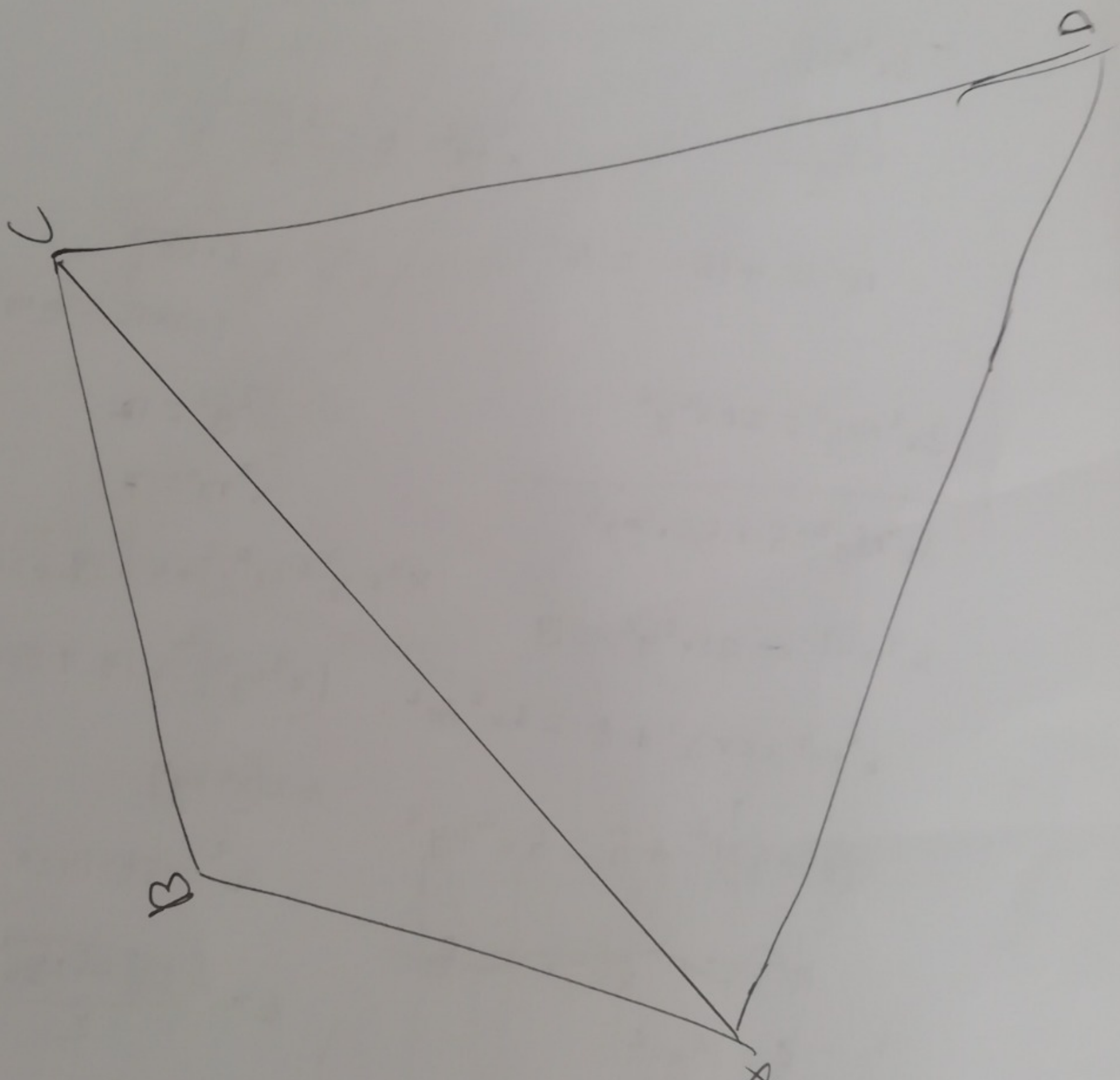
$t^2-5t-14=0$

$t=\frac{5\pm\sqrt{25+56}}{2}$

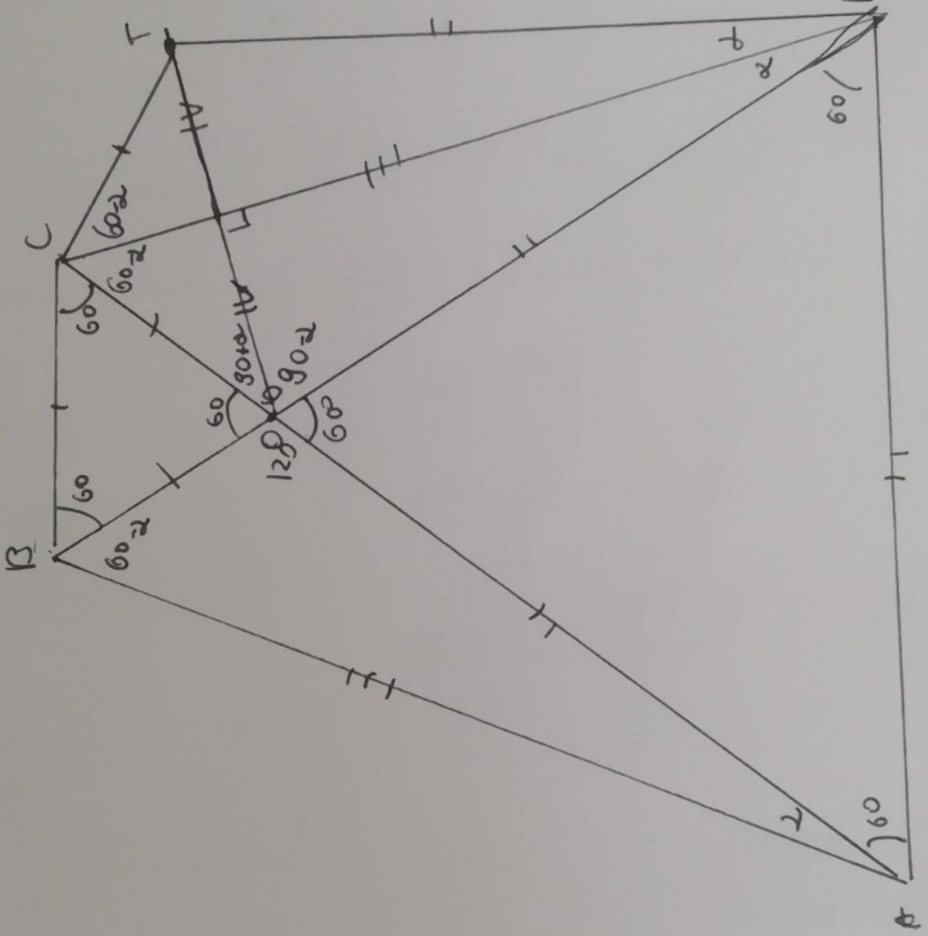
$t=\frac{5+9}{2}=7$

211006518 (U561 M1276443)

Черновик



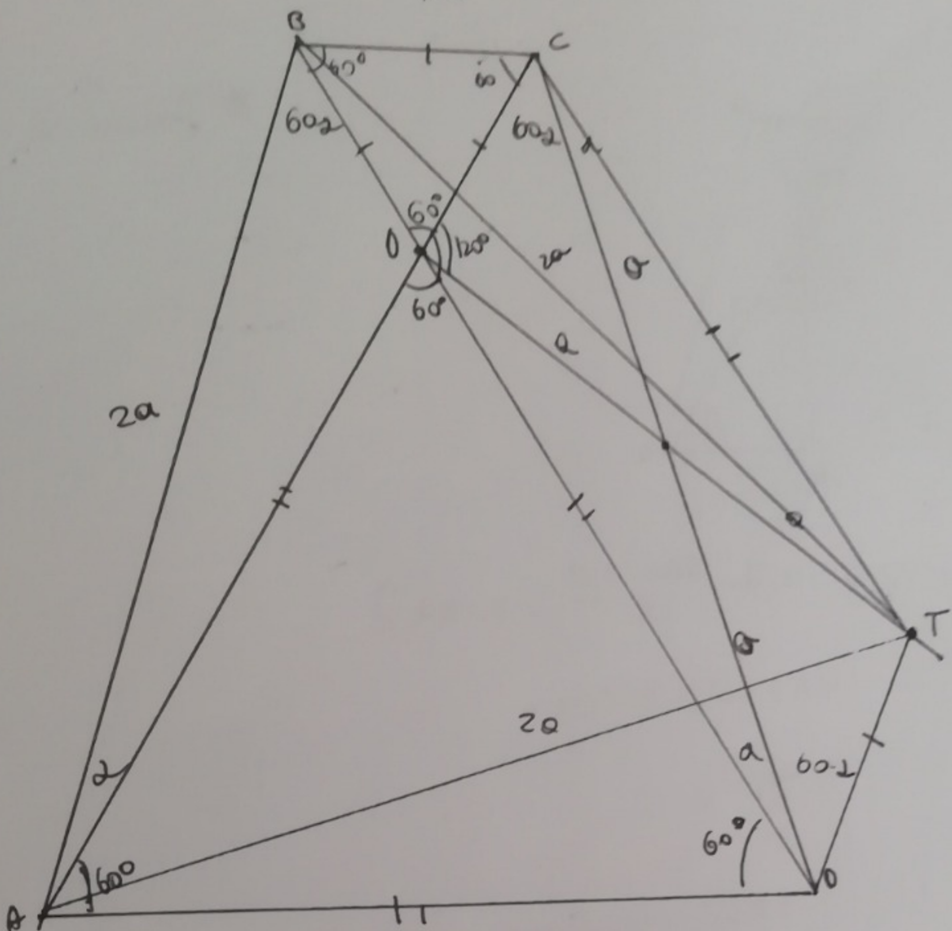
Черновик



Чимковин

(4)

№6



1.

Доложим что угол $BAO = \alpha$ $\Rightarrow$ $\angle CDO = \alpha$ ($\triangle ABO = \triangle DCO$ по 2-ум сторонам и углу между ним)

$\angle BOA = \angle COD$ (верт)

2) $\angle TDO = 180 - \angle COD = 60°$ (углы в параллелограмме)

$\Rightarrow \triangle$ ~~AD~~ $ATD = \triangle DOC$ (по сторонам и углу)

$\Rightarrow \angle TAD = \angle CDO = \alpha$

3 $\Rightarrow \angle BAT = \angle BAD - \angle TAD = 60+\alpha - \alpha = 60°$

4 $\exists$ $BA = 2a$ $AT = 2a$ $\angle BAT = 60°$ (тр-равносторонний и т.д.)

$\Rightarrow BT = 2a$

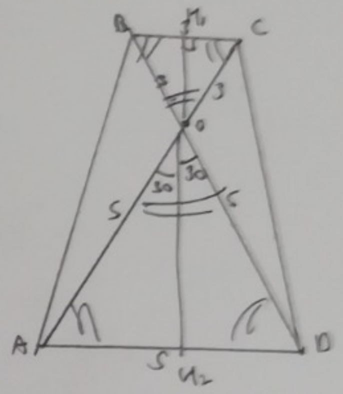
$\Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

211006518 (U561 M1276443)

Чистовик 5

№ 6

2. ~~$S_{ABCD} = 8$~~



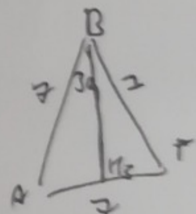
$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot (OH_1 + OH_2) = \frac{BC+AD}{2} \cdot \cos(30) \cdot (BC+AD) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 16 \cdot \sqrt{3}$$

Для нахождения площади ABT найдем сторону AB по теореме косинусов

$$AB = \sqrt{3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(120)}$$

$$AB = \sqrt{34 + \cancel{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}$$

$$AB = 7 = BT = AT$$



$$S_{ABT} = \frac{AT \cdot BH_3}{2}$$

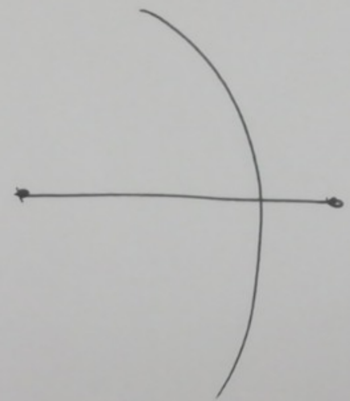
$$S_{ABT} = \frac{7 \cdot 7 \cdot \cos(30)}{2} = 49 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$k = \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{16 \cdot \sqrt{3}} = \frac{49}{64}$$

Ответ: $\frac{49}{64}$

Черновик

$16 \qquad 16^2$



$16(16^2 - \cancel{15}^{\,1} \cdot 15 \cdot 2) \overset{-16}{} + \frac{16 \cdot 15}{2} \qquad 8 \cdot 15$

$16 \cdot (256 - 30) + 120$

$16 \cdot 226 + 120 = 2260 + 1356 + 120$

$= 3$

1200
120
30

1356

$16(16^2 - 16 - 15 \cdot 2)$

$16(16 \cdot 15 - 15 \cdot 2)$

$16 \cdot 15 \cdot 14 + 15 \cdot 8$

$15 \cdot (64 + 8) = 15 \cdot 72$

$$\begin{array}{r} 2260 \\ 1356 \\ 120 \\ \hline 3716 \end{array}$$

$15 \cdot 224 + 15 \cdot 8$

$= 15 \cdot 232$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 15 \\ \hline 80 \\ 16 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 15 \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ 14 \\ \hline 64 \\ 16 \\ \hline 224 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 232 \\ 15 \\ \hline 1160 \\ 232 \\ \hline 3480 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 240 \\ 14 \\ \hline 960 \\ 240 \\ \hline 3360 \end{array}$$

№4 Чистовик 2

① $a=3 \Rightarrow x^2=3$
$b=4 \Rightarrow y^2=4$

② $a=4$ $x^2=4$
$b=3$ $y^2=3$

$x=\sqrt{3}$, $y=2$	$x=-\sqrt{3}$, $y=2$	$x=\sqrt{3}$, $y=-2$	$x=-\sqrt{3}$, $y=-2$
$x=2$, $y=\sqrt{3}$	$x=-2$, $y=\sqrt{3}$	$x=2$, $y=-\sqrt{3}$	$x=-2$, $y=-\sqrt{3}$

8 ответов

ЗАВТ-правильный ч т д

211006518 (U561 M1276443)

№5 Шитовик ③

Вначале рассмотрим варианты когда мы берем 2 дубля в таком случае мы никак не возьмем 2 карточки чтобы было одинаковые числа на 2-ух карточках

Всего 16 дублей ($\begin{smallmatrix}кс\\ск\end{smallmatrix}$ - не изменяет)

$$\frac{16\cdot15}{2} = 15\cdot8 = 120 \text{ вариантов}$$

Теперь когда только 1 дубль

$$16\,(16^2 - 16 - \cancel{2}\,15\cdot2) =$$

выбираем дубль

все карточки

минус дубли

минус 15 карточек которые есть у пары дубля

Помножаем на 2 т.к с-к и к и с разные варианты

$$16(16^2-16-15\cdot2) = 16\,(16\cdot15-15\cdot2) =$$

$$16\cdot15\cdot14 = 3360$$

складываем ~~Отв~~ $3360+120=3480$

Ответ: 3480 варианта

211006518 (U561 M1276443)

№4 Чистовик (9)

1)

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 & /\cdot 2{,}5 \\ x^4+y^4-0{,}5x^2y^2=19 \end{cases}$$

$\rightarrow$ 2) $5x^2+5y^2-2{,}5x^2y^2=5$

$5x^2+5y^2=2{,}5x^2y^2+5$

4) $t=x^2+y^2=\frac{14}{2}=7$

$2(x^2+y^2)-x^2y^2=2$

$2\cdot 7-x^2y^2=2$

$x^2y^2=12$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x^2y^2=12 \\ x^2+y^2=7 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a=x^2$

$a\geq 0$

$b=y^2$

$b\geq 0$

$$\begin{cases} ab=12 \\ a+b=7 \end{cases}$$

$\Downarrow$

3) $x^4+y^4+2x^2y^2+5=19+5x^2+5y^2$

$(x^2+y^2)^2=14+5(x^2+y^2)$

$t=x^2+y^2$

$t^2-5t-14=0$

$t=\frac{5\pm\sqrt{25+56}}{2}=\frac{5\pm 9}{2}$ минус т.к

$x^2+y^2\geq 0$

т.к x^2 и y^2 ≥ 0 из-за 2 степени

$\Downarrow$

$t\geq 0$

поскольку сумма a и b фиксирована

а произведение будет возрастать до момента тогда $a=b=\frac{7}{2}$

$\nearrow$ Неравенство о средн

$\Rightarrow$ решение 1 (2) $\boxed{a=3,\ b=4}$ или $\boxed{a=4,\ b=3}$

211006518 (U561 M1276443)