Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006464**

ID профиля: **828710**

Вариант 16

Черновик ②

$x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$

x_1, N, x_n $\quad N = x_1 + \dots + x_n$

$x^2 + y^2 = r^2$

$34x_1 + N = 592$

$N + 15x_n = 592$

$15 \cdot 34 =$

$N + 34x_1$

$N + 15x_n$

$34x_1 = 15x_n$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times 15 \\ \hline 170 \\ 34 \\ \hline 510 \end{array}$

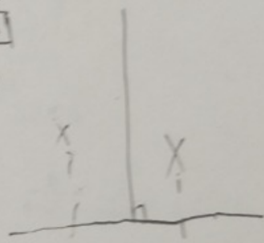
$\begin{array}{r} 510 \\ 49 \\ \hline 559 \end{array}$

$15 \dots 34$

$\begin{array}{r} 592 \\ -559 \\ \hline \boxed{33} \end{array}$

1^0 $\quad 16, 17$

33



$a^2x^2 - 4a^3x - 2ax$

$a^2x^2 - x(4a^3 + 2a)$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$

$4a^4 - 4a^3x + a^2(x^2 + y^2 + 2y) - a \cdot 2x + 1 = 0$

$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$y - n$

$5a^2 + a(6y - 4x) + (x^2 - 2xy + 2y^2) = 0$ $\quad a_1, a_2 = \dfrac{-6y + 4x \pm \sqrt{D}}{10}$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1$ $\quad (6y - 4x)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (x^2 - 2xy + 2y^2) \geq 0$

$-5a^2$ $\quad 36y^2 - 48xy + 16x^2 - 20x^2 + 40xy - 40y^2$

$2a^2 + 1$ $\quad -4y^2 - 8xy - 4x^2 \geq 0$ $\quad 100x^2 - 20 \cdot 5x^2 = 0$

$y^2 + 2xy + x^2 = 0$

$x + y = 0$ $\quad x = -y$

1 $\quad y = -x$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ $\quad (ax - 1)^2 = \boxed{a^2x^2 - 2ax + 1}$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$ $\quad a^2y^2 + 2a^2y + 4a^4$

$5a^2 - 10ax + 5x^2 = 0$ $\quad ya$

$a^2 - 2ax + x^2 = 0$ $\quad a^2y^2 + 2y +$

$\boxed{a = x = -y}$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 - a^2$

$a^2x^2 + a^2y^2$

$a^2y^2 + 2a^2y + a^2$ $\quad x(4a^3 - 2a)$

$4a^4 - 4a^3x + a^2(x^2 + y^2 + 2y) - 2ax$

$a^2x^2 - 4a^3x - 2ax + 4a^4$

$(ax - 2a^2) = \boxed{a^2x^2 - 4a^3x + 4a^4}$

ax^n

$(ax - 2a^2)^2 + (ay + a)^2 - 2ax + 1 - a^2$

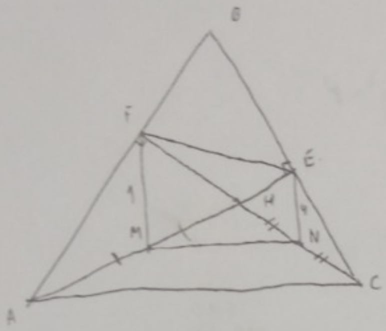
$a^2x^2 - 4a^3x - 2ax$

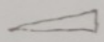
$(ax - 2a^2 - 1)$

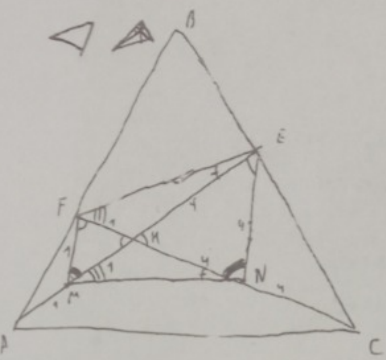
$a^2x^2 + a^2y^2$

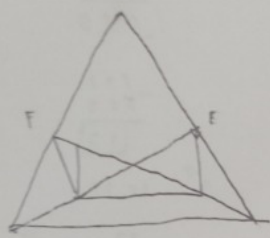
$a^2x^2 - 2a^2x - ax - 2a^3x + 4a^4 + 2a^2 - ax + 2a^2x$

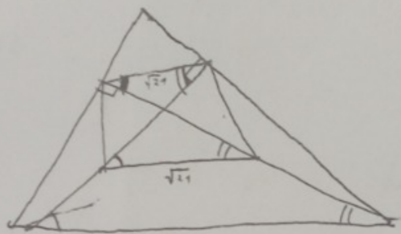
Черновик ①

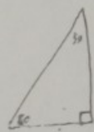












$\frac{1}{2}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin\alpha$

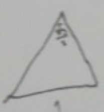
$\sin 120 = \frac{1}{2}$

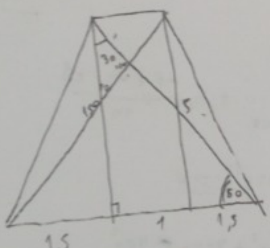
$2R = \frac{S}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin\beta}$

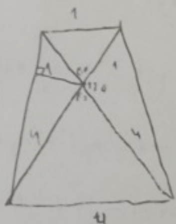
$\frac{a}{\sin\alpha}$

$\sqrt{13}$

$\frac{2}{\sqrt{3}}$



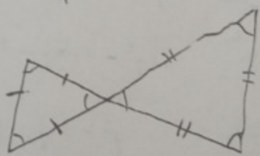




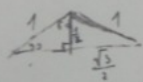
$1 + 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$

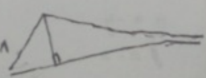
$2,5^2 + x^2 = 5^2$

$\sqrt{3}$



$\sqrt{21}$



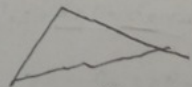


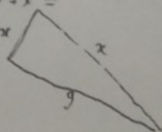
$16 + 11 + 4$

$\sqrt{21}$

$16 + x^2 =$

$\frac{1}{2}x$





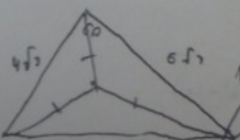
$\frac{1}{4}x^2 + 81 = x^2$

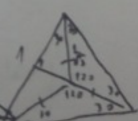
$81 = \frac{3}{4}x^2$

$27 \cdot 4 = x^2$

$6 \cdot \sqrt{3}$

$S = \quad R = \frac{}{\sin\alpha}$





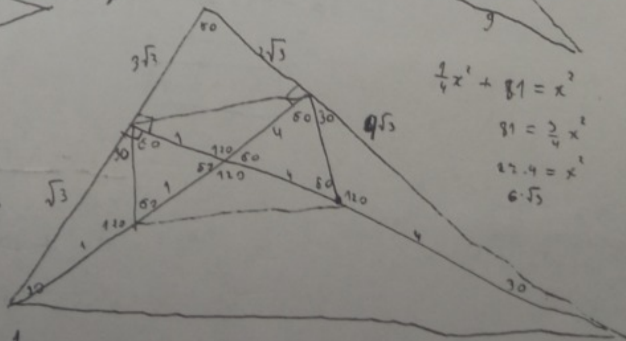
$\sqrt{3}x = 1$

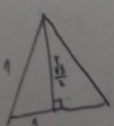
$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

$30° \quad 60°$

$\sqrt{3}$





$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sin\alpha}$

$\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

$27 + 81 = 36 \cdot 3 = 108$

$18\sqrt{3}$

$6^2 + \frac{1}{4}y^2 = y^2$

$12 \cdot$

$48 = y^2$

$4\sqrt{3}$

Чистовик (3)

3. Рассмотрим первое ур-е как уравнение от a.

$$5a^2 + a(6y-4x) + (x^2-2xy+2y^2)=0$$

$$D = (6y-4x)^2 - 5\cdot 4(x^2-2xy+2y^2) \geq 0$$

$$36y^2 - 48xy + 16x^2 - 20x^2 + 40xy - 40y^2 \geq 0$$

$$-4y^2 - 8xy - 4x^2 \geq 0$$ Значит для произвольных x и y существует a, для которого они являются решением ур-я.

$$y^2 - 2xy + x^2 \leq 0$$ только если $x=-y$

$$(y-x)^2 \leq 0$$

Подставим $y=-x$ в исходное ур-е.

$$5a^2 - 10xa + 5x^2 = 0$$

$$5(a^2 - 2xa + x^2) = 0$$

Значит решения при данном a такие: $\boxed{a = x = -y}$

$$5(a-x)^2 = 0$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$$

$$(ax - 2a^2 - 1)^2 + (ay + a)^2 - 5a^2 = 0$$

Значит $y=-1$, $x = \frac{2a^2+1}{a}$ — центр

Надо найти когда $\frac{2a^2+1}{a}$ и a лежат по разные стороны от 3, т.е.

$$(a-3)\left(\frac{2a^2+1}{a} - 3\right) < 0$$

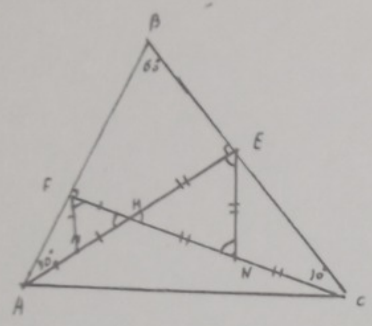
$\frac{2a^2+1}{a} - 3 < 0$ 1° при $a > 0$

$2a^2 - 3a + 1 < 0$

Корни $1; \frac{1}{2}$ Значит при $x \in$

Чистовик ②

1.



Заметим, что FM и EN - медианы в прямоугольных треугольниках △AFH и △CEH из прямого угла, а значит равны половине стороны по которую опущенны.

Таким образом $AM = MH = FM$, $HN = NE = NC$.

Значит в △HNE $HN = NE \Rightarrow \angle NEH = \angle NHE$

$\angle FHM = \angle EHN$ т.к. обр. одними прямыми.

А в △MFH $HF = MH \Rightarrow \angle MFH = \angle MHF$

Значит $\angle MFH = \angle MHF = \angle EHN = \angle NEH$.

$FM \parallel EN \Rightarrow \angle MFN = \angle HNE$, а так же $\angle FMH = \angle HEN$.

Значит △FMH и △HNE - правильные, значит все эти равны 60° (и сум $\angle FMH$ и $\angle HNE$)

$\angle FHE = 180° - \angle MHF = 120°$ Тогда $\angle FBE (= \angle ABC) = 360° - \angle HFB - \angle FHE - \angle HEB$ по сумме углов в четырехуг.

Значит $\angle FBE = 360° - 90° - 120° - 90° = 60°$

Тогда $\angle BAE = 30° = \angle BCF$ по сумме углов в △ABE и △BFC.

Мы знаем, что $AE = AM + MH + HE = 1+1+4 = 6$, а так-же, что $BE = \frac{1}{2} AB$ ($\angle BAE = 30°$ и △BAE прямоуг.)

Тогда пусть $AB = x$

По т. Пифагора $x^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + AE^2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = 36$

$AB^2 = BE^2 + AE^2$ $\quad \Downarrow$

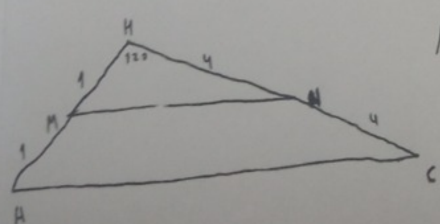
(CF - высота к AB) $\quad x = 4\sqrt{3}$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CF}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot (4+4+1)}{2} = 18\sqrt{3}$$

А R можно найти из теоремы синусов.

$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$ Возьмем как a сторону AC, а α - $\angle ABC = 60°$

$AC = 2MN$, т.к MN - средняя линия △AHC Найдем MN по теореме синусов.



$\angle MHN = 120° = 180° - \angle FHM$.

$MN^2 = MH^2 + HN^2 - 2\, MH \cdot HN \cdot \sin\angle MHN$.

$MN^2 = 16 + 1 + 4$

$MN = \sqrt{21} \Rightarrow AC = 2\sqrt{21}$

$$2R = \frac{2\sqrt{21}}{\sin(60°)} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{7}$$

Ответ: $\angle ABC = 60°$, $S = 18\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{7}$

Реш.

Чистовик ①

2. Пусть на доске записаны числа $x_1 < \ldots < x_n$ и $N = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.
Тогда при увеличении самого маленького числа в 35 раз получим:

$$N + 34x_1 = 592$$

А при увеличении самого большого в 16

$$N + 15x_n = 592$$

Тогда $N + 15x_n = N + 34x_1$

$15x_n = 34x_1$

x_n и x_1 – по условию натуральные, а $(15; 34) = 1$. Значит $x_n \vdots 34$, $x_1 \vdots 15$.

Пусть $x_1 = 15x$ Тогда $34 \cdot 15x \leq 592$

$510x \leq 592$ Значит $x = 1$, т. е. $x_1 = 15$.

Тогда $x_n = 34$.

Итого имеем: $N + 510 = 592$

$N = 82$

В N содержатся x_1 и x_n. Вычтем их.

$x_2 + \ldots + x_{n-1} + 15 + 34 = 82$

$x_2 + \ldots + x_{n-1} = 33$

Заметим, что $x_2, \ldots, x_{n-1} > x_1 = 15$, значит более 2-х чисел среди $x_2, \ldots, x_{n-1}$ нет.

1° Если их 2, то $x_2 + x_3 = 33$ $\left.\begin{matrix} x_2 \geq 16 \\ x_3 \geq 17 \end{matrix}\right\}$ из различия чисел на доске.

значит достигается равенство только при $x_2 = 16$, $x_3 = 17$.

<u>Ответ 1: 15, 16, 17, 34.</u>

2° Если число 1, то оно равно 33

Итого

<u>Ответ 2: 15, 33, 34.</u>

211006464 (U828710 M1275735)

Часть 2

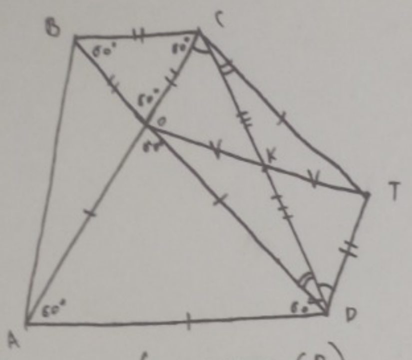
Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006464**

ID профиля: **828710**

Вариант 16

Чистовик ③



(K - середина CD)

Если $\triangle BOC$ и $\triangle AOB$ - правильные, то $ABCD$ — равнобедренная трапеция.
Ведь $\angle DBC = \angle BDA = 60° \Rightarrow BC \parallel AD$ и $BD = BO + OD = OC + AO =$
$= AC$ - диагонали трапеции
равны $\Rightarrow$ трапеция равнобедренная.

Построим точку T. $\triangle DCT = \triangle OCD$ из симметрии, а $OCTD$ - параллелогр.
($\angle DCT = \angle CDO \Rightarrow CT \parallel DO$
аналог. $OC \parallel DT$)
Тогда $OC = TD$, $CT = OD$

$\angle COD = 180° - \angle BOC = 120° \Rightarrow \angle CTD = 120°$ из симметрии.

Из параллельности CT и OD $\angle BOC = \angle OCT = 60°$. Так-же $\angle ODT = \angle OCT = 60°$
$OCTD$ - парал.

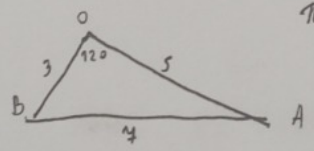
Тогда $\angle BCT = \angle CTD = 120°$, а $BD \parallel CT \Rightarrow BDCT$ - равноб. трапеция.

Тогда $BT = CD$ (диагонали), а $CD = BA$ ($ABCD$ - равноб. трап.)

Знач $TB = AB$. $\triangle ADT = \triangle BCT$ ($BC = DT$, $AD = CT$, $\angle BCT = \angle ADT = 120°$)

Значит $AT = BT = AB \Rightarrow ABT$ - равносторонний. ч.т.д.

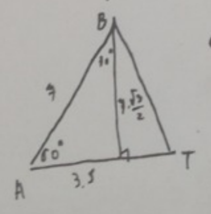
б) Найдём AB $\quad \angle DOA = 180° - \angle BOC = 120°$



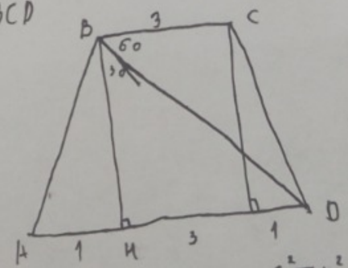
По т. косинусов
$AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2\,OA\,OB\cos\alpha =$
$= 9 + 25 + 15 = 49$
$AB = 7$

тогда $\triangle ABT$ - равносторонний треуг со стороной 7.

его площадь это $\frac{7^2 \cdot \sqrt{3}}{8} = \frac{49\sqrt{3}}{8}$



А у $ABCD$



Высота BH по т. Пифагора $8^2 = 4^2 + BH^2$
$BD^2 \quad HD^2$
$BH = 4\sqrt{3}$

Площадь трапеции - полусумма оснований умноженная на высоту. т.е $\frac{BC + AD}{2} \cdot BH =$
$= 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$$\frac{S_{ADT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{49\sqrt{3}}{8}}{16\sqrt{3}} = \frac{49}{128}$$

Ответ: $\frac{49}{128}$

211006464 (U828710 M1275736)

5

Чистовик 2

Рассмотрим 2 случая

1° Фокусник вытаскивает один дубль

Пусть он вытаскивает дубль (x_1, x_1), тогда в второй вытянутой карте могут быть любые числа кроме x_1. Таким образом мы можем выбрать 15 цветов для синей стороны и столько-же для красной. Но заметим, что 15 карточек из выбранных будут дублями $((1,1); (2;2); \dots (x_1-1; x_1-1); (x_1+1; x_1+1), \dots, (16;16))$. Тогда всего мы можем выбрать $15 \cdot 15 - 15$ карт.

Заметим, что у фокусника есть все возможные карты, т.к всего возможных раскрасок синих сторон 16 и красных 16, значит всего различных карт 16^2, а у фокусника нет одинаковых карт. Значит у него есть все возможные карты.

Тогда для каждого дубля (всего их очевидно 16, т.к. у фокусника все возможные карты) $(1,1), \dots (16;16)$ есть $15^2 - 15$ способов выбрать 2-ю карту. При чем эти способы не повторяются, т.к. содержат разные дубли и всего 1 в каждом способе.

Всего способов выбрать 1 дубль и не дубль $(15^2 - 15) \cdot 16$.

2° Фокусник вытаскивает 2 дубля

Есть 16 дублей. Мы можем взять любые 2 из них, ведь числа на них не повторяются. Тогда у нас есть $\frac{16 \cdot 15}{2}$ (C_{16}^2) способов выбора (выбираем 1-й 16 способами и 2-й 15, но нам не важен порядок выбора, поэтому варианты 1,2 и 2,1 не считаем 2 раза и делим на 2)

Итого способов выбора $16 \cdot (15^2 - 15) + \frac{16 \cdot 15}{2} = 3480$

Ответ: 3480

Чистовик ①

4. $\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{x^2y^2}{2}=19 \end{cases}$ Пусть $a=x^2$, $b=y^2$ (Отсюда $a,b\geq 0$)

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-\frac{ab}{2}=1 \\ a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19 \end{cases}$$

~~Возведем в квадрат (для корней позже придется проверять~~ $\cancel{a+b-\frac{ab}{2}\neq -1}$~~)~~

$a+b-\frac{ab}{2}=1$ $\quad a,b,\frac{ab}{2}\geq 0$ (из $a,b\geq 0$)

$a+b=1+\frac{ab}{2}$

$\Downarrow$

$(a+b)^2=\left(1+\frac{ab}{2}\right)^2$

$a^2+2ab+b^2=1+ab+\frac{a^2b^2}{4}$

Вычтем из этого $a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19$

$2ab+\frac{ab}{2}=-18+ab+\frac{a^2b^2}{4}$

$18=\frac{a^2b^2}{4}-1{,}5ab$ домножим на 4

$72=a^2b^2-6ab$

пусть $n=ab$

$n^2-6n-72=0$ но $ab\geq 0$, значит подходит только $ab=12$.

корни $n_{1,2}=-6, 12$

Вернемся к исходному $2a+2b-ab=2$

$2a+2b-12=2$

$a+b=7$

Решим $\begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases}$ корни $\begin{matrix} a=3 \\ b=4 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} a=4 \\ b=3 \end{matrix}$

Тогда 1° $x=\pm\sqrt{3}$
$y=\pm\sqrt{4}$

2° $x=\pm\sqrt{4}$
$y=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(-\sqrt{3};-\sqrt{4})$, $(-\sqrt{3};+\sqrt{4})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{4})$, $(\sqrt{3};\sqrt{4})$, $(\sqrt{4};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{4};\sqrt{3})$.
$(-\sqrt{4};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{4};\sqrt{3})$,

211006464 (U828710 M1275736)

Черновик ②

$2x^2 -$

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19 \end{cases}$$

15.15

15.

1	2	...	x−1	x+1	...	16.
1	2	...	x−1,	x+1,	...	16

16+16

15+15

$a+b=\left(1+\frac{ab}{2}\right)$

$a^2+2ab+b^2=1+ab+\frac{a^2b^2}{4}$

$a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19$

$2ab+\frac{ab}{2}=-18+ab+\frac{a^2b^2}{4}$

$18=\frac{a^2b^2}{4}-1,5ab$

$72=n^2-6n$

$0=n^2-6n-72$

-6 – корень и $\boxed{12 \text{ – корень.}}$

$$\begin{cases} ab=12 \\ a+b=7. \end{cases}$$

$\boxed{\begin{matrix} a=3 \\ b=4 \end{matrix}}$ или наоборот.

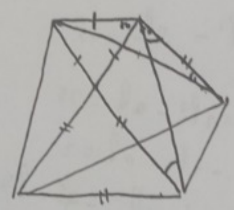
$x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$y=\pm\sqrt{4}$ или

$6+8-12=2$

$3^2+4^2-6=19$

9 16



8·15

30·4

120

15·14

30·7

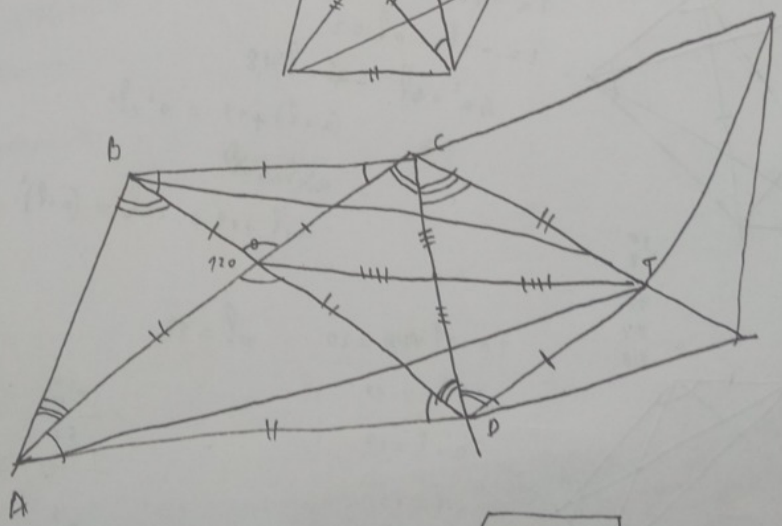
210·16

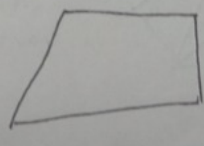
420·8

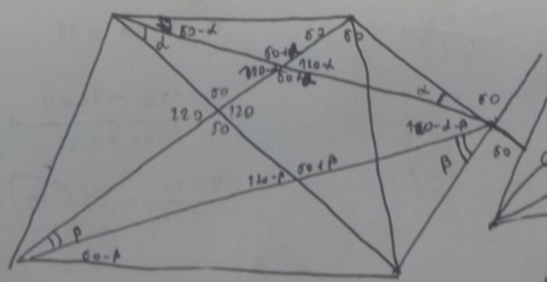
840·4

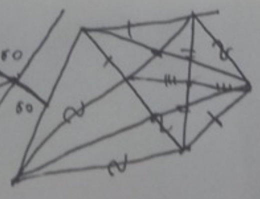
1680·2

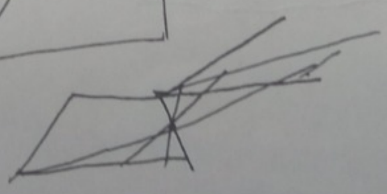
$$\begin{array}{r} 3360 \\ +\ 120 \\ \hline 3480 \end{array}$$

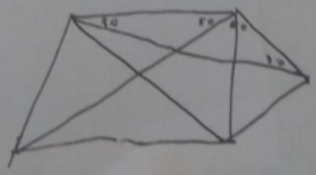


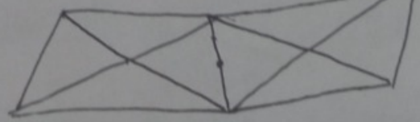












Черновик ①

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$ $\qquad x^2=a$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19$ $\qquad y^2=b$

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19$

$2a=2-2b+ab$

$a(2-b)=2-2b$

$2a+2b-ab=2$

$a(2-b)=2-2b$

$a=\frac{2-2b}{2-b}=1-\frac{b}{2-b}$

$2a^2+2b^2-ab=38$

$2a+2b-ab=2$

15^2-15 $\qquad \frac{16\cdot 15}{2}=8\cdot 15$

$2a^2-2a+2b^2-2b$

$2a(a-1)+2b(b-1)=36$

$a(a-1)+b(b-1)=18$

1 15

1 15

$\frac{\sqrt{3}}{8}$

1

$4\sqrt{3}$

$16\cdot 3$

66

16

$2a+2b-ab=2$ $\qquad a+b-\frac{ab}{2}=1$ $\qquad 2a\cdot$

$a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19$ $\qquad \left(a+b-\frac{ab}{2}\right)^2=a^2+ab$

$2a^2+2b^2-ab=38$

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2=(a+b)+18$

$(a+b)+18=a^2+b^2$

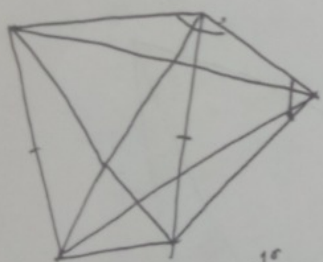
$a+b+18+2ab=(a+b)^2$

$(2a+2b-ab)^2=4a^2+4ab-$

$a^2+b^2-\frac{ab}{2}$ $\qquad -2a^2b-$

$a+b-\frac{ab}{2}=1$

$a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19$



$12\sqrt{3}$

$\times\frac{16}{8}$

32

64

128

$(a+b)^2=\left(1-\frac{ab}{2}\right)^2$

$a^2+2ab+b^2=1-ab+\frac{a^2b^2}{4}$

$2a+2b=20$ $\qquad ab=11$

$a^2+b^2=19$

$a+b=10$

$ab=10$

$ab=18$

$\times\frac{14}{14}$

56

14

$a^2+3ab+b^2-\frac{a^2b^2}{4}=1$

$+3{,}5ab-\frac{a^2b^2}{4}=$

$\frac{a^2b^2}{4}-3{,}5ab=18$

$\times\frac{4}{72}$

288

1196

484

44 · 11

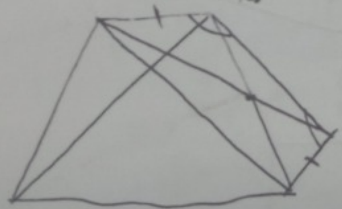
$\frac{n^2}{4}-3{,}5n=18$

$n^2-14n-72=0$

$14\pm\sqrt{196+4\cdot 72}$

$\frac{14\pm 22}{2}=\frac{36}{2}$ $\quad -4$

18



211006464 (U828710 M1275736)