Часть 1

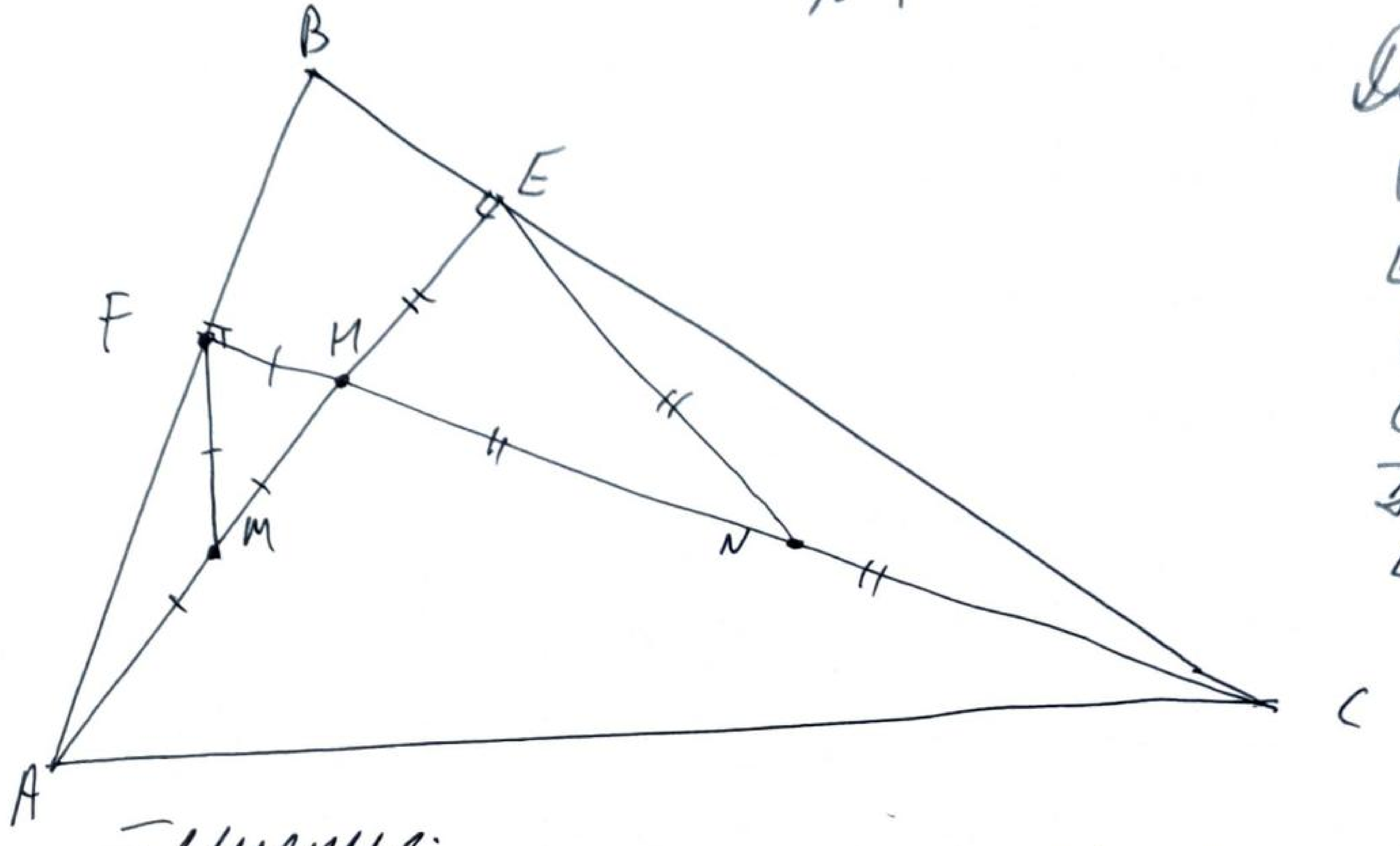
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006257**

ID профиля: **152912**

Вариант 16

№1



Дано:

$FM = 1$

$EN = 4$

$FM \parallel EN$

CF и AE - высоты

Найти:

$\angle ABC$, $S_{\triangle ABC}$, $R_{\triangle ABC}$

Решение:

Т.к. $\angle AFH = 90°$, то $AM = MH = MF$ (медиана в пр. тр.)

Аналогично $HN = NC = EN$.

Значит $\angle MFH = \angle MHF$ и $\angle NHE = \angle HEN$.

Т.к. $FM \parallel EN$, то $\angle FMH = \angle HEN$. И $\angle FHM = \angle EHN = \angle HEN = \angle FMH$ (верт.)

Значит $\angle FHM = \angle FMH = \angle MFH = 60°$. Аналогично $\triangle HEN$ - равност.

Значит $\angle EAB = 90° - \angle AHF = 30°$ и $\angle ABC = 90° - \angle EAB = 60°$.

$\angle AHC = 180° - \angle AHF = 120°$.

По т. косинусов $\triangle AHC$:

$AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2AH \cdot HC \cdot \cos\angle AHC$

$AC^2 = (2)^2 + 8^2 + 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 84$

$AC = 2\sqrt{21}$

По т. синусов $\triangle ABC$:

$R_{\triangle ABC} = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{21}}{2 \cdot \sqrt{3}} = 2\sqrt{7}$

$$\cos\angle EAB = \frac{AE}{AB}$$

$$AB = \frac{AE}{\cos\angle EAB} = \frac{2\cdot 6}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Аналогично $BC = \dfrac{FC}{\cos\angle FCB} = \dfrac{2\cdot 9}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4R_{\triangle ABC}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{21}}{4\cdot 2\cdot\sqrt{7}} = 18\sqrt{3}$$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}$, $R_{\triangle ABC} = 2\sqrt{7}$

№2 Лист 3 из 5

Пусть на доске написаны числа $a_1, a_2 \dots a_n$, где $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Тогда: $-\begin{cases} 35a_1 + a_2 + \dots + a_n = 592 \\ a_1 + a_2 + \dots + 16a_n = 592 \end{cases}$

$34a_1 = 15a_n$

Откуда $a_1 \vdots 15$ и $a_n \vdots 34$, значит $a_1 \geq 15$ и $a_n \geq 34$.
(они $\in \mathbb{N}$) (при этом $a_1 = 15$, иначе $a_1 \geq 30$ и $35 \cdot 30 > 592$
(аналогично $a_n = 34$, иначе $a_n \geq 68$ и $68 \cdot 16 = 1088 > 592$) 1050)

$592 = 35a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \geq 575 + a_2 + \dots + a_{n-1} + 34 =$

$= 559 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$

И $33 \geq a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$

Заметим, что т.к. $a_3 > a_2 > a_1$, то $a_3 \geq 17$ и $a_2 \geq 16$.

Значит если у нас написано 4 числа, то это 15, 16, 17, 34. ($a_3 + a_2 \geq 33$. Более 4 не может быть, иначе $33 \geq a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} > 33$ - противоречие

Если 3 числа, то это 15, 33, 34.

Эти числа подходят.

Ответ: 15; 16; 17; 34 или 15; 33; 34.

$5a^2-4ax+6ay+2y^2-2xy+x^2=(x-y-2a)^2+(y+a)^2=0$

Значит $x-y-2a=0$ и $y+a=0$

Сложим: $x=a$ (получим это)

Значит координата x точки A равна a.

$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=$

$=a^2(y+1)^2+(ax-2a^2-1)^2-5a^2=0$

Если $a\neq 0$, то:

$(y+1)^2+\left(x-\frac{2a^2-1}{a}\right)^2=5$

Значит x координата точки B равна $\frac{2a^2+1}{a}$

Значит надо рассмотреть два случая:

$\begin{cases} a>3 \quad a\neq 0 \\ \frac{2a^2+1}{a}<3 \end{cases}$

если $a<0$, то $\varnothing$ (т.к. $a>3$)

если $a>0$:

$\begin{cases} a>3 \\ 2a^2-3a+1<0 \end{cases}$

$\begin{cases} a>3 \quad a\neq 0 \\ a\in(\frac{1}{2};1) \end{cases}$

$\varnothing$

$\begin{cases} a<3 \quad a\neq 0 \\ \frac{2a^2+1}{a}>3 \end{cases}$, $a>0$, иначе это неверно

$\begin{cases} a<3 \quad a\neq 0 \\ 2a^2-3a+1>0 \end{cases}$, $a>0$

$\begin{cases} a<3 \quad a\neq 0 \\ a\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)\setminus\{0\} \end{cases}$

$a\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;3)\setminus\{0\}$

~~Если $a=0$, то:~~

~~$A(0;0)$~~

~~$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=1=0$~~

~~противоречие.~~

~~Ответ: $a\in(-\infty;0)\cup(0;\frac{1}{2})\cup(1;3)$.~~

Если $a=0$, то: $a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=1=0$ – противоречие.

Ответ: $a\in(0;\frac{1}{2})\cup(1;3)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006257**

ID профиля: **152912**

Вариант 16

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

Пусть $a=x^2$, $b=y^2$, $a,b\geq 0$, тогда:

$$\begin{cases} \cancel{2}\cdot a+b-\frac{1}{2}ab=1 \\ (a+b)^2-\frac{5}{2}ab=19 \end{cases}$$

Пусть $u=ab$; $v=a+b$, тогда:

$$-\begin{cases} v-\frac{1}{2}u=1 & |\cdot 5 \\ v^2-\frac{5}{2}u=19 \end{cases}$$

$v^2-5v-14=0$

$D=25+4\cdot 14=81$

$v_1=\frac{5+9}{2}=7$ $\quad v_2=\frac{5-9}{2}=-2<0$, но $v\geq 0$, т.к. $a\geq 0$ и $b\geq 0$

Значит $v=7$, $u=2v-2=12$

$$\begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=7-a \\ a(7-a)=12 \end{cases}$$

$a^2-7a+12=0$

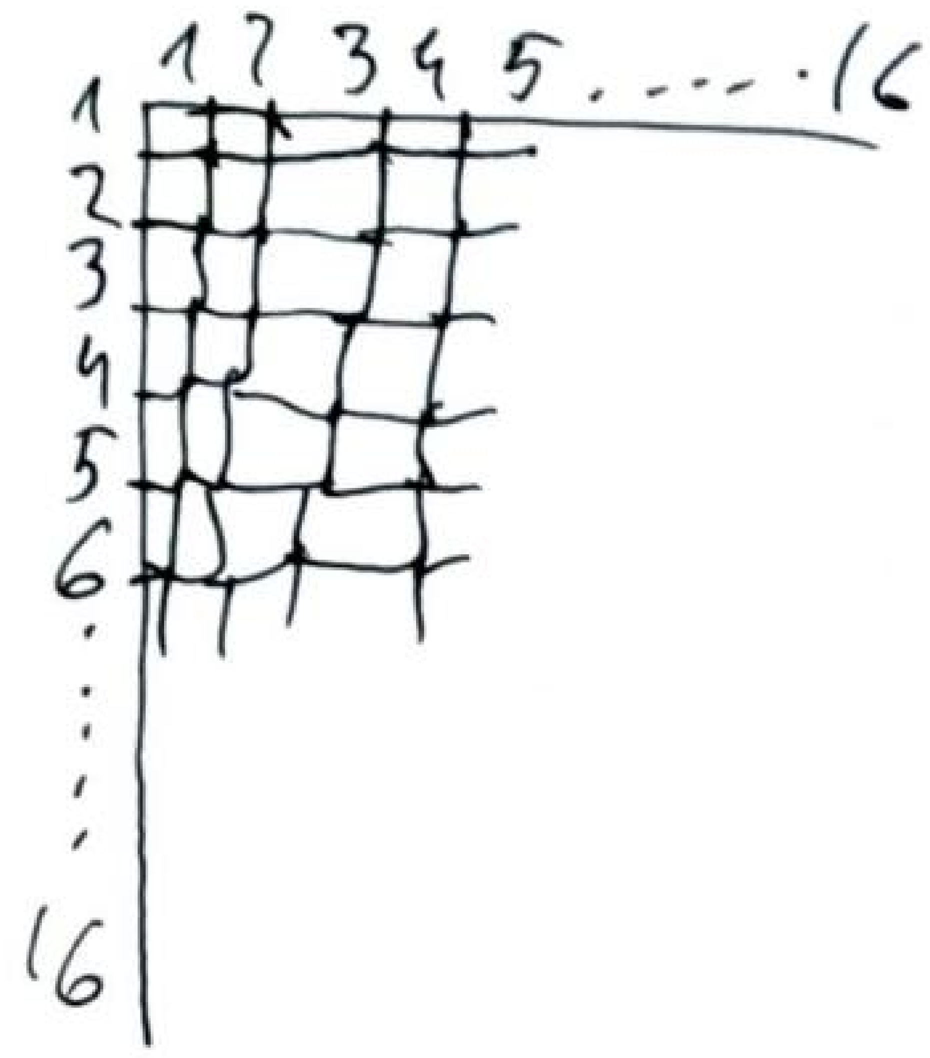
По т. Виета $a=4$ или 3. (Также $(\pm 2;\mp\sqrt{3})$ и $(\pm\sqrt{3};\mp 2)$)

Значит подходят пары $(\pm 2;\pm\sqrt{3})$ и $(\pm\sqrt{3};\pm 2)$

Ответ: $(\pm 2;\pm\sqrt{3})$; $(\pm\sqrt{3};\pm 2)$; $(\pm 2;\mp\sqrt{3})$; $(\pm\sqrt{3};\mp 2)$.

Заметим, что у нас есть 16 дублей.

При этом вторую картинку мы можем вытянуть 16^2-31 способами:

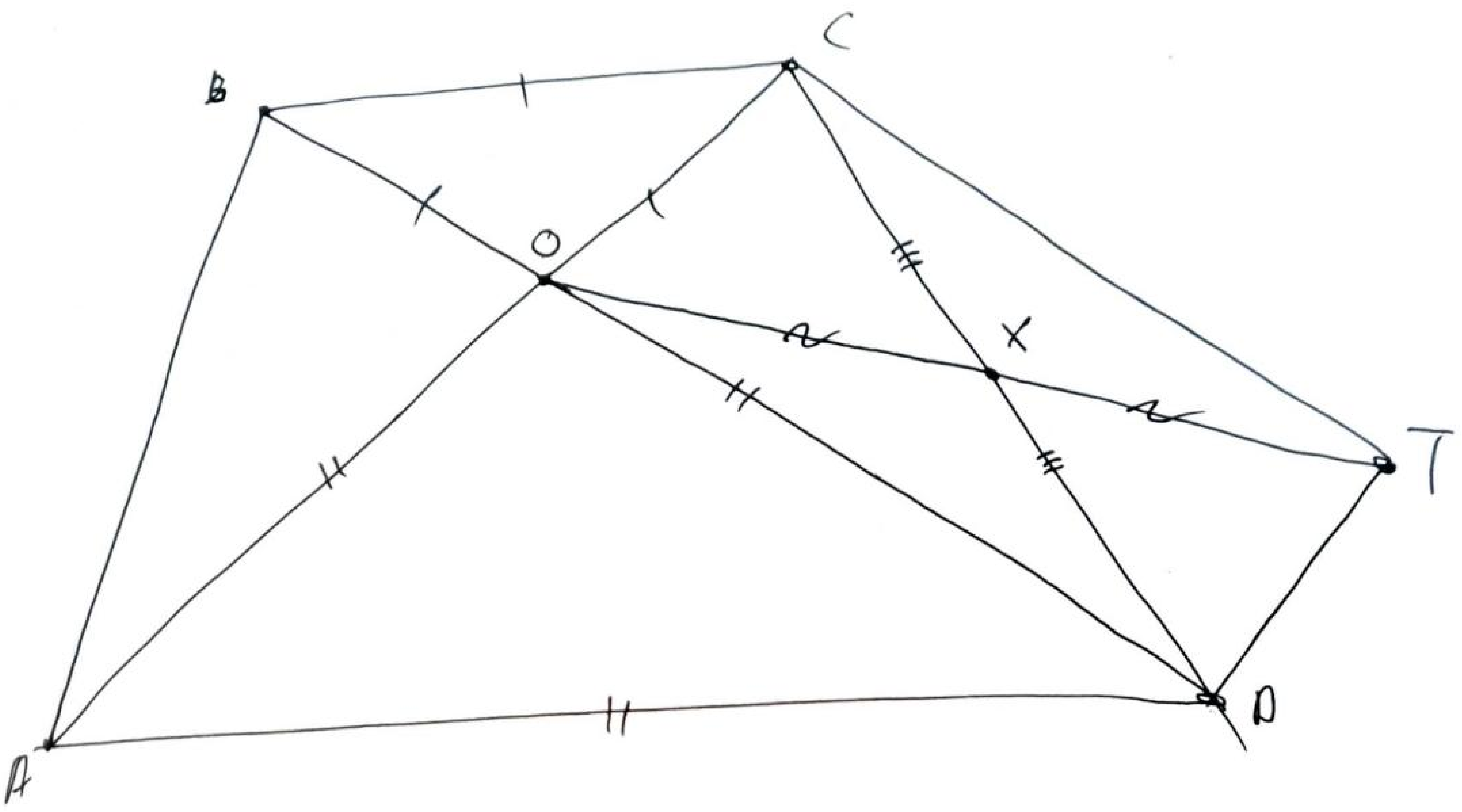


Значит всего способов $\frac{16\cdot(16^2-31)}{2} = 1800$

(т.к. порядок не важен)

Ответ: 1800 способов.

№ 6 Мапэизи



Т.к. T симметрична отн. X, то $OX = XT$ и $CX = XD$, значит $CODT$ - параллелограмм (по признаку: если диагонали точкой перес. делятся пополам, то это паралл.)

~~$\angle COD = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$~~

~~Т.к. OD~~

Т.к. $BD \parallel CT$, то $\angle BCT = 180^\circ - \angle OBC = 120^\circ$.

Аналогично $\angle ADT = 120^\circ = \angle BCT$ ($CA \parallel DT$).

$\angle BOA = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$

Значит

$\angle BOA = \angle BCT = \angle ADT = 120^\circ$.

$BO = BC = DT$ ($CO = DT$, т.к. $CODT$ - парал.)

$AO = CT = AD$ (Аналогично

} признак равенства по двум сторонам и углу между ними, значит

$\triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA$, значит $AB = BT = AT$, значит $\triangle ABT$ - правильный.

№6 (продолжение) Лист 4 из 4

Т.к. $\angle OBC = \angle ODA = 60^\circ$, то $BC \parallel AD$, значит $ABCD$ - трапеция.

Т.к. $BO = OC$ и $AO = OD$, то $ABCD$ - равноб. трапеция

$\left(\begin{matrix} BO = OC \\ AO = OD \\ \angle AOB = \angle COD \end{matrix}\right\}$ признак равенства $\triangle AOB$ и $\triangle COD$)

Высота $\triangle BOC$ равна $BO \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Высота $\triangle AOD$ равна $AO \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Т.к. $ABCD$ - трапеция, то её высота равна $\frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

Значит её площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.

~~AB~~ Из т. косинусов $\triangle AOB$:

$$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB =$$

$$= 9 + 25 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 49$$

$AB = 7$.

~~Т.к.~~ Т.к. $\triangle ABT$ - равнос., то его площадь равна:

$$\frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

Значит отношение площадей трапеции и $\triangle ABT$ равно: $\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle ABT}} = \frac{4 \cdot 16\sqrt{3}}{49 \cdot \sqrt{3}} = \frac{64}{49}$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49}{64}$.