Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006142**

ID профиля: **884424**

Вариант 16

Чистовик

Лист 1.

№2

1) Пусть $a<b_1<b_2<\ldots<b_n<c$ – исходные числа ($\{a; b_1; \ldots; b_n; c\}\subset\mathbb{N}$).

2) Пусть $b_1+b_2+\ldots+b_n=b$. Тогда: $35a+b+c=592=a+b+16c$

$34a=15c \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 15 \\ c \vdots 34, \end{cases}$ но $\{a; c\}\subset\mathbb{N}$ $\Rightarrow \begin{cases} a\geq 15 \\ c\geq 34 \end{cases} \Rightarrow a+c\geq 49 \Rightarrow -a-c\leq -49$

3) $c\geq 34 \Rightarrow 15c\geq 510 \Rightarrow -15c\leq -510$

4) $\begin{matrix} a+b+16c\leq 592 \\ -15c\leq -510 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+b+c\leq 82 \\ -a-c\leq -49 \end{matrix} \Rightarrow b\leq 33.$

5) Заметим, что: $b=b_1+\ldots+b_n \geq n\cdot a\geq 15n$; $b\leq 33$ $\Rightarrow 15n\leq 33$, т.е. $n\leq 2$, т.е. $\left[\begin{matrix} n=0 \\ n=1 \\ n=2 \end{matrix}\right.$

При $n=0$: $\begin{cases} 35a+c=592 \\ a+16c=592 \mid \cdot 15 \end{cases}$ $\begin{cases} 34a=15c \\ 15a+34\cdot 16a=592\cdot 15 \end{cases}$

$a=\frac{592\cdot 15}{34\cdot 16+15}=\frac{2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 37}{559}\notin\mathbb{N}$, т.е. $n=0$ не подходит, т.е. $\left[\begin{matrix} n=1 \\ n=2 \end{matrix}\right.$, т.е. $b\geq a\geq 15$.

6) $\begin{matrix} a\geq 15 \\ c\geq 34 \\ a<c \\ a\vdots 15 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \left[\begin{matrix} a=15 \\ a=30, \end{matrix}\right. \\ 34a=15c \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \begin{cases} a=15 \\ c=34 \end{cases} : b=592-34-35\cdot 15=67-34=33 \\ \begin{cases} a=30 \\ c=68 \end{cases} : b=592-68-35\cdot 30<0 \text{ – противоречие.} \end{matrix}\right.$

Таким образом, $a=15$, $b=33$, $c=34$.

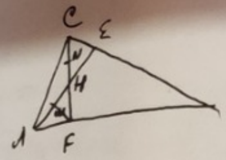
7) При $n=1$: $\begin{cases} a=15 \\ b_1=33 \\ c=34 \end{cases}$

При $n=2$: $\begin{matrix} b_1+b_2=33 \\ 15<b_1<b_2 \\ \{b_1; b_2\}\subset\mathbb{N} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1=16 \\ b_2=17 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a=15 \\ b_1=16 \\ b_2=17 \\ c=34 \end{cases}$

Ответ: числа 15; 33; 34 или числа 15; 16; 17; 34 (в любом порядке).

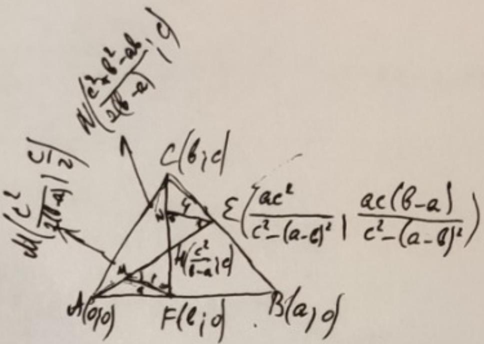
211006142 (U884424 M1277678)

Черновик



$FM=1$

$EN=4$



$AE: \ k=\frac{1}{k_{BC}}=\frac{b-a}{c}$

$$\begin{cases} y=\frac{b-a}{c}x \\ \frac{a-x}{-y}=\frac{b-a}{c} \end{cases}$$

$$\frac{x-a}{\frac{(b-a)x}{c}}=\frac{b-a}{c}$$

$$\frac{c(x-a)}{x(b-a)}=\frac{b-a}{c}$$

$H: \ y=c$

$y=\frac{b-a}{c}x$

$x=\frac{c}{b-a}y=\frac{c^2}{b-a}$

$x(b-a)^2=xc^2-ac^2$

$$x=\frac{ac^2}{c^2-(a-b)^2}$$

$$\left(\frac{c^2}{b-a}+\frac{b(b-a)}{b-a}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{ac(b-a)}{c^2-(a-b)^2} \qquad FM^2=\left(\frac{c^2-b(b-a)}{2(b-a)}\right)^2+\frac{c^2}{4}=1$$

$$\frac{(c^2-b(b-a))^2+c^2(b-a)^2}{4(b-a)^2}=1$$

$R=\frac{abc}{4S}$

$(1)\ c^4-2bc^2(b-a)+b^2(b-a)^2+c^2(b-a)^2-4(b-a)^2=0$

$a_1<b_1<\dots<b_n<c$

$\sum_{i=1}^{n}(b_i)=b$

$35a+b+c=592$

$a+b+16c=592$

$34a=15c$

$a \vdots 15 \Rightarrow a\geq 15$

$c \vdots 34 \Rightarrow c\geq 34 \quad \Rightarrow -a-c\leq 49$

$16c\geq 510$

$-15c\leq -510$

$a+b+16c\leq 592$

$a+b+c\leq 82$

$-a-c\leq 49$

$b\leq 33 \Rightarrow 1\leq n\leq 2$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 15 \\ \hline 170 \\ 3 \\ \hline 510 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 4 \\ 21 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 592 & 2 \\ 296 & 2 \\ 148 & 2 \\ 74 & 2 \\ 37 & 2 \\ 37 & 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 8 \\ \hline 296 \\ 68 \\ 8 \\ \hline 544 \\ 15 \\ \hline 559 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 37 \\ \hline 10+5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \hline 189 \\ 185 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ 15 \\ \hline 175 \\ 35 \\ \hline 525 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 592 \\ 525 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 156 \\ 72 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 3 \\ \hline 108 \end{array}$$

$15\leq a\leq 30$

$16\leq b\leq 33$

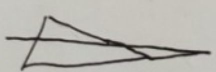
$34\leq c\leq$

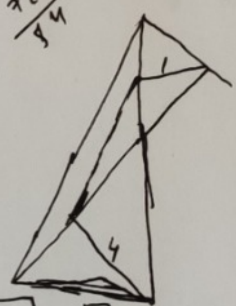
$592\leq \Sigma_i \leq 592$

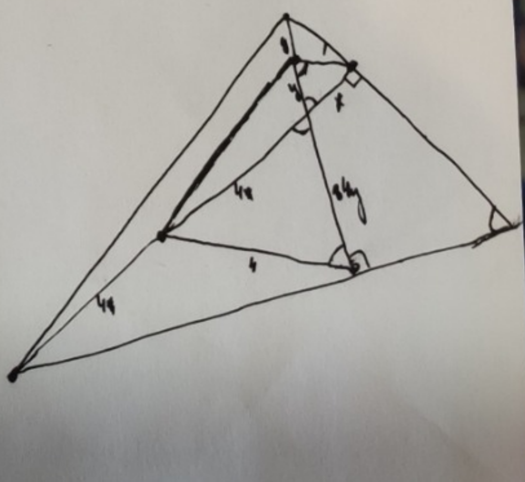
16

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

x^2-







$\cos\alpha=\frac{4}{2x} \Rightarrow x^2+y^2-y^2=1$

$x=1$

$\cos\alpha=\frac{4}{2}$

$\sqrt{8^2+2^2+16}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{4^2+1+4}=2\sqrt{21}$

$A(x;y): \ 5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

При a - ? $\forall(x;y)$: $(2a+\frac{1}{a}-3)(x-3)<0$

211006142 (U884424 M1277678)

Чистовик

Лист 3

№3

$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0 \;\big|:a^2\neq 0$, т.к. это ур-ие окр-ти по условию, а при $a=0$ это пустое множ-во, т.к. ур-ие превратится в $1=0$.

$x^2-\left(4a+\frac{2}{a}\right)x+y^2+2y+1+4a^4=0$

$\left(x-\left(2a+\frac{1}{a}\right)\right)^2+(y+1)^2+4a^4-4a^4-4-\frac{1}{a^2}=0$

$\left(x-\left(2a+\frac{1}{a}\right)\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{a^2}+4$

$B\left(2a+\frac{1}{a};-1\right)$

$A(x;y)$

~~Точки~~ A и B ~~находятся~~ лежат по разные стороны от прямой $x=3$ тогда и только тогда, когда

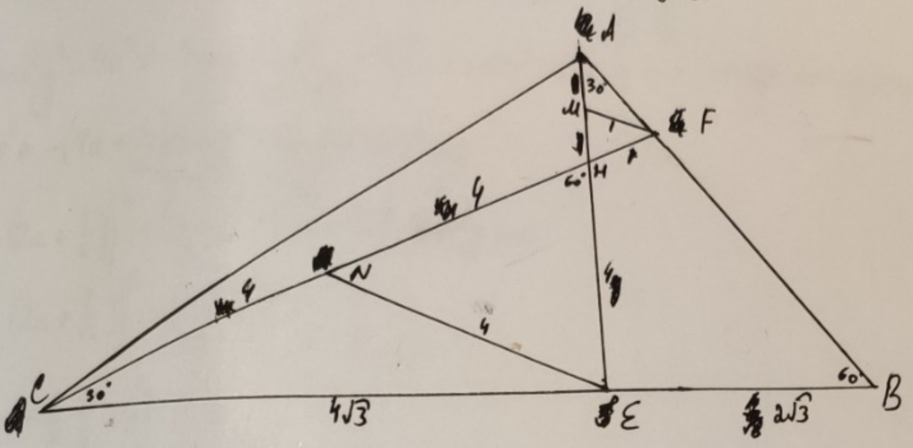
$\left(2a+\frac{1}{a}-3\right)(x-3)<0$

211006142 (U884424 M1277678)

Чистовик

лист 2

№1



$\omega(O; R)$ опис. около $\triangle ABC$

Найти: $\angle ABC$, $S_{\triangle ABC}$, R

Р-ие:

1) $\triangle FMH \overset{k}{\sim} \triangle NEH$ (по 2-м углам) с $k=4$. Пусть $EH=4y$; $MH=AM=y$; $FH=x$; $CN=NH=4x$.

2) Из п/у $\triangle CEH$: $\cos\angle CHE = \frac{4y}{8x} = \frac{y}{2x}$, т.е. $\cos\angle MHF = \frac{y}{2x}$.

3) Из т. косинусов в $\triangle MHF$: $1^2 = x^2+y^2-2xy\cdot\frac{y}{2x}$

$x^2+y^2-y^2=1^2 \Rightarrow x=1$, т.е. $HF=1$; $CN=NH=4$.

4) Заметим, что в п/у $\triangle AFH$: FM – медиана к гипот., значит, $FM=\frac{AH}{2}$, т.е. $1=\frac{2y}{2} \Rightarrow y=1$, т.е. $AM=MH=1$; $EH=4$.

5) $\triangle NHE$ и $\triangle MHF$ – р/с (по опред.) $\Rightarrow \angle CHE=60°$.

6) Из п/у $\triangle CHE$: $\angle HCE = 90°-60°=30°$

7) Из п/у $\triangle CFB$: $\angle CBA = 90°-30°=60°$

8) Из п/у $\triangle ABE$: $\angle EAB=90°-60°=30°$; $\cos 30° = \frac{6}{AB} \Rightarrow AB=\frac{6}{\cos 30°}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$

$\sin 30° = \frac{EB}{\frac{12}{\sqrt{3}}} \Rightarrow EB=\frac{12}{\sqrt{3}}\sin 30° = \frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

9) Из п/у $\triangle CHE$: $\sin 60° = \frac{CE}{8} \Rightarrow CE = 8\sin 60° = 4\sqrt{3}$

10) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot \sin\angle B = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

11) Из т. косинусов в $\triangle ABC$: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B}=\sqrt{48+108-2\cdot 24\cdot 3\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{156-72}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

12) $R = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S} = \frac{4\cdot 6\cdot 3\cdot 2\sqrt{21}}{4\cdot 18\sqrt{3}} = 2\sqrt{7}$

Ответ: $\angle B=60°$; $S_{\triangle ABC}=18\sqrt{3}$; $R=2\sqrt{7}$

211006142 (U884424 M1277678)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

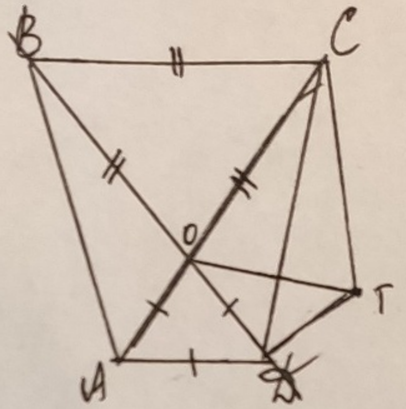
Шифр: **211006142**

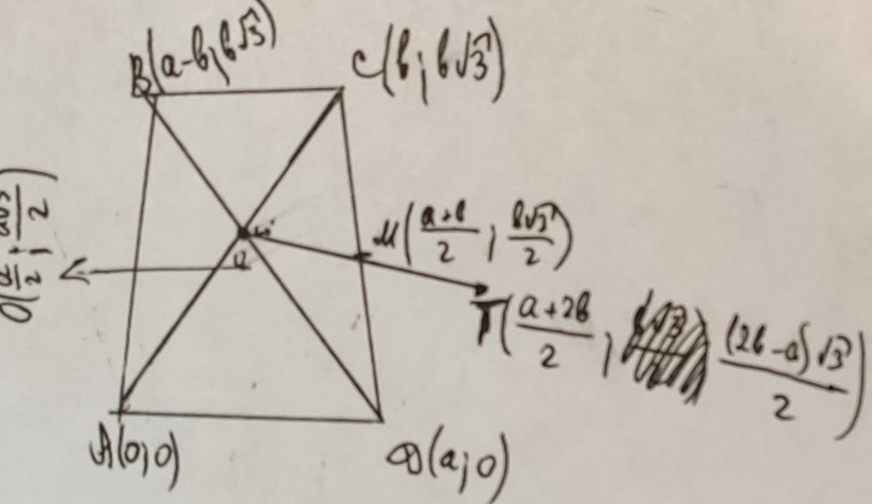
ID профиля: **884424**

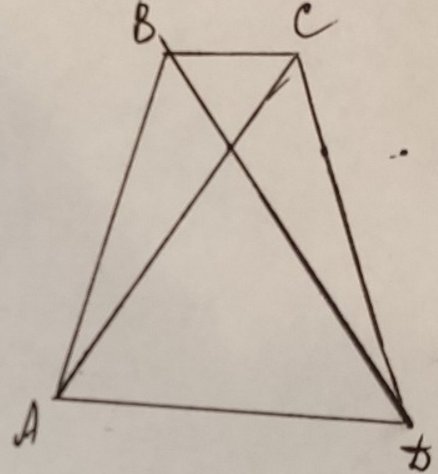
Вариант 16

Черновик

$$2n+2m-nm=2$$
$$n^2+m^2-\frac{1}{2}nm=19$$







$$\cancel{AB^2=(a-b)^2+3b^2=a^2-2ab+4b^2}$$
$$\cancel{AT^2=\frac{(a+2b)^2+3b^2}{4}=\frac{a^2+4ab+7b^2}{4}}$$
$$\cancel{BT^2=\frac{(a-4b)^2+3b^2}{4}=\frac{a^2-8ab+7b^2}{4}}$$

$$AB^2=a^2-2ab+4b^2$$
$$AT^2=\frac{(a+2b)^2+3(2b-a)^2}{4}=\frac{a^2+4ab+4b^2+3a^2-12ab+12b^2}{4}=a^2-2ab+4b^2$$
$$BT^2=\frac{(a-4b)^2+3a^2}{4}=a^2-2ab+4b^2$$

Чистовик

лист 1.

№4

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(x^2+y^2)-x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2-2{,}5x^2y^2=19 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=n$; $x^2y^2=m$. ~~Тогда~~ Очевидно, что $n\geq0$. и $m\geq0$. Тогда

$$\begin{cases} 2n=m+2 \\ n^2-2{,}5m=19 \end{cases} \qquad \begin{cases} m=2n-2 \\ n^2-5n+5=19 \end{cases}$$

$$n^2-5n-14=0$$

$$D=25+56=81$$

$n_1=\frac{5-9}{2}<0$ не подходит, т. к. $n\geq0$

$$n_2=\frac{5+9}{2}$$

$$n=7$$

$$m=2n-2=14-2=12$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ x^2y^2=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=7-y^2 \\ y^2(y^2-7)+12=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=7-y^2 \\ y^4-7y^2+12=0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt{3};2)$; $(2;\sqrt{3})$; $(-2;\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};-2)$; $(-\sqrt{3};2)$; $(2;-\sqrt{3})$; $(-2;-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-2)$.

Чистовик

лист 2.

№5

1) Поскольку всего различных карточек может быть 16^2, и все (16² штук) карточки фокусника различны, значит, у него есть ровно одна карточка каждого вида.

2) Поскольку в этой задаче неважно, в каком порядке фокусник вытаскивает карточки, и среди вытащенных есть хотя бы один дубль, можно считать, что первая вытащенная карточка будет дублем. ~~Вероятность~~ Кол-во способов вытащить дубль равно

~~$\frac{N_{дубл.}}{N_{карт.}} = \frac{16}{16^2} = \frac{1}{16}$.~~ $N_{дубл.} = 16$

3) После этого фокуснику нужно, чтобы число, ~~находящееся~~ написанное на вытащенном дубле, не встретилось на второй карточке. Для этого и на красной, и на синей стороне должно быть написано одно из 15 оставшихся чисел. Поскольку уже вытащенная карточка очевидно этому условию не удовлетворяет, таких карточек осталось 15^2. Т. е. ~~Верот~~ ~~Вероятность~~ кол-во способов вытащить „правильную" вторую карточку равно 15^2.

~~$\frac{N_{нужн.}}{N} = \frac{15^2}{16^2}$~~ 4) Тогда кол-во способов вытащить две „правильные" карточки равно:

$16 \cdot 15^2 = 4 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 \cdot 100 = 3600$

Ответ: 3600.

Чистовик

лист 4.

9) $\cancel{AD} = a$

$\cancel{AD} = 5$ (по усл.) $\Rightarrow a = 5$

10) $BC = b - (a - b) = 2b - a = 2b - 5$

$BC = 3$ (по усл.) $\Rightarrow 2b - 5 = 3 \Rightarrow b = 4$

11) $AB^2 = a^2 - 2ab + 4b^2 = 25 - 40 + 64 = 49 \Rightarrow AB = 7$

12) $\triangle ABT$ — р/с (из п. 8) $\Rightarrow S_{\triangle ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

13) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot b\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$

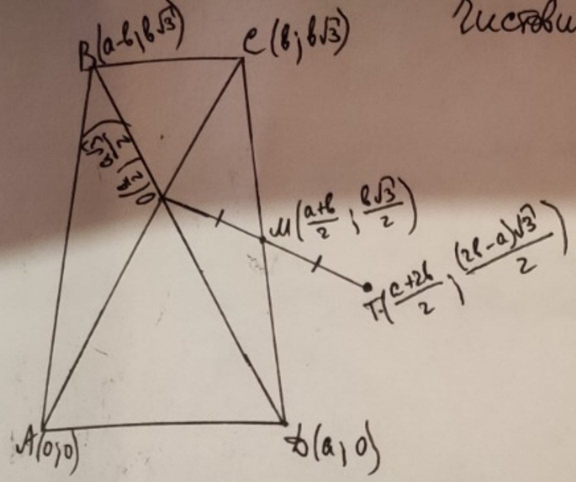
14) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{49\sqrt{3}}{4}}{16\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$

Ответ: 49:64.

211006142 (U884424 M1277679)

Чистовик. №6 Лист 3.

M – сер. [CD]



а) Д-ть: $\triangle ABT$ – р/с.

б) $BC=3$; $AD=5$.

Найти: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$

Р-ие:

а)

1) Введём систему координат: $A(0;0)$
O_x совпадает с $\vec{AD}$
$D(a;0)$
$C(b;y_c)$.

2) $\triangle AOD$ – р/с $\to h_{\triangle AOD} = \frac{a\sqrt3}{2}$. Значит, $O\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt3}{2}\right)$. Заметим, что $\angle CAD = \angle BCA$ ($=60°$) $\Rightarrow AD \parallel BC$.

3) $k_{AO} = \frac{a\sqrt3}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt3$, т.е. $\frac{y_c-0}{b-0} = \sqrt3 \Rightarrow y_c = b\sqrt3$, т.е. $C(b; b\sqrt3)$ (т.к. $B \in (AO)$)

4) $AO = OD$ (т.к. $\triangle AOD$ – р/с)
$BO = OC$ (т.к. $\triangle BOC$ – р/с) $\Rightarrow AC = BD \Rightarrow$ [ABCD – р/б трап. ($BC \parallel AD$); ABCD – п/р] ; т.е. $AB = CD$.

5) $k_{OD} = \frac{a\sqrt3}{2} : \left(-\frac{a}{2}\right) = -\sqrt3$; $D(a;0) \in (OD)$. Значит, можно найти ур-ие OD по точке и угловому коэфф-ту:

$y = -\sqrt3(x-a) \Leftrightarrow y = -\sqrt3 x + \sqrt3 a \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt3 a - y}{\sqrt3}$

Заметим, что $y(B) = y(C) = b\sqrt3$ (т.к. $BC \parallel AD$). Значит, $x(B) = \frac{\sqrt3 a - b\sqrt3}{3} = a-b$

6) M – сер. [CD] (по усл.), т.е. $M\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b\sqrt3}{2}\right)$

7) Пусть $T(x_T; y_T)$. Заметим, что M – сер. [OT]. Значит:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + x_T\right) \\ \frac{b\sqrt3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt3}{2} + y_T\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_T}{2} = \frac{a+b}{2} - \frac{a}{4} \\ \frac{y_T}{2} = \frac{b\sqrt3}{2} - \frac{a\sqrt3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x_T = \frac{a+2b}{2} \\ y_T = \frac{(2b-a)\sqrt3}{2} \end{cases}$$

То есть, $T\left(\frac{a+2b}{2}; \frac{(2b-a)\sqrt3}{2}\right)$

8) $AB^2 = (a-b)^2 + 3b^2 = a^2 - 2ab + 4b^2$

$BT^2 = \frac{(a-4b)^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{4a^2 - 8ab + 16b^2}{4} = a^2 - 2ab + 4b^2$

$AT^2 = \frac{(a+2b)^2}{4} + \frac{3(2b-a)^2}{4} = \frac{a^2 + 4ab + 4b^2 + 3a^2 - 12ab + 12b^2}{4} = a^2 - 2ab + 4b^2$

$\Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – р/с (по опред.)
(т.к. $AB>0$, $BT>0$, $AT>0$)