Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

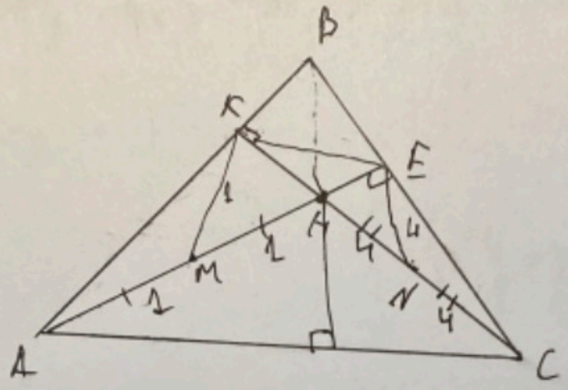
Шифр: **211006072**

ID профиля: **124090**

Вариант 16

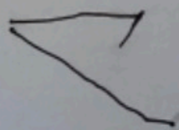
ЧЕРНОВИК

ЧЕРНОВИК

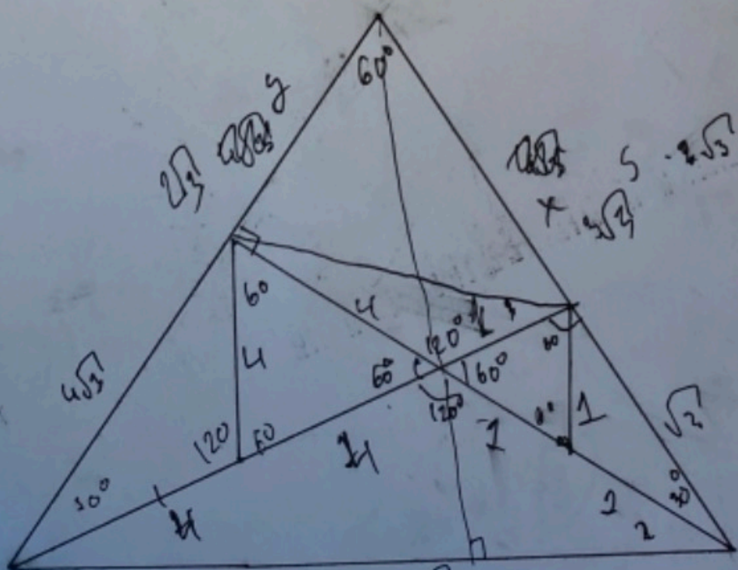


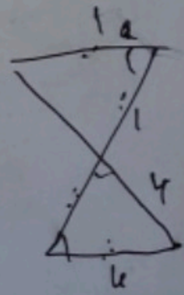
∠AK
$S_{\triangle ABC}$
R-?

$6 \cdot 24\sqrt{3}$
$24\sqrt{3}$



$6 \cdot 3\sqrt{3}$





$5 \cdot 2\sqrt{3}$

$2x = y + 4\sqrt{3}$
$2y = x + \sqrt{3}$
$x = \sqrt{3} + 2y$
$4y - 2\sqrt{3} = y + 4\sqrt{3}$
$y = 2\sqrt{3}$
$x = 3\sqrt{3}$

$2\sqrt{21}$

64−16
48

$a^2 + a^2 + a^4$

$6^2 + 2^2 + 16$

$\sqrt{84}$
$2\sqrt{21}$

64
20

211006072 (U124090 M1273607)

ЧЕРНОВИК

$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$

$x = 3$

-1

$|x - y + 2a| \quad |x - 2y + 5a|$

5

$(ax - (2a^2 + 1))^2 + (ay + a)^2$

$x + y = -4$

$a^2x^2 - 4a^3x - 2ax + (4a^4 + 4a^2 + 1) +$

$\boxed{xy = 5}$

$+ a^2y^2 + 2a^2y + a^2$

$(x - y - 2a)^2$

$(x$

$4a^4 + 5a^2 + 1$

$-1 \quad -1$

$-4,5$

$-0,5$

$y^2 + 5a^2 - 4ax$

$\boxed{\frac{2a^2+1}{a}}; -1$

$xy = 2$

$x + y = -2$

S/M

$2a + \frac{1}{a}$

$(x - y)^2$

$2 \cdot 4$

S_{MN}/M

$-/S$

CCK

8

$x - y$

$-1N$

$(x - y)(x - 2y$

211006072 (U124090 M1273607)

ЧЕРНОВИК

$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$

$\Sigma a_i + 34 a_1 = 592$

$\Sigma a_i + 15 a_n = 592$

$34 a_1 = 15 a_n$

$a_1 = 15$

15 34

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ \times\, 35 \\ 15 \\ \hline 175 \\ 35 \\ \hline \boxed{525} \end{array} \qquad \cancel{\begin{array}{r} \times\, 56 \\ 15 \\ \hline 540 \end{array}}$$

211006072 (U124090 M1273607)

ЧЕРНОВИК

$(x-y-2a)^2+(y+a)^2=0$

$x=y+2a$

$y=-a$

$\boxed{x=a}$

$\frac{2a^2+1}{a}$

$a>3$ $a<3$

$\frac{2a^2+1}{a}<3$ $\frac{2a^2+1}{a}>3$

$2a^2$ [illegible]

$\cancel{2a^2-3a+1=0}$

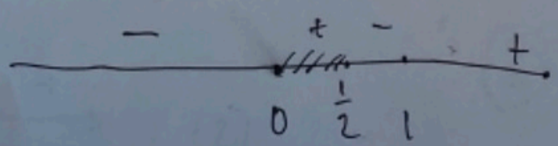
$\cancel{(2a-1)(a-1)}$

$\frac{(2a-1)(a-1)}{a}$? 0

18

17

3



Чистовик

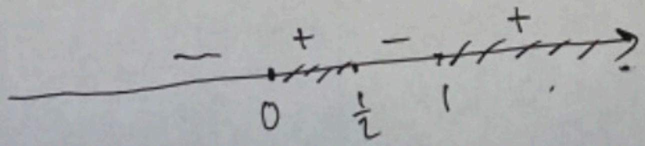
№3 стр 2/2

а => у одного коорд <3 и другого >3

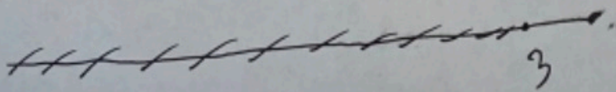
I $a<3$ (1); $\frac{2a^2+1}{a}>3$ (2)

$$\frac{2a^2+1}{a}>3 \qquad \frac{2a^2-3a+1}{a}>0$$

$$\frac{(2a-1)(a-1)}{a}>0$$



(2) условие

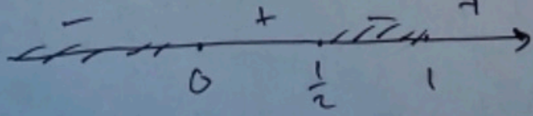


(1) условие

=> $a\in(0;\frac{1}{2})\cup(1;3)$

II $a>3$ (1); $\frac{2a^2+1}{a}<3$ (2)

7



(2)

(1)

таких а нет => Ответ: $a\in(0;\frac{1}{2})\cup(1;3)$

21100672 (U124090 M1273607)

черновик

№3 стр 1 / 2

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=$

$= (x-y-2a)^2+(y+a)^2$

$x^2+y^2+4a^2+4ay-2xy-4ax$ $\quad y^2+2ay+a^2$

$(x-y-2a)^2+(y+a)^2=0$ $\quad (x-y-2a)^2\geq 0$ и $(y+a)^2\geq 0$

$\Rightarrow x-y-2a=0$

и $y+a=0$

$y=-a$

$x=a$ $\Rightarrow$ коорд. по „x" у $A=a$

$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=$

$=(ax-(2a^2+1))^2+(ay+a)^2+f(a)$

ф-я от a

$(f(a)=-R^2)$

$\Rightarrow$ центр окр. $\left(\frac{2a^2+1}{a};-\frac{a}{a}\right)$

по „x" у B – $\frac{2a^2+1}{a}$

6

211006072 (U124090 M1273607)

Частовик

№2 стр 212

I $n=3$

=> числа:

$\{15; 33; 34\}$

Проверка:

$15 \cdot 35 + 33 + 34 = 525 + 67 = 592$

$$\begin{array}{r} \times\, 15 \\ 35 \\ \hline 175 \\ 45 \\ \hline 525 \end{array}$$

$15 + 33 + 34 \cdot 16 =$ ~~48~~ $48 + 544 = 592$ D

$$\begin{array}{r} \times\, 34 \\ 16 \\ \hline 204 \\ 34 \\ \hline 544 \end{array}$$

II $n=4$

$a_2 + a_3 = 33$

a_2 и $a_3 \geq 15$

$a_2 \leq a_3$

=> ~~$a_2 = 15$ и $a_3 = 18$~~ ~~$\{15$~~

$a_2 = 16$ и $a_3 = 17$ $\{15; 16; 17; 34\}$ - подходит

5

Ответ: $\{15; 33; 34\}$ и $\{15; 16; 17; 34\}$

211006072 (U124090 M1273607)

Чистовик

№2 стр 1/2

Пусть у нас числа $a_1 \le a_2 \dots \le a_n$ (в пор. возр.)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + 34a_1 = 592 \quad (1)$$

к первому прибавили его на $\cdot 34$, $=$" увел. в 35 раз

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + 15a_n = 592 \quad (2)$$

$34a_1 = 15a_n$ (из (1) вычесть (2) $34a_1 - 15a_n = 0$)

$34a_1 \vdots 15$ (числа все нат)

$a_1 \vdots 15$

Если $a_1 \ge 30$, то $35 \cdot a_1 > 900 \Rightarrow$ не могло получиться 592

$\Rightarrow a_1 = 15$

$\Rightarrow a_n = 34$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i + 34 \cdot 15 = 592$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 15 \\ \hline 170 \\ 34 \\ \hline 510 \end{array}$$

4

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 82$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} a_i = 82 - 15 - 34 = 33$$

$\sum_{i=2}^{n-1} a_i \ge (n-2)\,a_1 \Rightarrow$ $33 \ge (n-2) \cdot 15$

$\Rightarrow n \le 4$ ($n \ge 3$, т.к. Σ без 1 и посл $\ne 0$)

211006072 (U124090 M1273607)

№1 стр 213 чистовик

Нетрудно заметить, что $\triangle AHC$ в 2 раза больше $\triangle HFE$

$\Rightarrow \frac{FE}{AC} = \frac{1}{2}$

Посчитаем AF и EC по Т пифагора

$AF = \sqrt{AH^2 - FH^2} = \sqrt{3}$ из $\triangle AFH$

$EC = \sqrt{HC^2 - HE^2} = \sqrt{64-16} = 4\sqrt{3}$

из $\triangle EHC$

$\frac{BE}{AF+FB} = \frac{BF}{BE+EC} = \frac{1}{2}$

$2BE = AF + FB = \sqrt{3} + FB$

$2BF = BE + EC = 4\sqrt{3} + BE$

$BE = 2BF - 4\sqrt{3}$

$2 \cdot (2BF - 4\sqrt{3}) = \sqrt{3} + FB$

$3FB = 5\sqrt{3}$

$FB = 3\sqrt{3}$

$BE = 2\sqrt{3}$

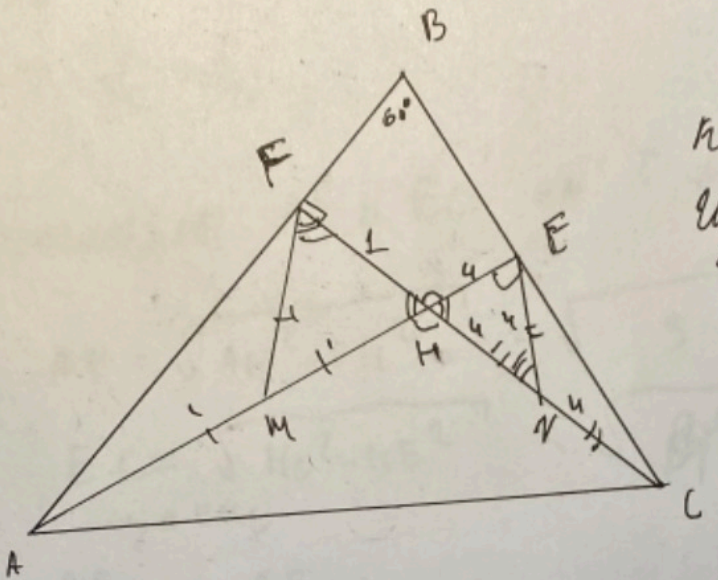
$AB = AF + BF = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$S_{ABC} = FC \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$

2

Чистовик

№1 №1 стр 1 / 3



В прямоуг. Δ медиана к гипот. равна половине гипот

$\angle AFC = 90° и \angle AEC = 90°$

$\Rightarrow AM = MH = FM = 1$

$HN = NC = EN = 4$

$FM \parallel EN \Rightarrow^{*} \Delta MFH \sim \Delta ENH$

$\Rightarrow \frac{MF}{EN} = \frac{FH}{NH} \quad \frac{1}{4} = \frac{FH}{4} \Rightarrow FH = 1$

($\overset{*}{\Rightarrow}$ - $\angle MFH = \angle HNE$ по II и $\angle FHM = \angle EHN$ - подобие по 2м углам)

Аналогично $EH = 4$

$\Rightarrow FHM$ - правильный $\Rightarrow \angle MHF = 60° \Rightarrow \angle FHE = 120°$

сумма углов 4-х уг $= 360°$ ⇒ $\angle$ 4х угольник BEHF

$\underset{BFH}{90°} + \underset{BEH}{90°} + \underset{FHE}{120°} + \angle B = 360° \Rightarrow \angle B = 60°$

Так как CF и AE - высоты, то $ABC \sim \Delta EBF$

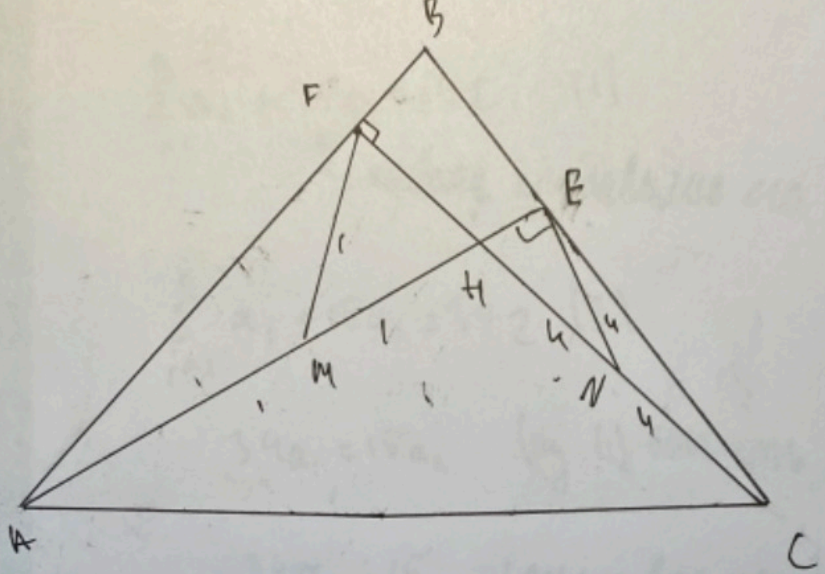
$\frac{BE}{AB} = \frac{BF}{BC} = \frac{FE}{AC}$

1

211006072 (U124090 M1273607)

Черновик

№1 стр 3/3



$R = \frac{A\cancel{B}C}{\sin(B)} \cdot \frac{1}{2}$ — из Т. синусов

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2 - 2\cos(AHC)\, AH \cdot HC} =$

$= \sqrt{\underset{4}{2^2} + \underset{64}{8^2} + \underset{16}{2 \cdot 8}} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

$R = \frac{2\sqrt{21}}{\sin(60°)} = \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{7}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$; $R = 4\sqrt{7}$

3

211006072 (U124090 M1273607)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006072**

ID профиля: **124090**

Вариант 16

1.

Чистовик

№4 стр 1/2

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=15$

$x^2=a$

$y^2=b$

$a+b=p$

$ab=q$

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2-\frac{ab}{2}=15$

$2p-q=2$

$p^2-2q-\frac{q}{2}=15$

$q=2p-2$

$p^2-5p+5=15$

$p^2-5p-14=0$

$(p-7)(p+2)=0$

$p=a+b=x^2+y^2 \Rightarrow p\geq 0$

$\Rightarrow p\neq -2 \Rightarrow p=7$ и $q=12$

1

Чистовик

№4 стр 2 / 2

$$\left.\begin{array}{l} a+b=7 \\ ab=12 \end{array}\right\}$$ по т. Виета это ур-ие имеет ровно 1 корень с точностью до перестановки.

$a=3$, $b=4$ или $b=3$, $a=4$

$x^2=3$ $\quad x^2=4$

$y^2=4$ $\quad y^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

$y=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

$\Rightarrow$ ответы: $(\sqrt{3}; 2)$; $(\sqrt{3}; -2)$; $(-\sqrt{3}; 2)$; $(-\sqrt{3}; -2)$ и такие же наоборот $((2; \sqrt{3}) \ldots)$

2

211006072 (U124090 M1273608)

Чисто ВАК

№5 стр 1/1

Заметим, что всевозможных карточек 16^2

16 вар. на синий и 16 вар на красный

=> у фокусника все карты

Рассмотрим подходящую пару

A B. Разделим их на 2 типа

A и B – дубли или только одна из них дубль (2)

Посчитаем способы A и B – дубли, (1)

Выбрать 1 дубль – 16 вар., выбрать второй

16 − 1 (один выбран)

и AB, и BA мы считаем за равны

=> итоговое число: $\frac{16\cdot15}{2}$ (и любая пара дубл. подх.)

Посчитаем способы где Н/О A – дубль, и B – нет (2)

Заметим, что нам подходят все карты цвета на кот. нет цвета с A (он там 1)

=> карт B – $15\cdot14$ (B: не дубль и нет цвета от A), выбрать A – 16 способов (1 и 2 тип не пересек.)

=> всего способов $\frac{16\cdot15}{2} + \underbrace{16\cdot15}_{240}\cdot14 = 8\cdot15 +$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 14 \\ \hline 96 \\ 24 \\ \hline 336 \end{array}$$

$= 120 + 3360 = 3480$

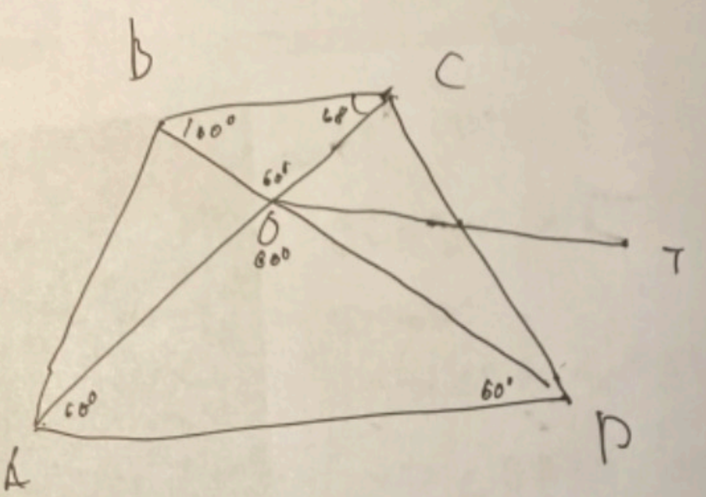
Ответ: 3480

3

211006072 (U124090 M1273608)

Чистовик

№6 стр112



Заметим, что BC || AD ($\angle CBD = \angle BDA = 60°$)

А так же $\triangle BOA$ и $\triangle COD$ равны

BO=OC
AO=OD
$\angle BOA = \angle COD$

=> ABCD – р/б трапеция => ABCD – окружн

$\angle CTD$, он равен $\angle COD$ (O и T симм. отн серед. CD)

=> $\angle CTD = 120°$

Заметим, что B и T по разную сторону от CD

и $\underbrace{\angle CBD}_{60°} + \underbrace{\angle CTD}_{120°} = 180°$ => BCTD – окр =>

=> ABCTD – окр => $\angle BTA = \angle BCA$ (опир. на одну дугу) => $\angle BTA = 60°$

4

211006072 (U124090 M1273608)

№6 стр 2/2

$OC = DT$, т.к. T симм. отн сер CD точке O

$BC = BC$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle TAD$ $(BC = DT)$

$\Rightarrow \angle BAT = \angle CAD - \angle TAD + \angle BAC = \angle CAD = 60^\circ$

$\Rightarrow$ в $\triangle ABT$ – 2 угла по 60° ($\angle T$ и $\angle A$) $\Rightarrow$ он правильный

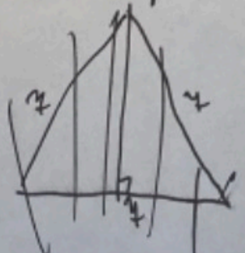
б) Найдем AB по т. косинусов

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2 - 2\cos 120^\circ \, AO \, BO} = \sqrt{\underset{25}{5^2} + \underset{9}{3^2} + 15} =$$

($AO = OD = AD = 5$ и $BO = BC = CO = 3$)

$= \sqrt{49} = 7$

ABT – правильный $\Rightarrow$ его площадь $\left(\frac{\sin \angle BCT}{2}\right)$ $\frac{\sin 60^\circ \cdot 7 \cdot 7}{2} =$



$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 49$

высота из O на BC

из O на AD

площадь $ABCD \Rightarrow \frac{BC + AD}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} OB + \frac{\sqrt{3}}{2} OD\right) =$

вся длина отрезка $\perp$ BC и AD

$= 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

5

Ответ: $\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 49}{16\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$

211006072 (U124090 M1273608)

ЧЕРНОВИК

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=15$

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ \cancel{8a} \\ a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=15 \end{cases}$$

$\frac{2x^2+2y^2}{2} \geq$

$x^2+y^2 \geq 2xy$

$ab=2a+2b$

$a^2+b^2 \cancel{\quad} +1-a-b=15$

$\therefore \boxed{a^2+b^2-a-b=18}$

$2a+2b-ab=2$

$2a+2b-ab=2$

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=15$

$a^2+b^2-a-b=18$

$a+b=1+\frac{ab}{2}$

$a^2+2ab+b^2=1+ab+\frac{a^2b^2}{4}$

$1{,}5ab=18+$

16^2

1

$\boxed{\frac{a}{a}}$

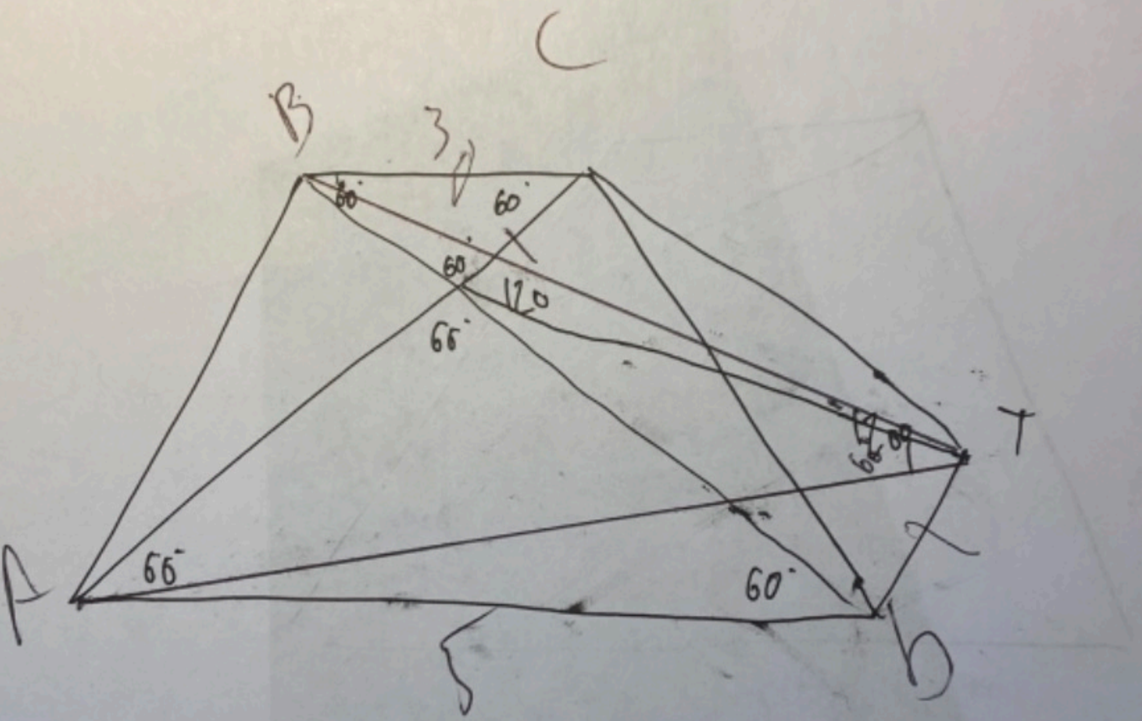
1

$(16\cdot 15\cdot 14)+\cancel{16\cdot 15}$

$16\cdot 15\cdot 15$

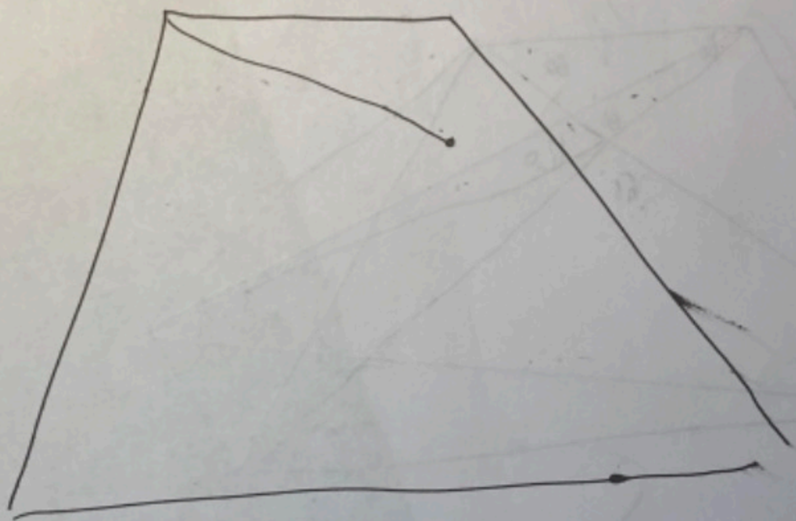
211006072 (U124090 M1273608)

ЧЕРНОВИК



211006072 (U124090 M1273608)

ЧЕРНОВИК



ЧЕРНОВИК

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$

x^4+y

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19$

$\frac{1}{1}$ $\frac{15}{15}$

$\frac{1}{1}$ $\frac{2}{2}$

x^2+y^2

12 24 -

6
12

3·3·3
3

66

$2a+2b-ab=2$

$a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19$

$a^2+b^2-a-b=18$

$a^2-a=6$

ЧЕРНОВИК

$x^2+y^2-\frac{x^2y^2}{2}=1$

$x^4+y^4-\frac{x^2y^2}{2}=19$

1.8

a^2+b^2-a-b

$a^2-a=9$

1	1
9	3
16	4
25	5

$a^2-a-5=0$

$1 \pm \sqrt{1+36}$

$2x^4+2y^4-x^2y^2=38$

+36

$2x^2+2y^2-1=38$

ЧЕРНОВИК

ab

+

$(a-b+1)(b-a+1)$

$2a$

$2\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 =$

a^2-a

$2a+2b=2+ab$

$a^2+b^2=15+\frac{ab}{2}$

$2 \cdot a+b=1+\frac{ab}{2}$

$a^2+b^2=15+\frac{ab}{2}$

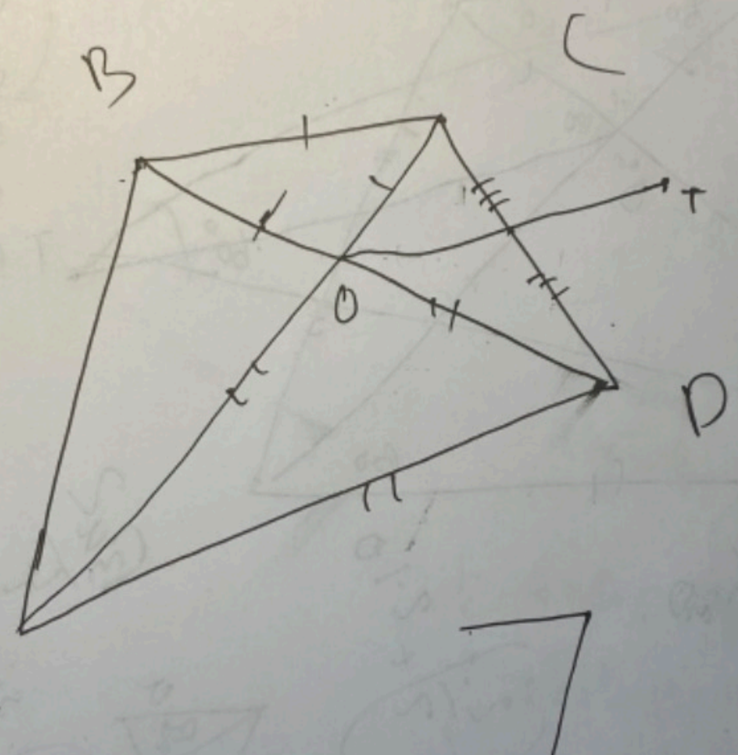
$\cancel{(a-b+1)^2}$

$2ab$

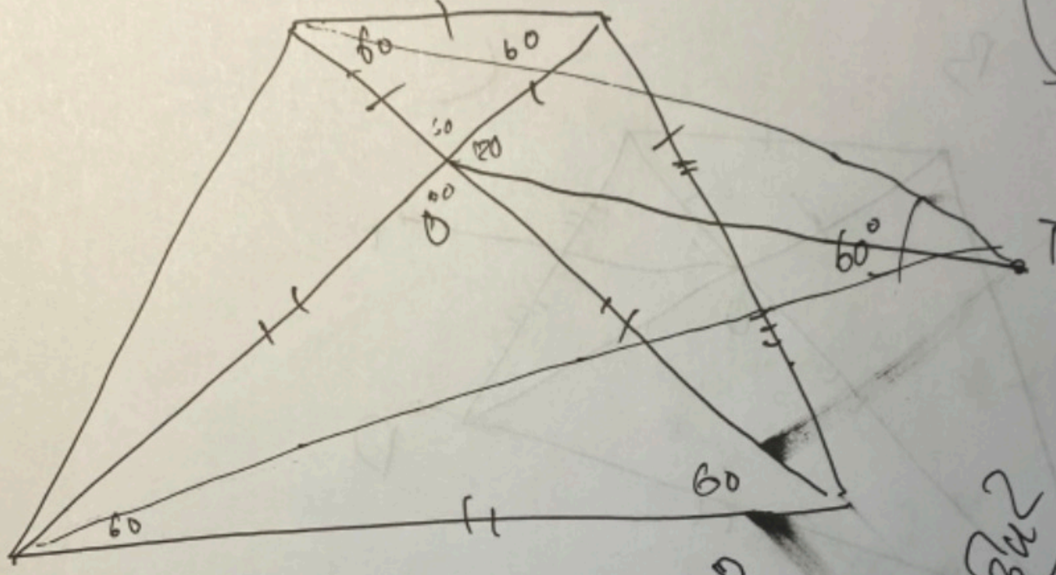
$2a$

$2b$

ЧЕРНОВИК



ЧЕРНОВИК



211006072 (U124090 M1273608)

ЕРНОВИК.

ЧЕРНОВИК

$2a^2+2b^2-ab=2$

$2a^2+2b^2-ab=38$

$6+8-3\cdot4$

$9+16-8$

$2x-y=2$

$2(x^2-2y)-y=38$

$2x^2-5y=38$

$y=2x-2$

$a+b=7$

$ab=12$

$a=3$

b

$2x^2-10x+10=38$

$2x^2-10x-28=0$

$x^2-5x-14=0$

$(x-7)(x+2)=0$

211006072 (U124090 M1273608)