Часть 1

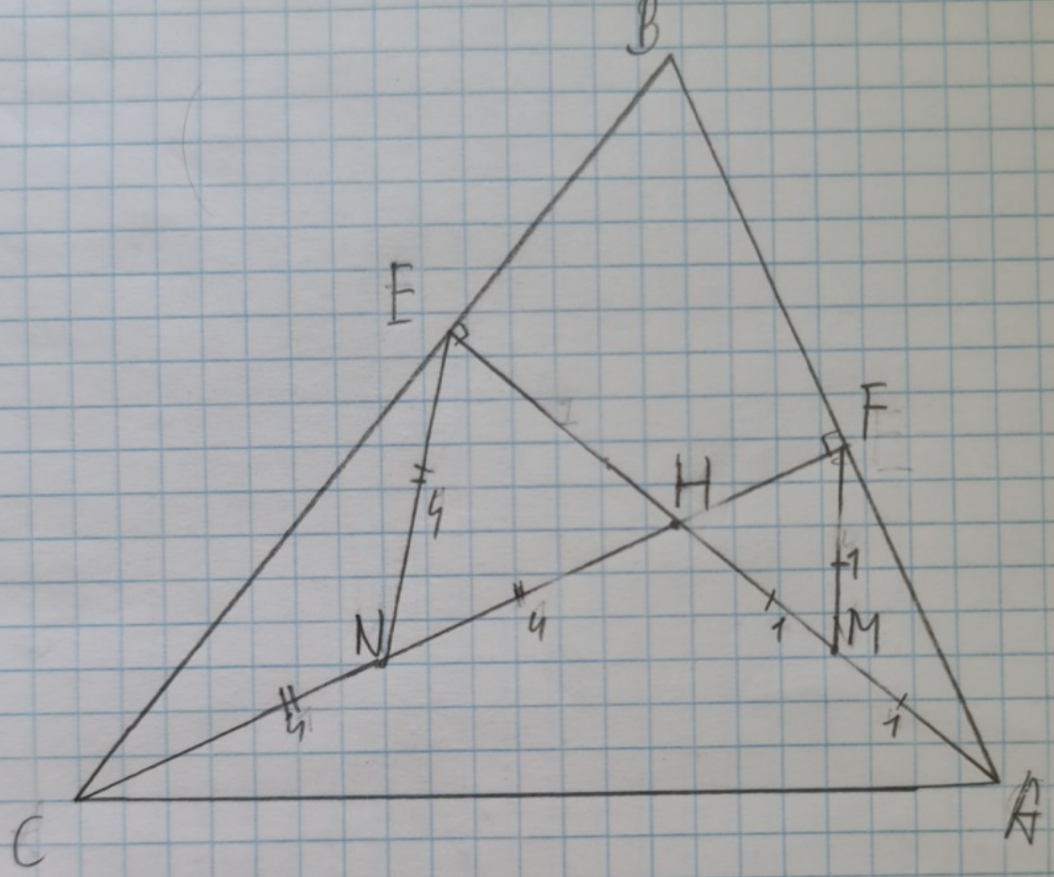
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005976**

ID профиля: **826592**

Вариант 16

Черновик



211005976 (U826592 M1276502)

Чорновик.

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n$

$35x_1 + x_2 + \ldots\ x_n = 592$

$x_1 + x_2 + \ldots + 16x_n = 592$

17

$34x_1 - 15x_n = 0$

$34x_1 = 15x_n$

$17 \cdot 2 \cdot x_1 = 3 \cdot 5 \cdot x_n$

$15 \leq x_1$

$34 \leq x_n$

$34 \cdot 16 = 544$ $\quad 15 \cdot 35 = 525$ $\quad 592 : 35$ $\quad 35 \cdot 7 = 245$ $\quad 35 \cdot 17 = 595$

$592 : 16 = 37$ $\quad 16 \cdot 3 = 48$ $\quad 16 \cdot 7 = 112$

$17 \cdot 2x_1 = 3 \cdot 5 x_n$ 1

$15 \leq x_1$

$34 \leq x_n$

$35 \cdot 17 = 595 > 592 \Rightarrow x_1 = 15$ или $x_1 = 16$

$16 \cdot 37 = 592 \Rightarrow 34 \leq x_n < 37$

1) $x_1 = 15$

$16 \cdot 15 = 240$ $\quad 35 \cdot 15 = 525$ $\quad 592 - 525 = 67$

$592 - 525 = 67$

2) $x = 16$

$35 \cdot 16 = 560$ $\quad 592 - 560 = 32 < 34$ $\quad 16 + 17$

$17 + 15 = 32$ $\quad 592 - 560 = 32$, $32 - 15$

$36 \cdot 16 = 576$ $\quad 592 - 576 = 16$ $\quad 34 \cdot 16 = 544$ $\quad 592 - 544 = 48$

211005976 (U826592 M1276502)

Черновик

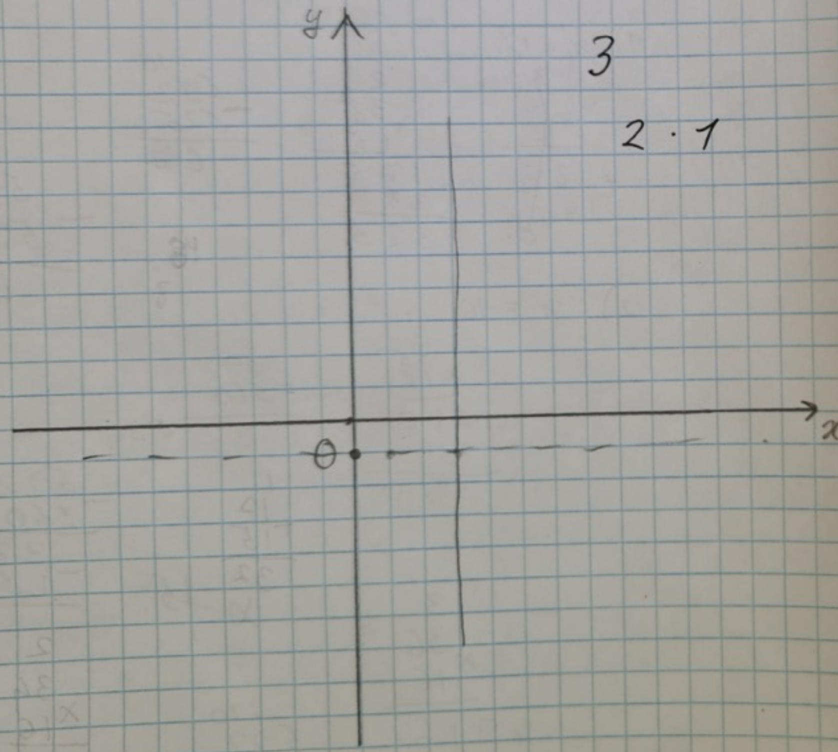
Черновик.

$A(x; y)$ $5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$\omega(B; r)$ $a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 = 0$

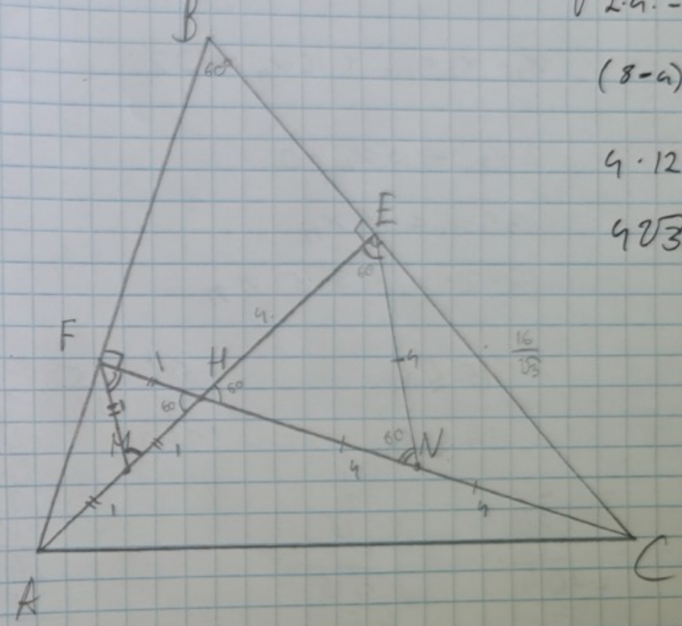
$x^2 - 2xy + 2y^2 + 5a^2 - 4ax + 6ay = 0$

$x = 3$



3

2 · 1



$\frac{\cancel{2} \cdot \cancel{8}2}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot 3} \cdot \sqrt{3}$

$\sqrt{2^2 \cdot 4^2 - 4^2}$

$(8-4)(8+4)$

$4 \cdot 12$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{x}$

$x = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$4\sqrt{3}$

$4 \cdot 12$

36

$6^2 + 4^2 \cdot 3 = 2^2(3^2 + 2^2 \cdot 3) =$

$= 2^2(9 + 12) =$

$= 2^2 \cdot 21$

Черновик

$$x^2-2xy+2y^2+5a^2-4ax+6ay=0.$$

если $a=0$, то

$$x^2-2xy+2y^2=0.$$

$$(x-y)^2=0$$

$$x=y.$$

$$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0.$$

$1=0$ – ложь.

II

$a\neq 0.$

$$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0.$$

$$a^2x^2-4a^3x-2ax.$$

$$a(ax^2-4a^2x-2x)\qquad -2a(2a^2+1).$$

$$ax(ax-4a^2-2).$$

$$a^2x^2-(4a^3+2a)x+a^2y^2-2a^2y+4a^4+1=0$$

$$(ay-a)^2=.$$

Черновик

$(x-x_0)^2$

$x=x_0$

$(ay+a)^2 = \underline{a^2y^2} + \underline{2a^2y} + a^2$

$(ax-2a^2)^2 = \underline{a^2x^2} - \underline{4a^3x} + \underline{4a^4}$

$(ax-2a^2)^2 + (ay+a)^2 - a^2$

$(ax-(2a^2+1))^2 = a^2x^2 - 2a(2a^2+1)x + (2a^2+1)^2 =$

$= \underline{a^2x^2} - \underline{4a^3x} - \underline{2ax} + \underline{4a^4} + \underline{4a^2} + \underline{1}$

$(ax-(2a^2+1))^2 + (ay+a)^2 - a^2 - 4a^2 = 0.$

$(ax-(2a^2+1))^2 + (ay+a)^2 = 5a^2.$

$a^2\cdot\left(x - \frac{2a^2+1}{a}\right)^2 + a^2(y+1)^2 = 5a^2.$

$\left(x - \frac{2a^2+1}{a}\right)^2 + (y+1)^2 = 5.$

$x_B = \frac{2a^2+1}{a}, \quad y_B = -1.$

Черновик

$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0.$

$\cancel{5a}$ $5a \cdot (-a)$

$2y^2 - (2x - 6a)y + x^2 - 4ax + 5a^2 = 0.$

$2y^2 - \cancel{2}(x - \cancel{6}3a)y + (x+a)(x-5a) = 0.$

$2x + 2a + 2x - 5a.$

$4x - 3a.$

$2x - 6a.$

$x^2 - 6ax + 9a^2 - 2x^2 + 8ax - 10a^2.$

$-x^2 + 2ax - a^2.$

$x^2 - 2ax + a^2$

$(x-a)^2$

$y_{1,2} = \frac{2x - 6a \pm (x-a)}{2}.$

$y_1 = \frac{2x - 6a - x + a}{2} = \frac{x - 5a}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}a$

$y_2 = \frac{2x - 6a + x - a}{2} = \frac{3x - 7a}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}a.$

211005976 (U826592 M1276502)

Чистовик

N3

3) а) если $x_A < 3$, т.е A левее прямой $x=3$,
$a < 3$

то B правее прямой $x=3$

т.е $3 < \frac{2a^2+1}{a}$

$3a < 2a^2+1$

$2a^2 - 3a + 1 > 0$

$2(a-1)(a-\frac{1}{2}) > 0$

$(a-1)(a-\frac{1}{2}) > 0$

$a \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$

т.к $a < 3$, то $a \in (1;3) \cup (-\infty; \frac{1}{2})$

б) если $x_A > 3$, то $\frac{2a^2+1}{a} < 3$
$a > 3$

$3 > \frac{2a^2+1}{a}$

$3a > 2a^2+1$

$2a^2 - 3a + 1 < 0$

$(a-1)(a-\frac{1}{2}) < 0$

$a \in (\frac{1}{2}; 1)$

но $a > 3$ $\Rightarrow \varnothing$

Ответ: $a \in (1;3) \cup (-\infty; \frac{1}{2})$

6

N3 Чистовик

1) Рассмотрим уравнение ω:

$$(a^2x^2-4a^3x-2ax+4a^4+1)+(a^2y^2+2a^2y)=0$$

① ②

① : $(ax-(2a^2+1))^2=a^2x^2-2a(2a^2+1)x+(2a^2+1)^2$
$=a^2x^2-4a^3x-2ax+4a^4+1+4a^2$

⇓

$$① = (ax-(2a^2+1))^2-4a^2$$

② $(ay+a)^2=a^2y^2+2a^2y+a^2$

⇓

$$② = (ay+a)^2-a^2$$

Получим уравнение ω:

$$(ax-(2a^2+1))^2+(ay+a)^2=5a^2$$

$$a^2\left(x-\frac{2a^2+1}{a}\right)^2+a^2(y+1)^2=5a^2$$

*если $a=0$, то, подставив 0 в исходное уравнение ω, получим $1=0$ - ложь, $\Rightarrow a\neq0$.

Тогда $\left(x-\frac{2a^2+1}{a}\right)^2+(y+1)^2=5$

т.е. $B(x_B;y_B)$: $x_B=\frac{2a^2+1}{a}$

2) Рассмотрим ~~II~~ уравнение относит. y:

$$2y^2-2xy+x^2+6ay-4ax+5a^2=0$$

$$2y^2-(2x-6a)y+x^2-4ax+5a^2=0.$$

$$2y^2-2(x-3a)y+x^2-4ax+5a^2=0$$

$$D_1=(x-3a)^2-2(x^2-4ax+5a^2)$$

$$D_1=x^2-6ax+9a^2-2x^2+8ax-10a^2$$

$$D_1=-x^2+2ax-a^2=-(x^2-2ax+a^2)=-(x-a)^2$$

$D_1\geq0$, $-(x-a)^2\leq0$ $\Rightarrow$ $(x-a)^2=0$.
$x=a$

т.е. $A(x_A;y_A)$: $x_A=a$

N2 Черновик

б) если $x_n = 35$, то $16 \cdot x_n = 16 \cdot 35 = 560$

$592 - 560 = 32 = \text{сумма } x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$

$- \quad x_1 = 15$

$x_2 + \ldots + x_{n-1} = 17$

если 17 - сумма хотя бы 2-х натур-ных членов, то по принципу Дирихле хотя бы один из них ≤ 8, т.е. $< x_1$

$\Downarrow$

$17 = x_2$

Получим: $x_1 = 15$

$x_2 = 17$

$x_3 = x_n = 35$

Проверка: $15 \cdot 35 + 17 + 35 = 16 \cdot 35 + 17 = 560 + 17 = 577 < 592$

противоречие

$\Downarrow$

$x_n = 34$

г) $x_1 = 15$

$x_n = 34$

$34 \cdot 16 = 544$

$592 - 544 = 48 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$

$48 - 15 = 33 = x_2 + \ldots + x_{n-1}$

а) если $33 = x_2$, то $x_1 = 15$, $x_2 = 33$, $x_3 = 34$.

проверка: $15 \cdot 35 + 33 + 34 = 525 + 67 = 592$ - верно

$15 + 33 + 34 \cdot 16 = 48 + 544 = 592$ - верно

б) если $33 = x_2 + x_3 + x_4$, то по принципу Дирихле ~~то~~ хотя бы один из членов ≤ 11, т.е < 15 - противоречие

в) если $33 = x_2 + x_3$, то $15 < x_2 < x_3$ $\Rightarrow$ x_2 хотя бы 16, x_3 хотя бы 17

$16 + 17 = 33$ $\Rightarrow$ $x_2 = 16$, $x_3 = 17$

Проверка: аналог п.(а)

Ответ: 15; 33; 34 или 15; 16; 17; 34.

4

211005976 (U826592 M1276502)

N2 Чистовик

1) Упорядочим все числа на доске:

$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$

По условию:
$$\begin{array}{r} 35x_1 + x_2 + \dots x_n = 592 \\ - \quad x_1 + x_2 + \dots 16x_n = 592 \\ \hline 34x_1 - 15x_n = 0 \end{array}$$

$34x_1 = 15x_n$

$x_1 \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $34x_1 \in \mathbb{N}$, $15x_n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $34x_1 \vdots 15$, $15x_n \vdots 34$

т.к. 34 и 15 взаимно просты, то $x_1 \vdots 15$, $x_n \vdots 34$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$x_1 \leq 15$~~ $15 \leq x_1$

~~$x_n \leq 34$~~ $34 \leq x_n$

2) если $x_1 = 17$, то $17 \cdot 35 = 595 > 592$ — противоречие условию $\Rightarrow x_1 \leq 16$

3) если $x_n = 37$, то $16 \cdot 37 = 592$, то тогда 37 — одновр. и самое маленькое число, но из (п. 2) оно должно быть ≤ 16

$\Downarrow$

$34 \leq x_n \leq 36$

4) если $x_1 = 16$, то $16 \cdot 35 = 560$

$592 - 560 = 32$ — сумма $x_2 + \dots + x_n$

но из (п. 3) существует еще одно число, больше 33

$\Downarrow$

противоречие

$\Downarrow$

$x_1 = 15$

5) если $x_n = 36$, то $16 \cdot x_n = 576$

$$\begin{array}{r} 592 - 576 = 16 = \text{сумма } x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \\ - \quad x_1 = 15 \\ \hline x_2 + \dots + x_{n-1} = 1 \end{array}$$
— противоречие, т.к. $x_2 > x_1$

$\Downarrow$

$x_2 + \dots x_{n-1} > 15$

$\in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$x_n < 36$

3

№1 6) $FC = FM + MC = 1+8 = 9$ Чистовик

$$BC = \frac{FC \cdot MC}{EC}$$

$$BC = \frac{9 \cdot 8}{4\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

7) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AE \cdot BC$, $AE = ME + AM = 2+4 = 6$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

8) По т. Пифагора для $\triangle AEC$:

$AC^2 = AE^2 + EC^2$

$$AC = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{2^2(3^2 + 2^2 \cdot 3)} = 2\sqrt{9+12} = 2\sqrt{21}$$

9) По т. синусов:

$$2R = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$$

$$2R = \frac{2\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3 \cdot 7}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{7}$$

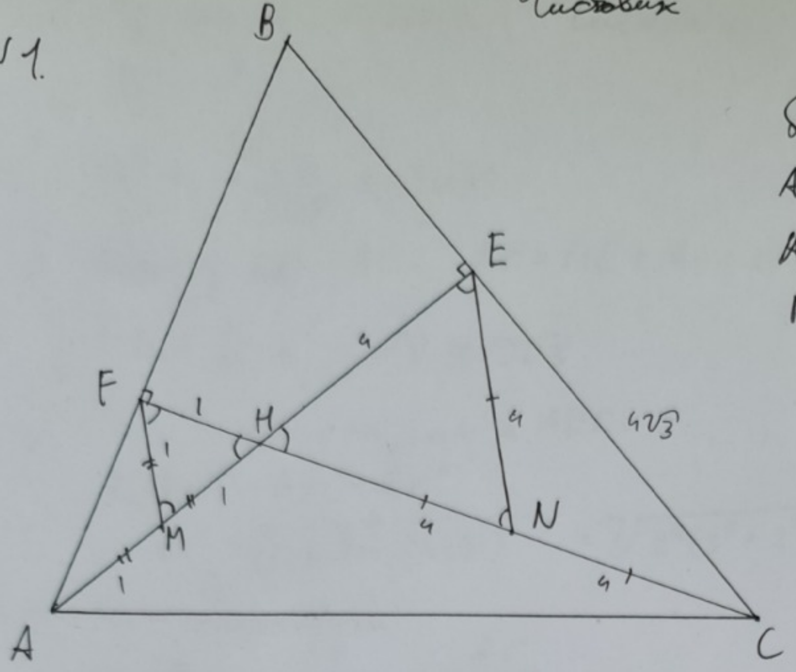
$$R = 2\sqrt{7}$$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{7}$

211005976 (U826592 M1276502)

Чистовик

№1.



Дано: $\triangle ABC$.
AE, CF – высоты
$AE \cap CF = H$
M, N – середины AH и CH соответственно
$FM = 1$, $EN = 4$
$FM \parallel EN$, $\omega(O; R)$ – опис.
Найти: $\angle ABC$
$S_{\triangle} ABC$
R

Решение

1) $\triangle HEC$ – прямоуг. N – середина HC $\Rightarrow$ $EN = HN = NC = 4$; аналог. для $\triangle AFH$: $FM = MH = AM = 1$

2) $\angle HEN = \angle FME$, как накр. лежащие при $EN \parallel FM$ и секущей MF
т.к. $\triangle MNE$ – равноб ($HN = EN$) то $\angle HEN = EHN$.
$\angle EHN = \angle FHM$ (как вертик.). ~~$\Rightarrow \angle$~~
$\Downarrow$
$\angle FHM = \angle FMN$.
т.к. $\triangle FMH$ – равноб. ($FM = MH$), то $\angle MHF = \angle HFM$.
$\Downarrow$
$\triangle FMH$ – равносгор., $\angle FHM = 60°$, $FH = 1$
$\Downarrow$
$\angle EHN = \angle HEN = 60°$ $\Rightarrow \angle ENH = 60° \Rightarrow$ в $\triangle EHN$: $EH = EN = HN = 4$

3) в четырёхуг-ке $BFHE$: $\angle F = \angle E = 90° \Rightarrow \angle B + \angle FHE = 180°$.
$\angle B = 180° - \angle FHE = \angle EHN = 60°$

4) По т. Пифагора для $\triangle EHC$: $EC = \sqrt{HC^2 - EH^2}$, $HC = 4 \cdot 2$
$EC = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$

5) $\angle HEC = \angle BFC = 90°$, $\angle C$ – общий $\Rightarrow$ $\triangle ECH \sim \triangle FCB$ (по 2-м углам) $\Rightarrow \dfrac{EC}{FC} = \dfrac{HC}{BC}$

1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005976**

ID профиля: **826592**

Вариант 16

Черновик.

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2)-(xy)^2=2$$

$$x+y=a \quad , \quad xy=b$$

$$(x+y)^2=a^2=x^2+2xy+y^2$$

$$2(a^2-2b)-b^2$$

$$2a^2-4b-b^2=2$$

$$(x^4+y^4)-\frac{1}{2}b^2$$

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{matrix}$$

$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$$a^4-2xy(2x^2+3xy+2y^2)$$

$$a^4-2b(2(a^2-2b)+3b)=$$

$$=a^4-2b(2a^2-b)=$$

$$=a^4-4a^2b+2b^2$$

$$\begin{cases} a^4-4a^2b+2b^2-\frac{1}{2}b^2=19 \\ 2a^2-4b-b^2=2 \end{cases}$$

Черновик

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}(2x^2+2y^2-2)=19$

$x^4+y^4-x^2-y^2+x=\cancel{19}\ 18$

$x^2=a, \quad y^2=b$

$\begin{cases} a^2-a+b^2-b=18 \\ 2a+2b-ab=2 \end{cases}$

$a+b=t$

$ab=d$

$2(a+b)=2+ab$

$a+b=1+\frac{ab}{2}$

$a^2-1-\frac{ab}{2}+b^2=18$

$a^2-\frac{ab}{2}+b^2=18$

$t^2-2f-t=18$

$t^2-t-2d=18$

~~a+b=7~~

$a=7-b$

$D_1=1+6=7$

$2t-d=2$

$(7-b)b=12$

$7b-b^2=12$

-2

$(-2-b)b=-6\ 34$

$-2b-b^2=-6$

Черновик

от 1 до 16.

16^2

$32-1=31$

с 16

к. 16

x 16

16 x

16 дублей.

1 1 1 1 2 3

1 2 3 1 1 1

$\cancel{1}$.

x.

$3\cancel{1}$

15

$\begin{array}{r} \times 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \\ -\ 31 \\ \hline 225 \\ -\ 15 \\ \hline 210 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 15 \\ 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$

Z.

S.

$\cancel{1}6 \cdot \cancel{225}$

15^2 $\cancel{2}10$.

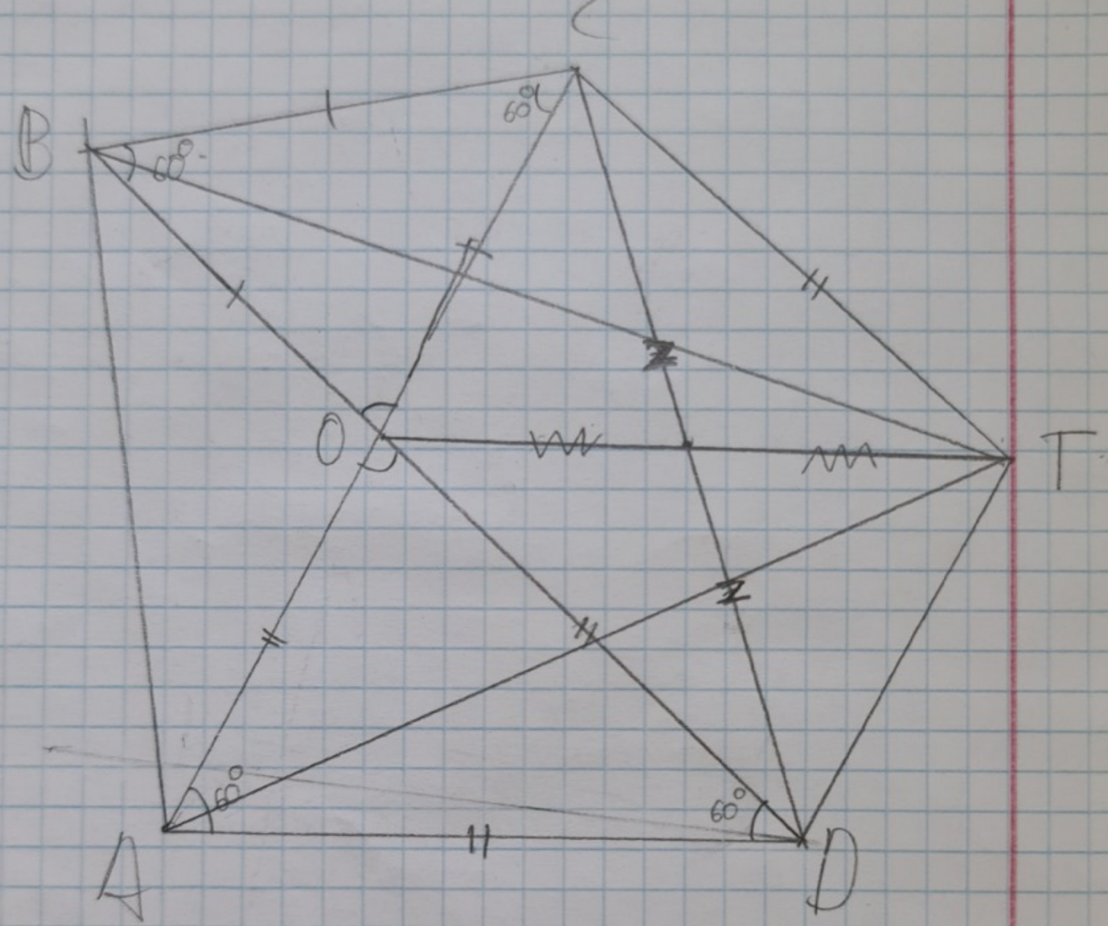
$16 \cdot 210 + \frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15$

$\begin{array}{r} \times 435 \\ 8 \\ \hline 3480 \end{array}$

420

211005976 (U826592 M1276503)

Черновик

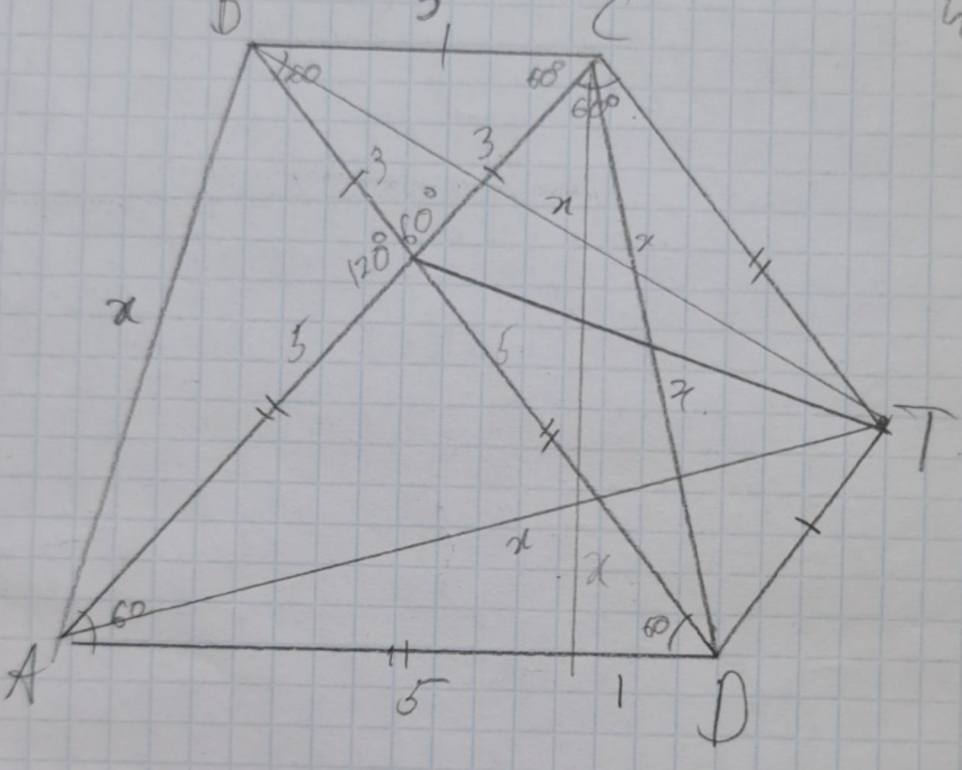


211005976 (U826592 M1276503)

Черновик $\frac{1}{2}x^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}$

$\cancel{\frac{1}{2}x\cdot x\cdot 5}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}x^2}{4}$



$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 3 \\ \hline 48 \end{array}$

$4\sqrt{x^2-1}$

$\frac{1}{2}\,8\cdot 8\cdot\cos 60^\circ=$ $\frac{x}{\sin 60^\circ}=\frac{8}{\cancel{\sin}}$

$x^2=9+64-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8$

$x^2=9+64-24=49$

x

5) аналог $\left.\begin{array}{l} DT = OC = BO \\ AD = OA \\ \angle ADT = 120^\circ \\ (\angle ODT = \angle OCT = 60^\circ) \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ADT = \triangle ABO \Big| \Rightarrow AT = AB$

6) $AT = AB = BT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный ■

7) $\left.\begin{array}{l} BO = OC \\ AO = OD \\ \angle BOA = \angle COD \end{array}\right| \Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD$
(как вертик.)
(по 2-м ~~углам~~ сторонам и углу

Черновик

211005976 (U826592 M1276503)

1) $\begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases}$ $\begin{cases} a=7-b \\ b^2-7b+12=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=4 \end{array}\right. \\ a=7-b \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=3 \\ a=4 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4 \\ a=3 \end{cases} \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} a+b=-2 \\ ab=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-2-b \\ b^2+2b-6=0 \end{cases}$

Черновик.

Чистовик

№6 5) аналог. $\overline{DT = OC = BO}$, $\overline{AD = OA}$, $\angle ADT = 120^\circ$ $(\angle ODT = \angle OCT = 60^\circ)$ $\Big| \Rightarrow \triangle ADT = \triangle ABO \Big| \Rightarrow AT = AB$

6) $AT = AB = BT \;|\Rightarrow\; \triangle ABT$ — правильный

7) $BO = OC$, $AO = OD$, $\angle BOA = \angle COD$ $\Big| \Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD$ (по 2-м сторонам и углу между ними) $\Big| \Rightarrow AB = CD \Big| \Rightarrow ABCD$ — равнобедр. трапеция

8) Пусть $AB = CD = x$.

$CH \perp AD \;|\Rightarrow\; HD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$

в прямоуг. $\triangle CDH$ по т. Пифагора:

$CD^2 = CH^2 + HD^2$

$x^2 = CH^2 + 1$

$CH = \sqrt{x^2 - 1}$

Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CH = \frac{8}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$

9) $AC = AO + OC = AD + BC = 3 + 5 = 8$

По т. косинусов для $\triangle ABC$:

$x^2 = BC^2 + AC^2 - 2\cos\angle BCA \cdot BC \cdot AC$

$x^2 = 9 + 64 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3$

$x^2 = 9 + 64 - 24 = 49 \;|\Rightarrow\; x = 7$

$S_{ABCD} = \frac{8}{2} \cdot \sqrt{49 - 1} = \frac{8}{2} \cdot \sqrt{48} = 8 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$

10) $S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}\, AB^2}{4} = \frac{\sqrt{3}\, x^2}{4}$

$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}\, 7^2}{4}$

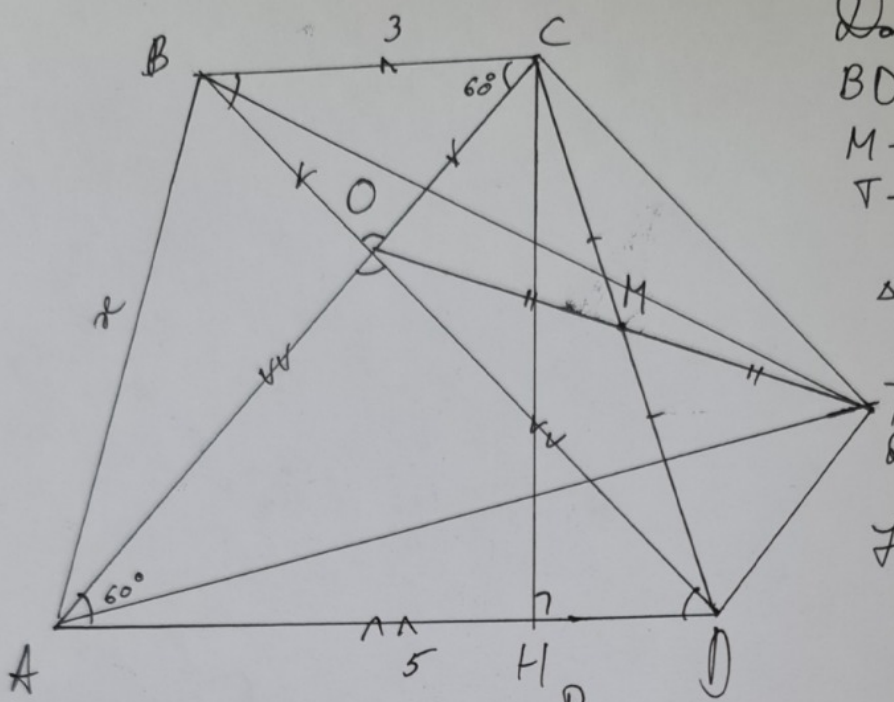
11) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3}\, 7^2}{4 \cdot 16\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$

Ответ: $\frac{49}{64}$

5

N6

Чистовик



Дано: ABCD - выпуклый

$BD \cap AC = O$

M - середина CD

T - симметрична O относит. M

$\triangle BOC$, $\triangle AOD$ - правильные

б) $BC = 3$, $AD = 5$

Доказать: $\triangle ABT$ - правильный

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение

1) $\triangle BOC$, $\triangle AOD$ - прав-ые $\Rightarrow$ $BC = OC = OB$, $AO = OD = AD$

$\angle BCA = \angle CAD = 60^\circ$

$\Downarrow$

$BC \parallel AD$ (т.к. $\angle BCA$, $\angle CAD$ - накр. лежащие при секущей AC)

2) $\angle BOA = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

(т.к. $\triangle BOC$ - прав-ый).

3) $OM = MT$ (из-за симметрии)
$CM = MD$ (по усл.)
$\Rightarrow$ OCTD - параллелограм

$CT \parallel OD$, $CT = OD$

$\Downarrow$

$\angle AOD = \angle ACT = 60^\circ$

$\Downarrow$

$\angle ACT = \angle BCA + \angle ACT = 120^\circ$

4) $\angle BOA = \angle ACT$
$BC = BO$ (из $\triangle BOC$)
$\underline{CT} = OD = \underline{OA}$
$\Rightarrow$ $\triangle BCT = \triangle BOA$
(по 2-м сторонам и углу между ними)

$\Downarrow$

$BT = AB$

№5

Чистовик

Всего в колоде 16 дублей (т.к. есть 16 разл. чисел)

1) Посчитаем кол-во способов, когда вытаскивают 1 дубль и 1 не дубль.

Пусть x - опред. число от 1 до 16.
~~Кол~~ Обозначим пару $(x;y)$ как два числа с 2-х сторон карты (напр. x - красная, y - синяя)

Кол-во пар $(x;y)$, где y - любое число (от 1 до 16) равно 16.
Аналог кол-во пар $(y;x) = 16$.
~~В~~ Т.к. пара $(x;x)$ встречается в обоих случаях, то общее кол-во карт с x равно $16+16-1=31$

Итак, пусть мы выбрали дубль $(x;x)$. Тогда кол-во способов выбрать ещё одну карту $=$
$= 16^2 - 31 - 15$, т.к. мы не берём оставшиеся 15 дублей.
Всего дублей 16. Значит кол-во способов выбрать 1 дубль и 1 не дубль $= 16 \cdot (256-31-15) =$
$= 16 \cdot 210$

2) Посчитаем кол-во способов выбрать 2 дубля
Это $C_{16}^{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15$

3) ~~В~~ Кол-во всех способов, удовлетворяющих условию задачи $= 16 \cdot 210 + 8 \cdot 15 = 8 \cdot 435$

Ответ: $8 \cdot 435 = 3480$

3

№4 1) $\begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases}$ $\begin{cases} a=7-b \\ b^2-7b+12=0 \end{cases}$ Чистовик $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=4 \end{array}\right. \\ a=7-b \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=3 \\ a=4 \end{cases} \quad \text{I} \\ \begin{cases} b=4 \\ a=3 \end{cases} \quad \text{II} \end{array}\right.$

2) Вернёмся к переменным x и y

I $\begin{cases} y^2=3 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{3} \\ x=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-\sqrt{3} \\ x=2 \end{cases}$ или

или $\begin{cases} y=\sqrt{3} \\ x=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-\sqrt{3} \\ x=-2 \end{cases}$

II аналог. I : $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=2 \end{cases}$ или

или $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-2 \end{cases}$

Ответ: $(\sqrt{3}; 2)$, $(-\sqrt{3}; 2)$, $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$, $(2; \sqrt{3})$, $(2; -\sqrt{3})$, $(-2; \sqrt{3})$, $(-2; -\sqrt{3})$.

№4 Черновик

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2, & (1) \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 & (2) \end{cases}$$

$(1):\quad x^2y^2 = 2x^2+2y^2-2$

$\downarrow$

$(2):\quad x^4+y^4-\frac{1}{2}(2x^2+2y^2-2)=19$

$x^4-x^2+y^4-y^2 \pm 18$

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)-x^2y^2=2 \\ x^4-x^2+y^4-y^2=18 \end{cases}$$

Пусть $x^2=a$, $y^2=b$

$$\begin{cases} 2(a+b)-ab=2 \\ a^2-a+b^2-b=18 \end{cases}$$

Пусть $a+b=c$, $ab=d$ Тогда $(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$

$c^2-2d=a^2+b^2$

$$\begin{cases} 2c-d=2 \\ c^2-2d-c=18 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=2c-2 \\ c^2-2(2c-2)-c=18 \ (*) \end{cases}$$

$(*):\quad c^2-4c+4-c=18$

$c^2-5c-14=0$

$$\left[\begin{array}{l} c=7 \\ c=-2 \end{array}\right.$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} c=7 \\ c=-2 \end{array}\right. \\ d=2c-2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=7 \\ d=12 \end{cases} \\ \begin{cases} c=-2 \\ d=-6 \end{cases} = a+b = x^2+y^2 \geq 0 - \text{противоречие} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} c=7 \\ d=12 \end{cases}$$

Вернёмся к переменным a и b:

1) $\begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases}$ или 2) $\cancel{\begin{cases} a+b=-2 \\ ab=-6 \end{cases}}$