# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005886**

ID профиля: **170757**

Вариант 16

Черновик

№2

Пусть чисел было $n$ штук. Упорядочим их.
$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$.

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$

$a_i \neq a_j$, $i, j \in \overline{1,n}$

По условию:

$35a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 592$ (1)

$a_1 + \ldots + a_{n-1} + 16a_n = 592$ (2).

$$\begin{array}{r} \times\ 35 \\ 15 \\ \hline 175 \\ +\ 35\ \ \\ \hline 525 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 34 \\ 16 \\ \hline 204 \\ +\ 34\ \ \\ \hline 544 \end{array}$$

(1) − (2):

$34a_1 - 15a_n = 0$

НОД

$34a_1 = 15a_n$; т.к. НОД$(34, 15) = 1$,

$\Rightarrow a_n \vdots 34$, $a_1 \vdots 15$

Тогда, т.к. $a_1 \vdots 15$, то $35a_1 \vdots 35 \cdot 15$

$35 \cdot 15 = 525$.

Т.к. $a_1 \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow 35a_1 \in \mathbb{N}$.

Если $35a_1 > 525$, то $35a_1 + \ldots + a_n > 592$.

Значит, $35a_1 = 525$, и $a_1 = 15$.

Аналогично, т.к. $a_n \vdots 34$, $16a_n \vdots 16 \cdot 34$
$16a_n \vdots 544$

$\Rightarrow 16a_n = 544$, иначе $a_1 + \ldots + a_{n-1} + 16a_n > 592$.

$\Rightarrow a_n = 34$.

Тогда, $35 \cdot 15 + 34 = 525 + 34 = 559$

Тогда, $a_2 + \ldots + a_{n-1} = 592 - 559 = 33$

Если между $a_1$ и $a_n$ $\exists \geq 2$-х чисел, то $a_2 + \ldots + a_{n-1} = 33$.

Тогда, это могут быть только $16 + 17 = 33$, т.к.
$15 < a_2, \ldots, a_n < 34$.

Если между ними $= 1$ число, то $a_2 = 33$; $15 < 33 < 34$ - ув.

Ответ: Это могли быть числа 15, 16, 17, 34; или 15, 33, 34.

1

Чистовик

№3

$A(x;y)$.

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+y^2+y^2=0$

$(2a-x+y)^2=4a^2-4ax+4ay-2xy+x^2+y^2$

$(4a^2+x^2+y^2-4ax+4ay-2xy)+(a^2+2ay+y^2)=0$

$(2a-x+y)^2+(a+y)^2=0$

Т.к. квадраты $\geq 0$, $\Rightarrow \begin{cases}2a-x+y=0\\ a+y=0\end{cases}$ $\begin{cases}2a-x-a=0\\ y=-a\end{cases}$ $\begin{cases}x=a\\ y=-a\end{cases}$.

Тогда т. $A(a;-a)$.

$B(x;y)$

$\omega$: $(ax)^2-2ax(2a^2+1)+(2a^2+1)^2+(ay)^2+2\cdot ay\cdot a+a^2$ $+4a^4+4a^2+1=(2a^2+1)^2+a^2$

$(ax-(2a^2+1))^2+(ay+a)^2=\cancel{4a^4}+4a^2+\cancel{1}+a^2-\cancel{4a^4}-\cancel{1}$

$(ax-(2a^2+1))^2+a^2(y+1)^2=5a^2$

Если $a=0 \Rightarrow B\in\varnothing$ $(1=0)$

Значит, $a\neq 0$.

$\cancel{a^2}(x-(2a+\frac{1}{a}))^2+\cancel{a^2}(y+1)^2=5\cancel{a^2}$

$(x-(2a+\frac{1}{a}))^2+(y+1)^2=5$

Значит, $B(2a+\frac{1}{a};-1)$.

Т.к. нам надо чтобы эти точки с разных сторон от $x=3$,

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>3\\ 2a+\frac{1}{a}<3\end{cases}\\ \begin{cases}a<3\\ 2a+\frac{1}{a}>3\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>3\\ 2a^2-3a+1<0\end{cases}\\ \begin{cases}a<3\\ 2a^2-3a+1>0\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>3\\ (a-1)(2a-1)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a<3\\ (a-1)(2a-1)>0\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(3;+\infty)\\ a\in(\frac{1}{2};1)\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(-\infty;3)\\ a\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)\end{cases}\end{array}\right.$

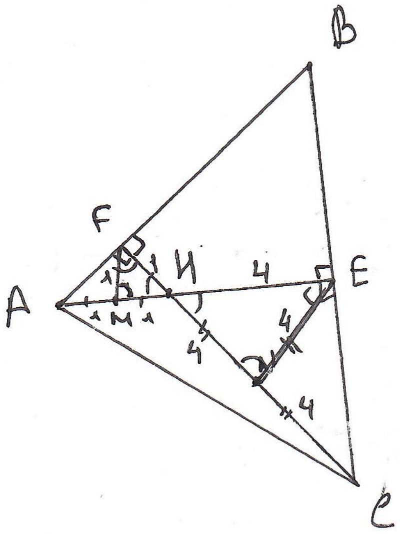
$\left[\begin{array}{l}a\in\varnothing\\ a\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;3)\end{array}\right.$. Ответ: $a\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;3)$

$\boxed{\text{Чистовик}}$ № 1

**Дано:**
△ABC - остроуг.
CF, AE - высоты
$CF \cap AE = H$
M - сер. AH
N - сер. CH
$FM = 1$
$EN = 4$
$FM \parallel EN$

---

$\angle ABC$ - ?
$S_{ABC}$ - ?
$R_{ABC}$ - ?




Заметим, т.к. FM и EN - медианы к гипотенузам △AFH и △HEC, где эти △-ки - прямоугольные, то $FM = \frac{AH}{2}$ и $EN = \frac{CH}{2}$, ⇒
$AH = 2$; $CH = 8$, и
$AM = FM = HM$
$EN = NH = NC$.
~~Т.к.~~ Т.к. $FM = MH$ — △FMH — равнобедренный, ⇒
$\angle MFH = \angle MHF$;
$\angle MHF = \angle NHE$ - как верт-й.

Тогда, △HNE - тоже равнобедренный, $HN = NE$;
$\angle NHE = \angle NEH$;
Тогда, $\angle MFH = \angle MHF = \angle NHE = \angle NEH$.
Т.к. $FM \parallel EN$, то $\angle MFH = \angle HNE$ - как накрест-лежащие. Тогда, △HNE и △MFH - равносторонние,
и $\angle MFH = 60^\circ$.
$FH = 1$; $HE = 4$.
Тогда, $\angle FHE = 180^\circ - \angle MHF = 120^\circ$.
$\Sigma \angle$-в 4-х ∠-ка $FBEH = 360^\circ$:

$$\underbrace{\angle HFB}_{90} + \underbrace{\angle FHE}_{120} + \underbrace{\angle HEB}_{90^\circ} + \angle FBE = 360^\circ$$

$300 + \angle FBE = 360$
$\angle FBE = 60^\circ$. ; $\angle ABC = \angle FBE = 60^\circ$.

Тогда, $\angle AHC = 120^\circ$.
по т. косинусов △AHC: $AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2AH \cdot HC \cdot \cos 120$.
$AC^2 = 4 + 64 - 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot (-\frac{1}{2}) = 68 + 16 = 84$.
$AC = 2\sqrt{21}$.

Тогда, по т. синусов △ABC: $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R_{ABC}$
$\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R_{ABC} \Rightarrow R_{ABC} = 2\sqrt{7}$.

Заметим, что △AFM и △CNE - тоже р/бедренные, и $\angle MAF = \angle MFA = \angle \frac{HMF}{2} = 30^\circ$
$\angle NEC = \angle NCE = \angle \frac{HNE}{2} = 30^\circ$.

По т. Пифагора, $AF = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$; $FC = \sqrt{4^2 \cdot 2^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} \sin 30 = \frac{BE}{BF + \sqrt{3}} \Rightarrow BE = \frac{BF + \sqrt{3}}{2} \\ \sin 30 = \frac{BF}{BE + 4\sqrt{3}} \end{cases}$$

$2BF = BE + 4\sqrt{3} = \frac{BF}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{3}$.
$\frac{3}{2}BF = \frac{9}{2}\sqrt{3}$; $BF = 3\sqrt{3}$.
$BE = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Тогда, $S_{ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$.

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$; $R_{ABC} = 2\sqrt{7}$.

3

Черновик

№1

**Дано:**

△ABC — остроуг.

CF, AE — высоты

CF ∩ AE = H

M — сер. AH

N — сер. CH

FM = 1

EN = 4

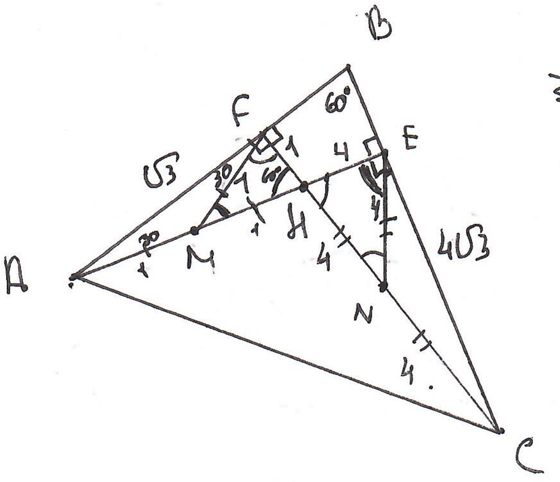
FM ∥ EN

---

∠ABC — ?

$S_{ABC}$ — ?

$R_{ABC}$ — ?




$$\begin{cases}\frac{BE}{\sqrt3+BE}=\frac12\\ \frac{BF}{BE+4\sqrt3}=\frac12\end{cases}$$

$\frac{AC}{\sin 60} = 2R$

$\frac{2\sqrt{21}}{\frac{\sqrt3}{2}} = 2R$

$BE = \frac{BF+\sqrt3}{2}$

$\frac{2\sqrt3\cdot\sqrt7}{\sqrt3} = R$

$\Rightarrow R = 2\sqrt7$.

$4^2\cdot 2^2 - 4^2 = 4^2\cdot 3$

Заметим, что △AFH — прямоугольный, $2BF = \frac{BF}{2}+\frac{\sqrt3}{2}+4\sqrt3$

⇒ в нём медиана $= \frac12$ гипотенузы. $\frac{3}{2}BF = \frac{9}{2}\sqrt3$

$BF = 3\sqrt3$

$BE = 2\sqrt3$

$FM = \frac{AH}{2} \Rightarrow AH = 2$

Аналогично, $EN = \frac{CH}{2} \Rightarrow CH = 8 \Rightarrow AB = 4\sqrt3$; $BC = 6\sqrt3$

$\frac{9\cdot4\sqrt3}{2} = 18\sqrt3$; $\frac{6\sqrt3\cdot6}{2} = 18\sqrt3$

В то же время, т.к. FM ∥ EN, то ∠MFH = ∠ENH — как накрест лежащие. Аналогично, ∠FMH = ∠NEH.

$(a^2+1)^2 = 4a^4+3a^2+1$ $\quad -3a^4-a^2=0$.

$a^4+2a^2+1 = 4a^4+3a^2+1$

В то же время, △MFH — равнобедренный по определению, т.к. MF = MH. ⇒ ∠MFH = ∠MHF.

В то же время, △HNE — тоже равнобедренный по определению, т.к. NH = NE. Тогда, ∠EHN = ∠HEN = ∠HNE (= к ∠HNE — по ранее доказанному). ⇒ △FMH и △NHE — равносторонние, FH = 1, HE = 4.

Тогда, в 4-х ∠-ке FBEH, ∠BFH = ∠HEB = 90°, и ∠FHE = 180° − ∠FHM = 120°.

Тогда, по Σ ∠-в 4-х ∠-ка, ∠FBE + 90·2 + 120 = 360°

∠FBE = 60°; $\quad x = a$, $y = -a$

∠ABC = ∠FBE = 60°.

$5a^2-4a^2-6a^2+a^2+2a^2+2a^2 = 10a^2-10a^2 = 0$.

∠AHC = ∠FHE = 120°; По т. косинусов:

$AC^2 = AH^2 + CH^2 - 2\cdot CH\cdot AH\cdot\cos120$

$AC^2 = 4+64 - 2\cdot2\cdot8\cdot\left(-\frac12\right) = 68+16 = 84$.

$AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

$x = a+\frac1a$

$y = 1$

$a^2\left(a+\frac1a\right)^2 + a^2 - 2a\left(a+\frac1a\right)(a^2+1) + 2a^2+4a^4+1=0$

$(a^2+1)^2 + a^2 - 2(a^2+1)^2 + 4a^4+2a^2+1 = 0$

$(ax)^2 - 2xa(2a^2+1) + (2a+1)^2$

~~[illegible]~~ Черновик.

№3 $\sqrt{3}$

$A(x;y)$.

$\frac{\cancel{2\sqrt{21}}\cdot 6\sqrt{3}\cdot \cancel{4\sqrt{3}}}{\cancel{4\cdot 2\sqrt{7}}} = 18\sqrt{3}$.

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

$w(B)$: $a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0$

$x=3$ $a\neq 0$, иначе $1=0$ - нет.

$a^2x^2-x(4a^3+2a)+a^2y^2+2a^2y+4a^4+1=0$

$(ax)^2-2ax(a^2+1)+(a^2+1)^2+(ay)^2+2\cdot ay\cdot a+a^2+4a^4+1=(a^2+1)^2+a^2$

$(ax-(a^2+1))^2+(ay-a)^2+4a^4+1=(a^2+1)^2+a^2$

$a^2(x-(a+\frac{1}{a}))^2+a^2(y-1)^2=a^4+2a^2+\cancel{1}+a^2-4a^4-\cancel{1}$

$\cancel{a^2}(x-(a+\frac{1}{a}))^2+\cancel{a^2}(y-1)^2=3a^2-3a^4$

$(x-(a+\frac{1}{a}))^2+(y-1)^2=3(1-a^2)$

$B(a+\frac{1}{a};1)$; $3(1-a^2)\geq 0$ - т.к. это квадрат радиуса $W$.

$1-a^2\geq 0$

$a^2\leq 1$

$a\in[-1;1]$

$\times\frac{34}{16}$, $\frac{204}{+34}$, $544$ ; $\times\frac{35}{15}$, $+\frac{175}{35}$, $525$

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+y^2+y^2=0$

~~$(4a^2-4ax+x^2)+a^2+6ay+9y^2=+y^2$~~

~~$(2a-x)^2+(a+3y)^2=\cancel{8}y^2$~~

~~$(x)^2+(y)^2-2xy+(2a)^2$~~

~~$(2a-x+y)^2=4a^2-4ax-2xy+4ay+x^2+y^2$~~

$(2a-x+y)^2+a^2+2ay+y^2=0$

$(2a-x+y)^2+(a+y)^2=0$ $\begin{cases}2a-x+y=0\\a+y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=a\\y=-a\end{cases}$

Т.к. кв-т числа $\geq 0$, $\Rightarrow$

Т.к. на пол[о]жении окр-ти прямой $x=3$, выше только $x$ координата точки, ~~[illegible]~~ и $a\in[-1;1]$, $\Rightarrow$ т.$A$ всегда левее $x=3$, т.к. $A(a;-a)$, $a<3$.

Значит, $a+\frac{1}{a}>3$; $a^2-3a+1>0$ $\Rightarrow$

$D=9-4=5$; $a_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $a_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$;

$a\in(-\infty;\frac{3-\sqrt{5}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty)$;

$\frac{3+\sqrt{5}}{2}>1$

$3+\sqrt{5}>2$

$1+\sqrt{5}>0$;

$1 \cancel{>} \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; ; $\sqrt{5}>1$

4

Ответ: $a\in[-1;1]\setminus\{0\}$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005886**

ID профиля: **170757**

Вариант 16

№4 Чистовик

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-(xy)^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{(xy)^2}{2}=19 \end{cases}$$

$x, y = 0$ — не корень.

1

Введём замену: $a = x^2+y^2$
$b=(xy)^2$.

Тогда, $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=a^2-2b$

$$\begin{cases} 2a-b=2 \\ a^2-2b-\frac{b}{2}=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=2a-2 \\ a^2-\frac{5}{2}(2a-2)-19=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=2a-2 \\ a^2-5a-14=0 \end{cases}$$

$D=25+14\cdot4=25+56=81$

$a_1=\frac{5-9}{2}=-2$ $\quad b_1=-2\cdot2-2=-6$

$a_2=\frac{5+9}{2}=7$ $\quad b_2=7\cdot2-2=12$.

Тогда, введём обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=-2 \\ (xy)^2=-6 \end{cases} - x,y\in\varnothing,\ \text{т.к. } x^2+y^2\geq0>-2 \\ \begin{cases} x^2+y^2=7 \\ (xy)^2=12 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ xy=\pm2\sqrt3 \end{cases}$$

Решим для $xy=+2\sqrt3$: $7-4\sqrt3=(\sqrt3-2)^2=3+4-4\sqrt3$

$(x-y)^2=7-4\sqrt3$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=\sqrt{7-4\sqrt3} \\ xy=2\sqrt3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-\sqrt{7-4\sqrt3} \\ xy=2\sqrt3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=2-\sqrt3 \\ xy=2\sqrt3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-2+\sqrt3 \\ xy=2\sqrt3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=2-\sqrt3 \\ x=\frac{2\sqrt3}{y} \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-2+\sqrt3 \\ x=\frac{2\sqrt3}{y} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -y^2-y(2-\sqrt3)+2\sqrt3=0 \quad (1) \\ x=\frac{2\sqrt3}{y} \end{cases} \\ \begin{cases} -y^2+y(2-\sqrt3)+2\sqrt3=0 \quad (2) \\ x=\frac{2\sqrt3}{y} \end{cases} \end{array}\right.$$

$D=(2-\sqrt3)^2+4\cdot2\sqrt3=$
$=2^2-4\sqrt3+(\sqrt3)^2+2\cdot4\sqrt3=2^2+4\sqrt3+(\sqrt3)^2=$
$=(2+\sqrt3)^2$

Для (1): $y_1=\frac{2-\sqrt3-(2+\sqrt3)}{-2}=\frac{-2\sqrt3}{-2}=\sqrt3$; $x_1=2$

$y_2=\frac{2-\sqrt3+2+\sqrt3}{-2}=-2$; $\quad x_2=-\sqrt3$

Для (2): $y_1=\frac{-(2-\sqrt3)-2-\sqrt3}{-2}=\frac{-4}{-2}=2$; $x_1=\sqrt3$

$y_2=\frac{-(2-\sqrt3)+2+\sqrt3}{-2}=\frac{2\sqrt3}{-2}=-\sqrt3$; $x_2=-2$. Т.к. $xy=xy$ может быть $=-2\sqrt3$, но $x$ и $y$ соответственно $-y$ и $-x$

Ответ: $(x;y)\in\{(-2;-\sqrt3);(-\sqrt3;-2);(\sqrt3;2);(2;\sqrt3);$
$(2;-\sqrt3);(\sqrt3;-2);(-\sqrt3;2);(-2;\sqrt3)\}$

№5 [Черновик]

1) Всего дублей — 16. (1;1), (2;2), ..., (16;16).

Когда у двух вытянутых карточках ∃ ~~совпадает~~ совпадающее число на обеих, если одна дубль, это означает что у этой карточки либо на синей, либо на красной стороне совпадает число с дублем. Для ∀ дубля ∃ 30 таких карточек:

Если дубль — $(x;x)$, то $(x;1), \dots (x;16)$ — без $(x;x)$, и $(1;x), \dots (16;x)$ — без $(x;x)$.

Тогда, взять дубль мы можем 16 способами. Каждому дублю соответствует 30 наборов карточек, с единым =-ым числом. Порядок взятых карточек не важен, => всего способов $\frac{16\cdot 30}{2!} = 8\cdot 30 = 240$ сп-ов.

В то же время, взять 2 ∀ карточки, ~~мы можем~~ $\cancel{\frac{16^2(16^2-1)}{2!}}$

$\cancel{= \frac{256\cdot 255}{2} = 128\cdot 255}$ ~~сп-ов~~ одна из которых дубль, мы можем взять $\frac{16\cdot 255}{2!}\cdot\frac{1}{2}$, где $\frac{1}{2}$ — т.к. ∃ пара $(x;x);(y;y)$, и мы её посчитали дважды.

Тогда, способов взять дубль + непохожую карту,

$= \frac{16\cdot 255}{4} - 240 = 4\cdot 255 - 240 = 4(255-60) = 20(51-12) = 60(17-4) =$

$= 13\cdot 60 = 780$ сп-ов.

Ответ: 780 сп.-ов.

№6 Чистовик

**Дано:**

$ABCD$ – вып. 4-х $\angle$-к.

$AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$ – пр/$\triangle$.

$\triangle AOD$ – пр/$\triangle$.

$T$ – симм. т. $O$ отн. сер. $CD$

б) $BC=3$; $AD=5$.

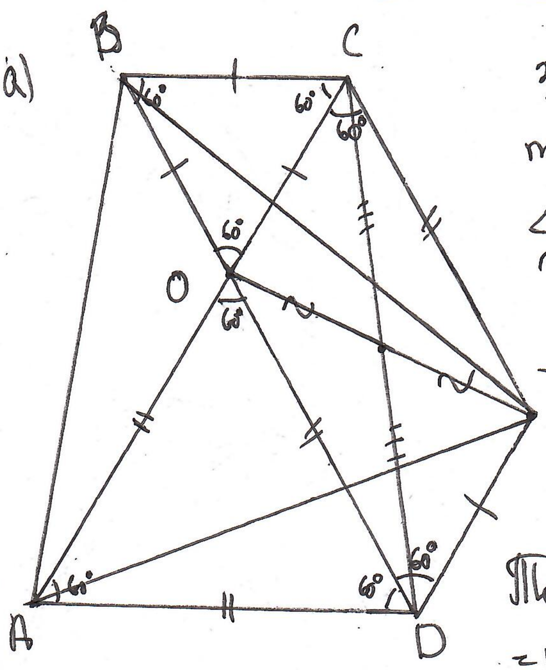
**Док-ть:**

а) $\triangle ABT$ – пр/$\triangle$.

**Найти:**

б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

а)



Заметим, что $BC \parallel AD$, т.к. накрест лежащие $\angle OBC = \angle ODA$.

Тогда, заметим, что $OCTD$ – ▱-м по признаку: т диагонали 4-х $\angle$-ка делятся т. П пополам.

Тогда, $OC = TD$.
$OD = CT$

Тогда, $\angle AOB = \angle COD = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$.

Заметим, что $OD \parallel CT$ – по определению ▱-ма,

$\Rightarrow \angle BOC = \angle OCT = 60^\circ \Rightarrow \angle BCT = 120^\circ$.

Аналогично, $OC \parallel TD$,

$\angle AOD = \angle ODT = 60^\circ$.

$\Rightarrow \angle ADT = 120^\circ$

3

Тогда, $\triangle ABO = \triangle TBC$ – по 2-м сторонам и $\angle$:

1) $BO = BC$
$AO = CT$
2) $\angle AOB = 120^\circ = \angle BCT$.

$\Rightarrow AB = BT$.

Тогда, $\triangle ABO = \triangle TAD$ – по 2-м сторонам и $\angle$:

1) $BO = DT$
$AO = AD$
2) $\angle BOA = \angle TDA = 120^\circ$.

$\Rightarrow AB = AT$.

Т.к. $AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный.

б) $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} = \frac{3\cdot5\cdot\sin120}{2} + \frac{3\cdot3\cdot\sin60}{2} + \frac{3\cdot5\cdot\sin120}{2} + \frac{5\cdot5\cdot\sin60}{2} =$

$= \frac{\sin60(9+25)}{2} + \frac{\sin120(15+15)}{2}$; $\sin\alpha = \sin(180-\alpha) \Rightarrow$

$S_{ABCD} = \frac{\sin60(34+30)}{2} = \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{64}{2} = 16\sqrt3$.

По т. косинусов для $\triangle AOB$: $AB^2 = 9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac12\right) = 34+15 = 49$.

$\Rightarrow AB = 7$.

Тогда, $S_{ABT} = \frac{7\cdot7\cdot\sin60}{2} = \frac{49\sqrt3}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{49\sqrt3}{4}}{\frac{16\sqrt3}{1}} = \frac{49}{64}$.

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49}{64}$.

№ 6 [Черновик]

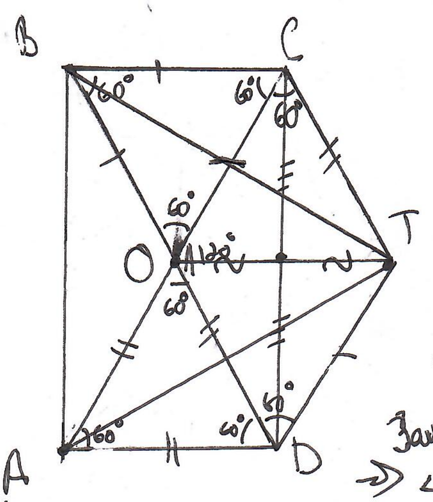
Дано:
ABCD – выпуклый 4-х-к.
$AC \cap BD = O$
BOC – правильный
AOD – правильный
T – симм. т. O отн сер. CD.

Док-ть:
а) ABT – пр-й △-к.

б) $BC = 3$; $AD = 5$

Найти:
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

а)



Заметим, что $BC \parallel AD$, т.к. накрест лежащие ∠ =.

OCTD – ▱-м по признаку, т.к. диагонали делятся т. ∩ пополам.

Тогда, $OC = TD$
$OD = CT$.

Заметим, $\angle COD = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$.
$\Rightarrow \angle OCT = 60^\circ$, т.к. $\angle COD + \angle OCT = 180^\circ$.

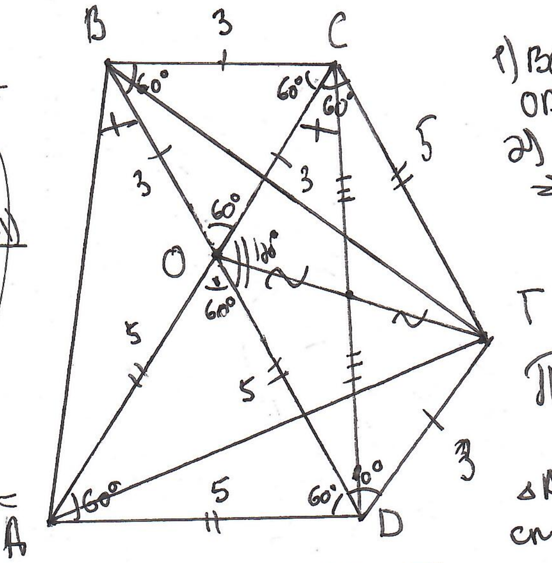
~~Тогда △ ... = △ OBT~~

Аналогично, $\angle ODT = 60^\circ$

~~Тогда~~

$\triangle ABO = \triangle DCO$ – по 2-м сторонам и ∠:

1) $BO = OC$
$OA = OD$
2) $\angle BOA = \angle COD$.
$\Rightarrow AB = CD$,
$\angle ABO = \angle DCO$.



Тогда,

$\triangle ABO = \triangle TBC$ – по ∠ и 2-м сторонам:

1) $BO = BC$; $AO = CT$.
2) $\angle AOB = 120^\circ = \angle BCT$. $\Rightarrow AB = BT$,

Аналогично – $AB = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – равносторонний.

б)

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120 = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-\frac{1}{2}) = 9 + 25 + 15 = 49$.

$AB = 7$.

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{7 \cdot \sqrt{7^2 - (\frac{7}{2})^2}}{2} = \frac{7\sqrt{\frac{7^2 \cdot 4 - 7^2}{4}}}{2} = \frac{7\sqrt{\frac{7^2 \cdot 3}{4}}}{2} =$

$= \frac{7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\frac{49\sqrt{3}}{4}}{16\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$.

$S_{ABCD} = \frac{9 \cdot \sin 60}{2} + \frac{25 \cdot \sin 60}{2} + \frac{3 \cdot 5 \cdot \sin 60}{2} \cdot 2 =$

$= \frac{\sin 60 (9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 64 = 16\sqrt{3}$.

$\frac{n(n-2)}{2} = n(n-1)$