Часть 1

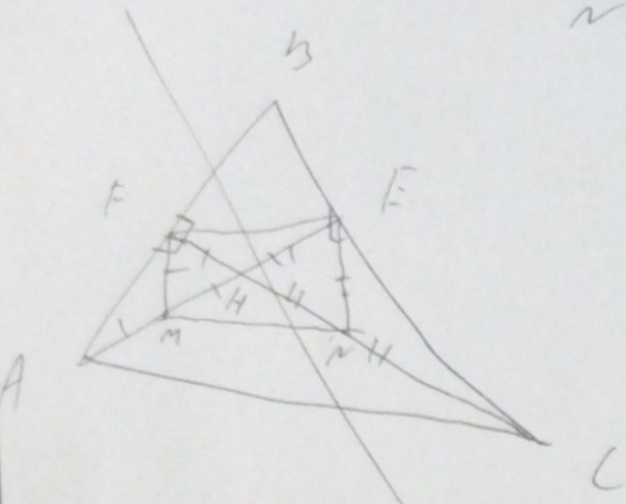
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005834**

ID профиля: **152630**

Вариант 16

Чистовик
№2



Дано

$\triangle ABC$

CF, AE - высоты

M, N - середины AH, CH соотв.

$AE \cap CF = H$

$FM = 1$

~~$EM = EM$~~

$EN = 4$

$FM \parallel EN$

Найти

$\angle ABC$

S_{ABC} R_{ABC}

Решение

F, M, N, E лежат на окр Эйлера $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $MFEN$ – вписанная трапеция $\Rightarrow$ $EF = MN$ (по пр во равнобокой трапеции) $MN = \frac{1}{2} AC$ (по св ср линии в $\triangle$)

$FM = \frac{1}{2} AH$, $EN = \frac{1}{2} HC = MH = NH$ (по св медианы из прямого угла в $\triangle$)

$FH = HM$ (по св равнобокой трапеции)
$HE = HN$

$\angle MFH = \angle FHM = \angle FMH = \angle HEN = \angle EMH = \angle EHN = 60^\circ$

$\angle MHN = \angle FHE = 120^\circ$

$MN = \sqrt{1^2 + 4^2 - 2\cos 120 \cdot 1 \cdot 4} = \sqrt{21}$

$AC = 2\sqrt{21}$

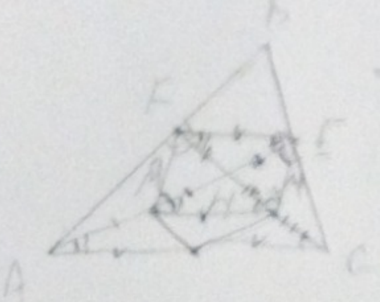
$BE = \frac{1}{2} AB$ (як в св-ах Δ с вершинами в ~~с~~
$BF = \frac{1}{2} BC$
опущених з висоти однієї з вершин Δ)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} CF \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AB$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot$

№1 Черновик

$\left(\frac{296-287}{9}\right) \cdot 16 = 90 + 57$



№2

$b = 592$

$b = a_1 + a_2 + a_3$

$c > a_i > a$

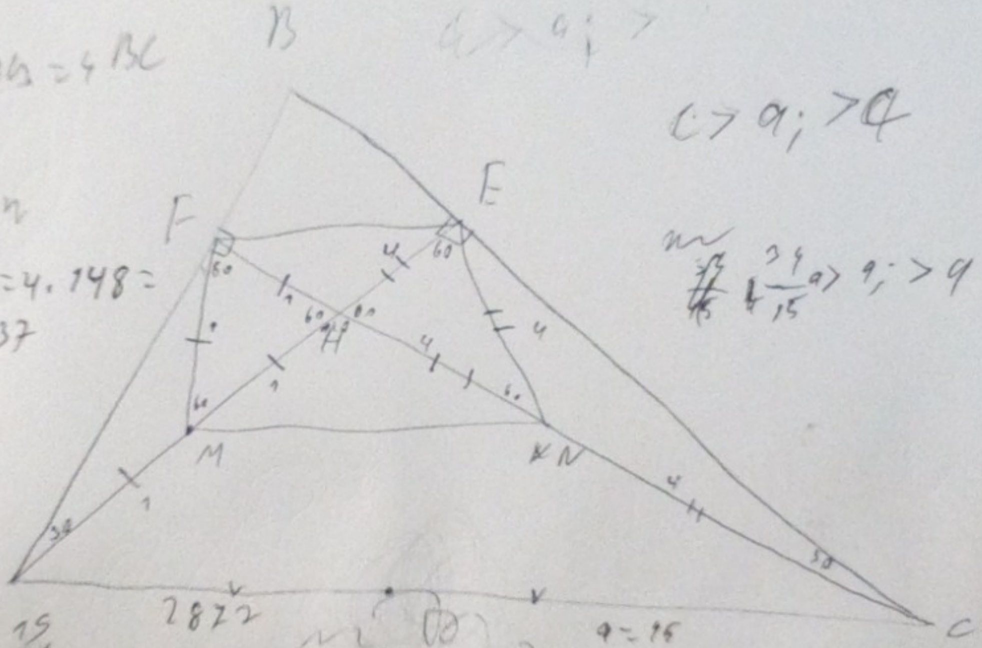
$4 \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$

$4AB = 5BC$

$5AB = 4BC$

$592 = 2 \cdot 296 = 4 \cdot 148 =$
$= 8 \cdot 74 = 16 \cdot 37$

$\frac{37}{15} a > a_i > a$



2872

$a = 16$
$c = 34$

$a \leq 15$
$c \leq 34$

$\frac{592}{38}$

$a \quad b \quad c$

$37 \cdot 15a + 4a = 592 \cdot 15$
$38 \cdot 15a + 4a = 592 \cdot 15$
$19 \cdot 15a + 2a = 296 \cdot 15$
$287a < 296 \cdot 15$
$a < \frac{296 \cdot 15}{287}$
15,5

черновик

a) $P(a) < 0$, при $a \in (\frac{1}{2}; 1)$

$P(a) > 0$, при $a \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cap (1; +\infty)$

$a \in (0; \frac{1}{2}) \cap (1; +\infty)$

$(x-y)^2+(y+3a)^2-4a^2-4ax=0$

$y=-3a$

$(x-3a)^2 - 4a^2-4ax=0$

$x^2-6ax+9a^2-4a^2-4ax=0$

$x^2-4ax+5a^2-6ax=0$

$x^2-10ax+5a^2=0$

Черновик

$\cancel{(x-y)}^2$

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

$(y+3a)^2-4a^2-4ax+x^2+2y^2-2xy$

$(y+3a)^2+(x-y)^2-4a^2-4ax=0$

$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0$

$x^2+y^2-4ax-\frac{2x}{a}+2y+4a^2+\frac{1}{a^2}=0$

$x^2-2x\left(2a+\frac{1}{a}\right)+\left(2a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(2a+\frac{1}{a}\right)^2+y^2+2y+1-1+4a^2+\frac{1}{a^2}=0$

$\left(x-2a-\frac{1}{a}\right)^2+(y+1)^2=\left(2a+\frac{1}{a}\right)^2+1-4a^2-\frac{1}{a^2}$

$\left(x-2a-\frac{1}{a}\right)^2+(y+1)^2=4a^2+4+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2}-4a^2+1=$

$\left(x-2a-\frac{1}{a}\right)^2+(y+1)^2=5$

$\left(2a+\frac{1}{a}\right)$ $\left(2a+\frac{1}{a};-1\right)$

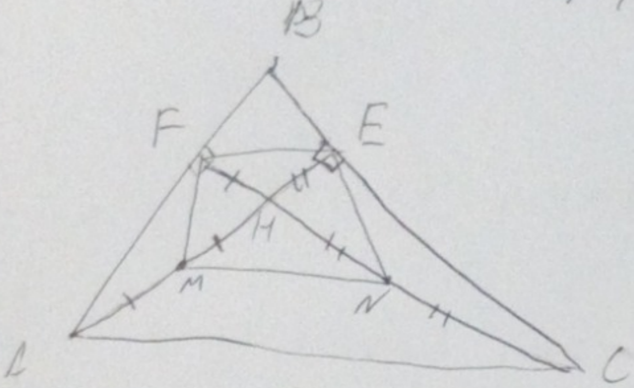
$2a+\frac{1}{a}>3$

$2a+\frac{1}{a}-3>0$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\2a^2-3a+1>0\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\2a^2-3a+1<0\end{cases}\end{array}\right.$

$P(a)=2a^2-3a+1$ $P(a)=(a-1)(2a-1)$

Чистовик №1 стр №2



Дано

$\triangle ABC$

CF, AE - высоты

$CF \cup AE = H$

$M \in AE$

$N \in CF$

$AM = MH$

$CN = NH$

$FM \parallel EN$

$FM = 1$

$EN = 4$

Найти

$\angle ABC$

S_{ABC} R_{ABC}

Решение

M, N, F, E лежат на окр. Эйлера в $\triangle ABC$

MNEF - вписаная трапеция $\Rightarrow FE = MN$, (по св. равнобокой трапеции)

$FH = HM$ $EH = HN$ (по св. в равнобокой трапеции из прямого угла)

FM - медиана в прямоугольном $\triangle FHA$;

также EN в $\triangle EHC$

$\Rightarrow FM = MH = FH$, $EN = NH = HE \Rightarrow \angle FHM = \angle HMF =$

$= \angle MFH = \angle EHN = \angle HNE = \angle HEN = 60^\circ$

$\angle MHN = 120^\circ = \angle FHE$

$MN = \sqrt{1^2 + 4^2 - 2 \cdot \cos 120 \cdot 1 \cdot 4} = \sqrt{17 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{21}$ (по теореме косинусов)

$2MN = AC$ (по св. ср. лин в $\triangle$)

Чистовик стр 13

$AC = 2\sqrt{21}$

$BE = \frac{1}{2} AB$ (по св. треугольника с 2 вершинами в основании

$BE = \frac{1}{2} BC$ 2 высоты и в одной из вершин Δ)

$CE = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$ $4\sqrt{5}$ (по теореме пифагора)

$AF = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$ (по теореме пифагора

$$\begin{cases} CE + BE = BC \\ AF + BE = AB \\ BE = \frac{1}{2} AB \\ AF = \frac{1}{2} BC \\ CE = 4\sqrt{5} \\ AF = \sqrt{5} \end{cases}$$

$CE + \frac{1}{2} AB = BC$ $\quad \sqrt{5} + \frac{1}{2} BC = AB$

$AF + \frac{1}{2} BC = AB$

$4\sqrt{5} + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + \frac{1}{2} BC) = BC$

$4\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} BC = BC$

$\frac{9}{2}\sqrt{5} = \frac{3}{4} BC$

$6\sqrt{5} = BC$

$4\sqrt{5} + \frac{1}{2} AB = 6\sqrt{5}$

$AB = 4\sqrt{5}$

$BC = 6\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{21}$

~~sin ABC~~

$4 \cdot 21 = 80 + 180 - 2\cos(ABC) \cdot 120$

$240\cos(ABC) = 176$

$\cos(ABC) = \frac{176}{240} = \frac{44}{60} = \frac{11}{15}$ $\quad \sin ABC = \sqrt{1 - \frac{121}{225}} = \sqrt{104}$

$S_{ABC} = AB \cdot CF \cdot \frac{1}{2}$

$S_{ABC} = 4\sqrt{5} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 18\sqrt{5}$

$R_{ABC} = \frac{AC}{2\sin ABC} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{26}}$

Ответ: $\cos ABC = \frac{11}{15}$; $18\sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{26}}$

211005834 (U152630 M1276736)

Чистовик стр №1

№2.

a – наименьшее число

c – наибольшее

3597

b – сумма всех оставшихся

$$\begin{cases} 35a + b + c = 592 \\ a + b + 16c = 592 \end{cases}$$

$34a - \cancel{94}^{15}c = 0$

$34a = 15c$

$c = \frac{34}{15} \cdot a \Rightarrow a \vdots 15$

$\left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b > 0 \end{array}\right.$, если $b = 0$, то $35a + \frac{34}{15}a = 592$

$a = \frac{592 \cdot 15}{35 \cdot 15 + 34} \notin \mathbb{Z}$ $\Bigg| \Rightarrow b \neq 0$

$35a + a + \frac{34}{15}a < 592$

~~36 ... 38~~

$38\frac{4}{15}a < 592$

$\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ a \leq 15 \\ a \vdots 15 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 15 \end{array}\right.$, если $a = 0$, то $c = 0$, тогда $35a + b + c = 0$

, если $a = 15$, то $c = 34$

$35 \cdot 15 + b + 34 = 592$

$525 + 34 + b = 592$

$559 + b = 592$

$b = 33$

$b = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$\begin{array}{l} c > b_i > a \\ 34 > b_i > c \end{array} \Bigg| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = b_1 + b_2 \quad b_1 = 16 \quad b_2 = 17 \\ b = b_1 \quad b = 33 \end{array}\right.$ Ответ: 15, 16, 17, 34; 15, 33, 34

Часть 2

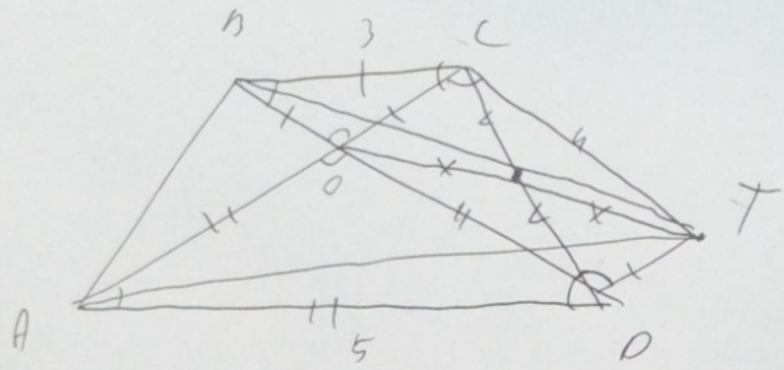
Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005834**

ID профиля: **152630**

Вариант 16

черновик



211005834 (U152630 M1276737)

Черновик

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19$

$2x^4+2y^4-x^2y^2=38$

$2x^4-2x^2+2y^4-2y^2=36$

$2x^2(x^2-1)+2y^2(y^2-1)=36$

$2x^2(x-1)(x+1)+2y^2(y-1)(y+1)=36$

$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4-2x^2y^2+1{,}5x^2y^2=19$

$x^2(x^2-1)+y^2(y^2-1)=18$

$1+\frac{b^2}{7}$

$\cancel{(x^2+1)(y^2+1)=x^2y^2+x^2+y^2+1+3x^2}$

$2(x+y)^2-4xy$

$2\cdot a^2-4b-b^2=2$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=((x+y)^2-2xy)^2-2xy^2$

$(a^2-2b)^2-2b^2-\frac{1}{2}b^2=19$

$a^4-4a^2b+4b^2-2b^2-\frac{1}{2}b^2=19$

$$\begin{cases} a^4-4a^2b+1{,}5b^2=19 \\ 2a^2-4b-b^2=2 \end{cases}$$

$q^2-4qb+4b^2$

$$\begin{cases} q^2-4qb+1{,}5b^2=19 \\ 2q-4b-b^2=2 \end{cases}$$

$q=1+\frac{b^2}{2}+2b$

$\left(1+\frac{b^2}{2}+2b\right)^2-4$

$q=\sqrt{6}$

$a^2=q$

$a^4-4a^2q^2+1{,}5q^4=19$

$2a^2-4q^2-q^4=2$

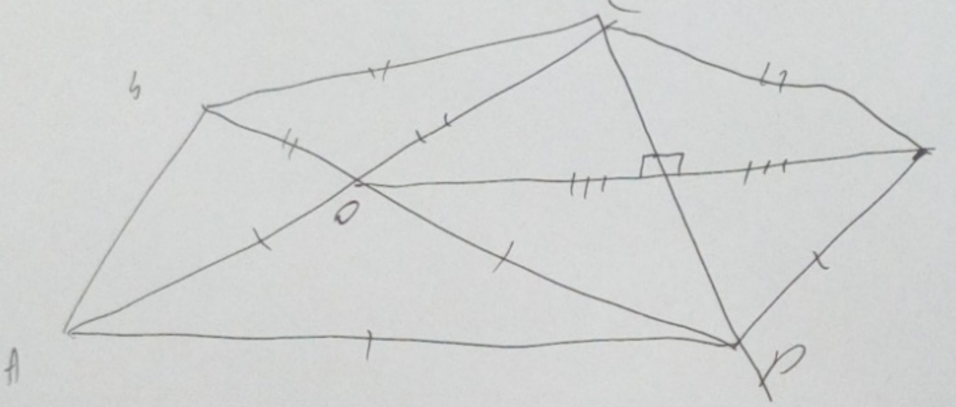
Черновик

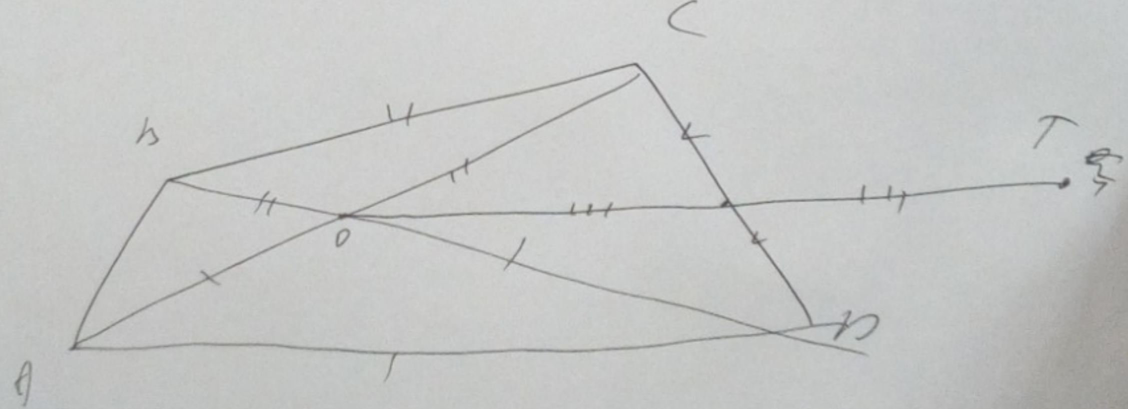
$16 \cdot \cancel{(15 \cdot 157}$

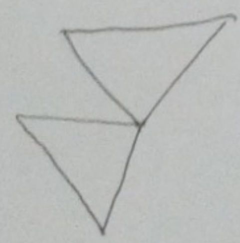
$16 \cdot 15\,14 + 8 \cdot 15 = 8 \cdot 15\,(14 \cdot 2 + 1) = 8 \cdot 15 \cdot 29$

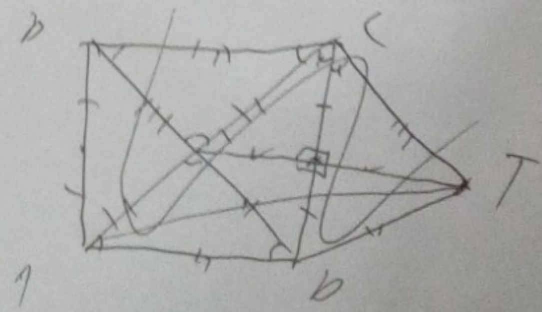
$\frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15$

~6.









Черновик

$(\ldots + \frac{b^2}{2} + 2b)^2 - 4(7 + \frac{b^2}{2} + 2b)b + 1,5b^2 = 19$

$\ldots + \frac{b^4}{4} + 4b^2 + 7b^2 + 4b + 2b^3 - 4b - 2b^3 - 8b^2 + 1,5b^2 = 19$

$\ldots + 2b^3 - 2b^3 + 4b^2 + b^2 - 8b^2 + 1,5b^2 + 4b - 4b + 7 - 19 = 0$

$\ldots - 1,5b^2 - 18 = 0$

$r = \frac{b^2}{2}$

$r^2 - 3r - 18 = 0$

$D = 9 + 18 \cdot 4 = 81$

$r = \frac{3+9}{2} = 6$

$r = \frac{3-9}{2} < 0$

$6 = \frac{b^2}{2}$

$12 = b^2$

$b = \sqrt{12}$

$q = 7 + \frac{12}{2} + 2\sqrt{12} = 7 + 2\sqrt{12}$

$q = a^2$ $\qquad x + y = \pm\sqrt{7 + 2\sqrt{12}}$

$a^2 = 7 + 2\sqrt{12}$ $\qquad xy2$

$a = \pm\sqrt{7 + 2\sqrt{12}}$

черновик стр №5

⇒ ~~BD~~ = $CD = AT = AB$ (по свойству равнобокой трапеции)

Проведём аналогичные рассуждения для ~~Δ~~ $BCTD$

$AT = BT = AB \Rightarrow \Delta ABT$ равносторонний

Решение

$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2\cos(COD)\, CO \cdot OD$ (по теореме косинусов)

$CD = \sqrt{3^2+5^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5} = \sqrt{9+25+15} = 7$

BH – высота $ABCD$

$AH = \frac{AD-BC}{2}$ (по св. равнобокой трапеции)

~~AH~~ $= AH = \frac{5-3}{2} = 1$

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$ (по теореме пифагора

$BH = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

$S_{ABCD} = \sqrt{48} \cdot \frac{BC+AD}{2} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{5+3}{2} = 16\sqrt{3}$

~~ΔAB~~

$S_{ABT} = \frac{7^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (по св. ~~равнобе~~ равностороннего Δ)

$S_{ABT} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

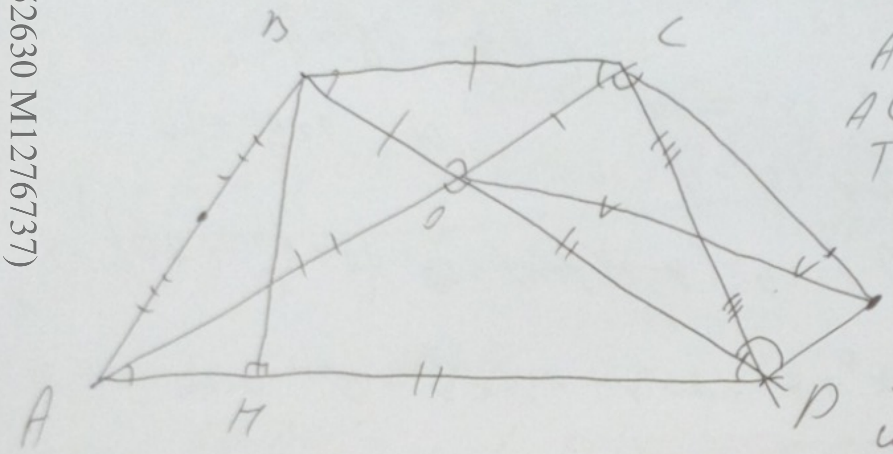
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \cancel{\frac{16\sqrt{3}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}}} = \frac{\frac{49\sqrt{3}}{4}}{16\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$

Ответ: $\frac{49}{64}$

всего способов — чистовик стр. ...

$16 \cdot 15 \cdot 14 + \frac{16 \cdot 15}{2} = 8 \cdot 15(2 \cdot 14 + 1) = 8 \cdot 15 \cdot 29$

№6



Дано

$ABCD$

$AC \cup BD = O$

T симметрична O относительно T по середине CD

BOC, AOD — равносторонние

а) Доказать $\triangle ABT$ равносторонний

б) $BC = 3$, $AB = 5$

Найти $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Док-во Доказательство

$\angle CAD = \angle AOD = \angle ODA = \angle BOC = \angle OCB = \angle CBO = 60^\circ$ =

$\angle COD = \angle BOA = 120^\circ$

$\Rightarrow ABCD$ равнобедренная трапеция $AB = CD$ (по

$AD \parallel BC$ (по признаку равнобедренной трапеции и параллельности прямых)

OT — удвоенная медиана в $\triangle COD \Rightarrow \triangle COD = \triangle CTD$,

$OCTD$ — параллелограмм

$\angle COD = \angle CTD = 120^\circ \Rightarrow \angle TDO = \angle OCD = 60^\circ = \angle CAD$

$\angle CAD = \angle OCD$, $CO \parallel TD$ $\Rightarrow$ $ADTC$ — равнобокая трапеция =

Чистовик стр №3

$$r^2-\sqrt{7+2\sqrt{12}}\,r+\sqrt{12}=0 \qquad D=7+2\sqrt{12}-4\sqrt{12}=7-2\sqrt{12}>0$$

$$r^2+r\cdot\sqrt{7+2\sqrt{12}}+\sqrt{12}=0 \qquad D=7+2\sqrt{12}-4\sqrt{12}=7-2\sqrt{12}>0$$

$$r^2+r\sqrt{7-2\sqrt{12}}-\sqrt{12}=0 \qquad D:7-2\sqrt{12}+4\sqrt{12}=7+2\sqrt{12}>0$$

$$r^2-r\sqrt{7-2\sqrt{12}}-\sqrt{12}=0 \qquad D:7-2\sqrt{12}+4\sqrt{12}=7+2\sqrt{12}>0$$

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{7+2\sqrt{12}}+7-2\sqrt{12}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{7+2\sqrt{12}}-7+2\sqrt{12}}{2} \end{cases} \\
\begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{7+2\sqrt{12}}+7-2\sqrt{12}}{2} \\ y=\dfrac{-\sqrt{7+2\sqrt{12}}-7+2\sqrt{12}}{2} \end{cases} \\
\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{7-2\sqrt{12}}+7+\sqrt{12}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{7-2\sqrt{12}}-7-\sqrt{12}}{2} \end{cases} \\
\begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{7-2\sqrt{12}}+7+\sqrt{12}}{2} \\ y=\dfrac{-\sqrt{7-2\sqrt{12}}-7-\sqrt{12}}{2} \end{cases}
\end{array}\right.$$

~~уравнение~~

А также все решения, где x и y поменяли местами

№5

~~Предположим~~ Посчитаем сколько способов выбрать карты 2, где только 1 дубль 16 дублей и 15·14, ~~а~~ так чтоб числа не повторялись 16·15·14, посчитаем сколько способов если обе дубли 16 ~~на~~ первая карта 15 вторая карта и 2 варианта перестановок ~~16·16~~ $\frac{16\cdot 15}{2}$

Чистовик стр

$1+2b^2+\frac{b^4}{4}+4b+b^2+2b^3-4b-8b^2-2b^3+1{,}5b^2=\cancel{19}\ 19$

$\frac{b^4}{4}+2b^3-2b^3+2b^2+1{,}5b^2+4b^2-8b^2+4b-4b+1-19=0$

$\frac{b^4}{4}-1{,}5b^2-18=0 \ |\cdot 4$

$b^4-6b^2-18=0$

$q^2-6q-4\cdot18=0$

$D=36+4\cdot4\cdot18=4(9+72)=81\cdot4$

$\left[\begin{array}{l} q=\frac{6+2\cdot9}{2}=12 \\ q=\frac{6-2\cdot18}{2}=-6 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b^2=12 \\ b^2=-6 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} b=\sqrt{12} \\ b=-\sqrt{12} \end{array}\right.$

$p=1+2b+\frac{b^2}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\sqrt{12} \\ p=1+2\sqrt{12}+6=7+2\sqrt{12} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\sqrt{12} \\ p=1-2\sqrt{12}+6=7-2\sqrt{12} \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\sqrt{12} \\ \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{7+2\sqrt{12}} \\ a=-\sqrt{7+2\sqrt{12}} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\sqrt{12} \\ \left[\begin{array}{l} a=-\sqrt{7-2\sqrt{12}} \\ a=\sqrt{7-2\sqrt{12}} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

$p=a^2$

$\begin{cases} x+y=\sqrt{12} \\ xy= \end{cases}$

Составим уравнения по теореме Виета

Чистовик №1 стр №1

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$x+y=a$

$xy=b$

$\cancel{2x^2}$

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2$

$2(x+y)^2-\cancel{2}4xy-x^2y^2=2$

$2\cdot a^2-\cancel{2}4b-b^2=2$

$x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19$

$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2-\frac{1}{2}x^2y^2=19$

$((x+y)^2-2xy)^2-2x^2y^2-\frac{1}{2}x^2y^2=19$

$(a^2-2b)^2-2b^2-0{,}5b^2=19$

$a^4-4ba^2+4b^2-2b^2-0{,}5b^2=19$

$a^4-4ba^2+1{,}5b^2=19$

$p=a^2$

$q=b^2$

$$\begin{cases} 2a^2-4b-b^2=2 \\ a^4-4ba^2+1{,}5b^2=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2p-4b-b^2=2 \\ p^2-4bp+1{,}5b^2=19 \end{cases}$$

$2p-4b-b^2=2$

$p=1+2b+\frac{b^2}{2}$

$p^2-4bp+1{,}5b^2=9$

$\left(1+2b+\frac{b^2}{2}\right)^2-4\left(1+2b+\frac{b^2}{2}\right)b+1{,}5b^2=19$