Часть 1

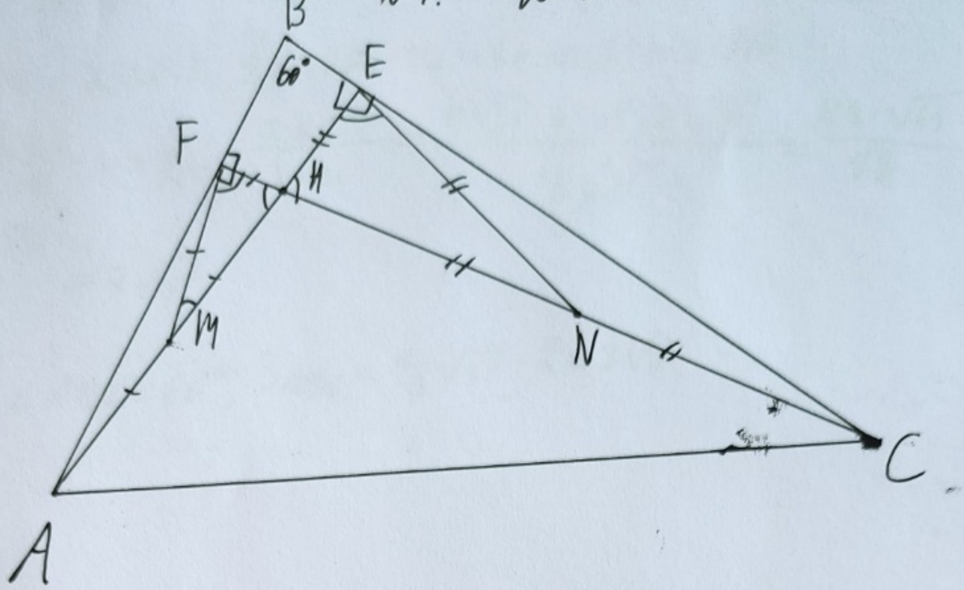
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005730**

ID профиля: **279084**

Вариант 16

№1. Шитовик



Заметим, что FM — медиана в прямоугольном △-ке △AFH ⇒ $FM = AH = HM = 1$. Аналогично, $EN = CN = HN = 4$

$FM \parallel EN \Rightarrow \angle HMF = \angle HEN$ — как накр. леж.

$\angle HEN = \angle NHE$ — как в равнобедр. △-ке, а $\angle NHE = \angle MHF$ — как вертикальные, $\angle MHF = \angle MFH$ — как в равнобедр. ⇒ в △-ке MFH все углы равны ⇒ MFH — равносторонний ⇒ $FH = FM$.

В △HNE также содержатся 2 данных угла ⇒ он тоже равносторонний ⇒ $EH = EN$

△AFH — прямоугольный, $\frac{FH}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle FAH = 30^\circ \Rightarrow \angle AHF = 60^\circ \Rightarrow$ $\angle FHE = 120^\circ$ — как внешний.

$\angle ABC = 360^\circ - \angle BFH - \angle BEH - \angle FHE = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$AE = 2 \cdot FM + EN = 2 + 4 = 6 \qquad CF = 2 \cdot EN + FM = 8 + 1 = 9$

~~cos∠ABC=~~ $\sin\angle ABC = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AE}{\sin 60^\circ} = \frac{2AE}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{CF \cdot AB}{2} = \frac{9 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$

$\sin\angle ABC = \frac{CF}{BC} \Rightarrow BC = \frac{CF}{\sin 60^\circ} = \frac{2CF}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

1

211005730 (U279084 M1277148)

чистовик

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC = 16 \cdot 3 + 36 \cdot 3 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} =$

$= 48 + 108 - \cancel{2} \cdot 24 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 156 - 72 = 84 \Rightarrow AC = 2\sqrt{21}$

$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S_{ABC}} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 6\cancel{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{21}}{18\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{48 \cdot \sqrt{63}}{18} =$

$= \frac{\cancel{48}^{8} \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{7}}{\cancel{18}_{6}} = 8\sqrt{7}$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{ABC} = 18\sqrt{3}$; $R = 8\sqrt{7}$.

2

№2. Чистовик

Выпишем все числа в порядке убывания: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$(a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n)$

Имеем: $\begin{cases} 35a_1 + a_2 + \dots + a_n = 592 & (1) \\ a_1 + a_2 + \dots + 16a_n = 592 & (2) \end{cases}$

$(1)-(2)$: $34a_1 - 15a_n = 0$

$34a_1 = 15a_n \Rightarrow a_1 \vdots 15,\ a_n \vdots 34.$

Если $a_1 \geq 30$, то $35a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 700 + a_2 + \dots + a_n \geq 700$ – не уд $\Rightarrow$

$a_1 = 15$

$34 \cdot 15 = 15 \cdot a_n \Rightarrow a_n = 34$

$35 \cdot 15 + a_2 + \dots + a_{n-1} + 34 = 592$

$525 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + 34 = 592$

$a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 33.$

Если кроме a_1 и a_n существует только 1 число, то оно равно 33.

1) 15, 33, 34: $35 \cdot 15 + 33 + 34 = 525 + 67 = 592$

$15 + 33 + 34 \cdot 16 = 48 + 544 = 592$ – уд.

Если кроме a_1 и a_n существует 2 числа, то их сумма $= 33$.

Она достигается единственным способом при $a_2 = 16$, $a_3 = 17$:

2) 15, 16, 17, 34: $35 \cdot 15 + 16 + 17 + 34 = 525 + 67 = 592$

$15 + 16 + 17 + 16 \cdot 34 = 48 + 544 = 592$ – уд.

Если кроме a_1 и a_n существует не менее 3 чисел, то их сумма $= 33$. Но она составляет минимум $16 + 17 + 18 = 51$ – не уд

Ответ: 2 набора: $\{15; 33; 34\}$ и $\{15; 16; 17; 34\}$

3

№3 Чистовик

Преобразуем уравнение окружности:

$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0$

$(a^2x^2-2ax(2a^2+1)+(2a^2+1)^2)-(2a^2+1)^2+(a^2y^2+2a^2y+a^2)-a^2+$
$+4a^4+1=0$

$(ax-(2a^2+1))^2\cancel{-4a^4}-4a^2\cancel{-1}+(ay+a)^2-a^2\cancel{+4a^4}\cancel{+1}=0$

$(ax-2a^2-1)^2+a^2(y+1)^2=5a^2$

~~1)~~ Если $a=0$, то:

$(-1)^2+0=0$

$1=0$ – не уд. Значит, мы можем поделить уравнение на a^2.

$(x-2a-\frac{1}{a})^2+(y+1)^2=5$ – Центр окр.-ти находится в точке $O(2a+\frac{1}{a};-1)$

~~Теперь преобразуем первое уравнение~~

~~1. $2a+\frac{1}{a}>3$ (1) Тогда в любом из решений 1-го уравнения~~
~~$x\geq 3$~~

~~Если $a<0$, то (1) не верна $\Rightarrow a>0$~~

$\cancel{2a^2+1>3a}$

$\cancel{2a^2+1>3a}$

$\cancel{2a^2-3a+1>0}$

$\cancel{(2a^2-2\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{9}{8})-\frac{9}{8}+1>0}$

$\cancel{(\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}})^2-\frac{1}{8}>0}$

$\cancel{(\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}})^2-(\frac{1}{2\sqrt{2}})^2>0}$

4

Теперь преобразуем первое уравнение: Чистовик

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

$(y^2+2ay+a^2)+4a^2-4ax+4ay+x^2-2xy+y^2=0$

$(y+a)^2+(x^2+y^2+4a^2-2xy-4ax+4ay)=0$

$(y+a)^2+(y+2a-x)^2=0$

$\begin{cases} y=-a \\ x=y+2a \end{cases}$ $\begin{cases} x=a \\ y=-a \end{cases}$

I сл. a лежит правее $x=3 \Rightarrow a>3$.

Тогда $2a+\frac{1}{a}<3$ $(\cdot a$, знак не меняем, т.к. $a>0)$

$2a^2+1<3a$

$2a^2-3a+1<0$

$\left(2a^2-2\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{9}{8}\right)-\frac{9}{8}+1<0$

$\left(\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{8}<0$

$\left(\sqrt{2}a-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2<0$

$\left(\sqrt{2}a-\frac{4}{2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}a-\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)<0$ $(\cdot 2\sqrt{2})$

$(4a-4)(4a-2)<0$ $(:8)$

$(a-1)(2a-1)<0$ $(:2)$

$(a-1)(a-0,5)<0$

$+ \quad 0,5 \quad - \quad 1 \quad +$

$\begin{cases} 0,5<a<1 \\ a>3 \end{cases}$ $-\ a\in\varnothing$

II сл. a лежит левее $x=3 \Rightarrow a<3$

Тогда $2a+\frac{1}{a}>3$. (3)

5

Если $a<0$, то (3) не имеет решений $\Rightarrow a>0 \Rightarrow$ умножаем-

Нормально на 0, не меняя знака числителя

$2a^2+1>3a$

$2a^2-3a+1>0$ – решения противоположны пред. нер-ву $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a\in(-\infty;0{,}5)\cup(1;+\infty) \\ a>0 \\ a<3 \end{cases} \Rightarrow a\in(0;0{,}5)\cup(1;3)$$

Ответ: $a\in(0;0{,}5)\cup(1;3)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005730**

ID профиля: **279084**

Вариант 16

№1. Черновик

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{7}{2}x^2y^2=79 \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} a=x^2 \\ b=y^2 \end{cases}$ $\quad a\geq 0$ $\quad b\geq 0$

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \quad (1) \\ a^2+b^2-\frac{7}{2}ab=79 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $2a+2b=ab+2$ $(:2)$

$a+b=\frac{7}{2}ab+1$ $(^2)$

$a^2+2ab+b^2=\frac{7}{4}a^2b^2+ab+1$

$a^2+b^2=\frac{7}{4}a^2b^2-ab+1$

$a^2+b^2=(\frac{7}{2}ab-1)^2$ (3)

подставим (3) в (2): $(\frac{7}{2}ab-1)^2-\frac{7}{2}ab=79$.

Замена: $t=\frac{7}{2}ab$

$(t-1)^2-t=79$

$t^2-3t-78=0$

$D=9+72=81$

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{3+9}{2}=6 \Rightarrow ab=12 \Rightarrow b=\frac{12}{a} \quad \text{и} \quad a>0,\ b>0 \\ t=\frac{3-9}{2}=-3 - \text{не уд, т.к. } a\geq 0 \text{ и } b\geq 0 \end{array}\right.$

$2a+2\cdot\frac{12}{a}-12=2$ $(\cdot a)$

$2a^2+24=14a$ $(:2)$

1

$a^2-7a+12=0$

$(a-3)(a-4)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=4 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} b=4 \\ a=3 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} y=\pm 2 \\ y=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Ответ: $\{(-2;-\sqrt{3});(-2;\sqrt{3});(-\sqrt{3};-2);(-\sqrt{3};2);(\sqrt{3};-2);(\sqrt{3};2);$
$;(2;-\sqrt{3});(2;\sqrt{3})\}$

2 №2. Шеповик

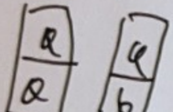
Любые карточки можно вытащить $\frac{256\cdot255}{2} = 128\cdot255$

Всего дублей 16 $\Rightarrow$ вытянуть 2 карточки без дубля можно $\frac{240\cdot239}{2} = 120\cdot239$ способами.

Всего способов вытянуть хотя бы 1 дубль: $128\cdot255-120\cdot239 = 8\cdot(16\cdot255-15\cdot239) = 40\cdot(16\cdot51-3\cdot239) = 120\cdot(16\cdot17-239) = 120\cdot(272-239) = 120\cdot33 = 3960$.

~~Всего карточек где встречается заданное число равно 16, 15 ... в пару к дублю подходят 240 карточек из 255 ⇒ искомых способов 3960·240/255 =~~

Далее рассмотрим способы, где одна карточка – дубль, а на другой встречается то же самое число

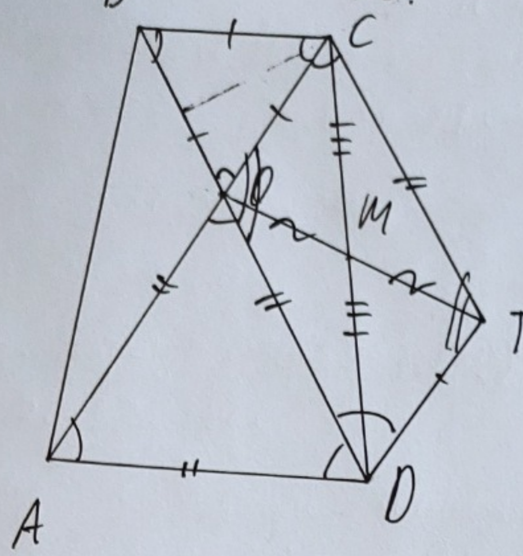


Всего способов выбрать такую пару $16\cdot15=240$. Значит, искомых способов $3960-240=3720$

Ответ: 3720 способов.

3

№3. Чистовик



а) Пусть M – середина CD, тогда $M \in OT$ и $OM = TM$.
CD и OT пересекаются и делятся пополам $\Rightarrow$ DOCT – ▱-м $\Rightarrow$ $DT = OC$, $CT = OD$.
Далее заметим, что $\angle OAD = \angle ADO = \angle DOA = \angle OBC = \angle OCB = \angle BOC = 60° \Rightarrow \angle OCB = \angle OAD \Rightarrow AD \parallel BC$. Также $AC = BD \Rightarrow ABCD$ – равнобедр. трапеция или ▱-к $\Rightarrow AB = CD$.
$\angle COD = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120°$ – как смежные
$\angle CTD = \angle COD = 120°$
$\angle OCT = 180° - \angle COD = 60°$ } – как в ▱-ме.
$\angle ODT = \angle OCT = 60°$
Тогда $\angle BCD = 2 \cdot 60° = 120°$.

1

$\Delta BCT = \Delta DCT$ по I-му признаку $\Rightarrow BT = CD = AB$.
Аналогично, $\angle ADT = 2 \cdot 60° = 120°$ и $\Delta ADT = \Delta CDT$ по I-му признаку $\Rightarrow AT = CD = AB$.
Значит, $AB = AT = BT \Rightarrow \Delta ABT$ – равносторонний, ч.т.д.
б) $BC = 3$, $AD = 5 \Rightarrow BO = 3$, $AO = 5 \Rightarrow AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos 120° = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 34 + 30 \cdot \frac{1}{2} = 34 + 15 = 49 \Rightarrow AB = 7$

$$S_{ABT} = \sqrt{\overset{\text{четверик}}{1{,}5a \cdot 0{,}5a \cdot 0{,}5a \cdot 0{,}5a}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{8}}\, a^2 = \sqrt{\frac{3}{16}}\, a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ACD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot h_{AD}}{2} \Rightarrow h_{AD} = \frac{2S_{ACD}}{AD} = \frac{20\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AD+BC) \cdot h_{AD}}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{49\sqrt{3}}{4}}{16\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49}{64}$

5