Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005658**

ID профиля: **252454**

Вариант 16

Черновик

$$\begin{cases} x\cdot 35+a+y=592 \\ x+a+y\cdot 16=592 \end{cases}$$

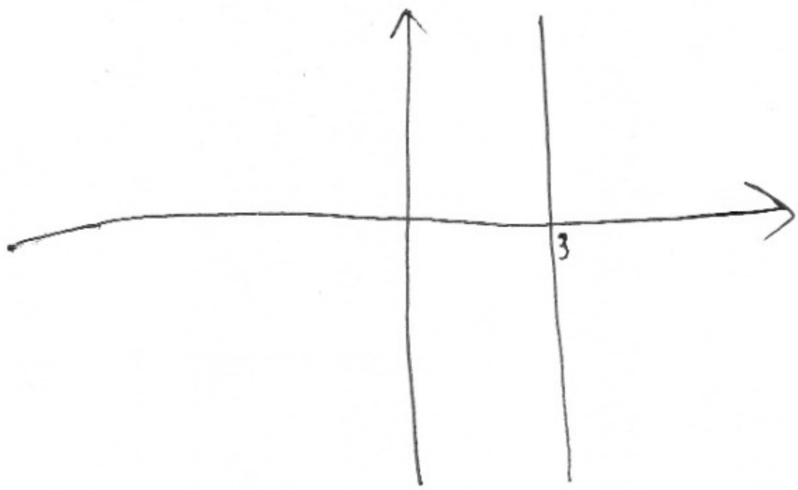
$34x-15y=0$

$y=\frac{34}{15}x$

$x=15k \Rightarrow x=15.$

$y=34k \Rightarrow y=34$

$$\begin{array}{r} \times\ 34 \\ 16 \\ \hline 204 \\ +\ 34 \\ \hline 544 \\ +\ 15 \\ \hline 559 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 15 \\ 35 \\ \hline 75 \\ +\ 45 \\ \hline 525 \\ +\ 34 \\ \hline 559 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 592 \\ 559 \\ \hline 33 \end{array}$$



~~R~~

1. A слева $x\le 3$
   B справа $x\ge 3$

$5a^2-4ax+6ay+x^2-2xy+2y^2=0$

~~$x^2-x(4a+2y)+5a^2+6ay=0$~~

~~$D=(4a+2y)^2-4(5a^2+6ay)=16a^2+16ay+4y^2-20a^2-24ay=4(y^2-8ay-4a^2)$~~

~~$x_{1,2}=\frac{4a+2y\pm 2\sqrt{y^2-8ay-4a^2}}{2}=2a+y\pm\sqrt{y^2-8ay-4a^2}$~~

~~$(2a+y+\sqrt{y^2-8ay+4a^2};y)$~~

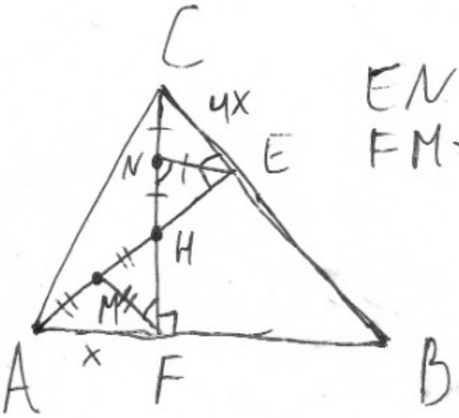
$x^2-x(4a+2y)+5a^2+6ay+2y^2$

$D=16a^2+16ay+4y^2-20a^2-24ay-8y^2=$ ~~$8y^2-8ay-4y^2=$~~

~~$4(2y^2-2ay-y^2)$~~ $=-8y^2-8ay-4a^2=-4(2y^2+2ay+a^2)$

211005658 (U252454 M1276794)

Черновик



$EN = 1$

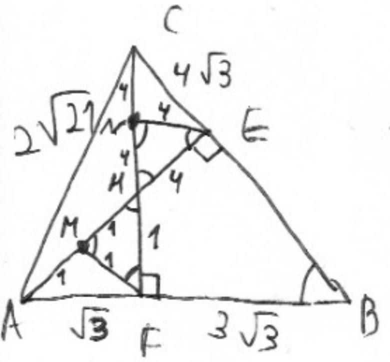
$FM = 4$

$\triangle MHF \sim \triangle EHN \quad \frac{1}{4}$

$AH = 2$

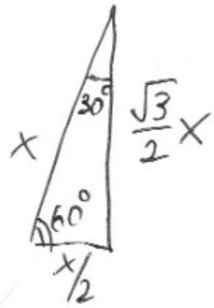
$CH = 8$

$$\frac{AF}{CE} = \frac{1}{4} = \frac{HF}{HE}$$



$$\frac{AF}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{\angle ABC = 60^\circ}$



$$tg\,30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{FB}{CF} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad 9/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{9 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}}$$

$81 + 3 = 84$

$\sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

$2\sqrt{21} = 2R \sin 60^\circ = \sqrt{3} R$

$\boxed{R = 2\sqrt{7}}$

Черновик

$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0$

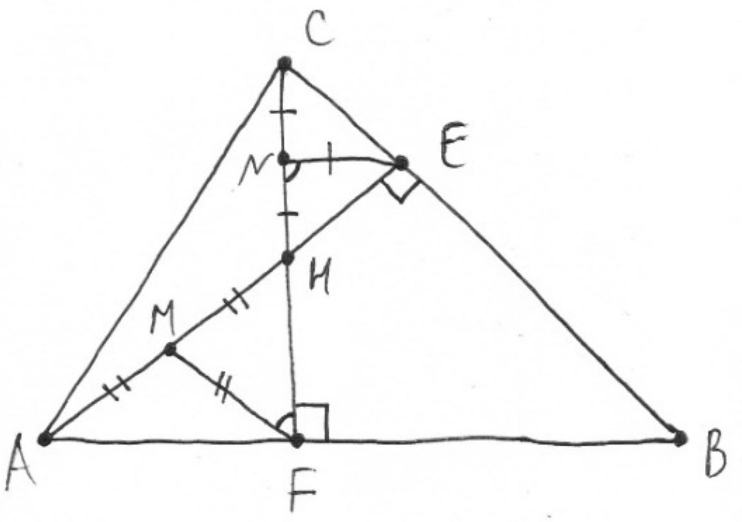
$x^2\cdot a^2-x(4a^3+2a)+a^2y^2+2a^2y+4a^4+1=0$

$\cancel{D=16a^6+16a^4+4a^4+a^2y^2+2a^2y+4a^2+1=16a^6+20a^4+a^2(y^2+2y+4)+1}=$

$=16a^6+20a^4+$

211005658 (U252454 M1276794)

№1



По условию, $\triangle AHF$ и $\triangle CHE$ — прямоугольные. Также, по условию, $AM=MH$ и $CN=NH$. Тогда FM и EN — медианы, проведённые к гипотенузам прямоугольных треугольников, т.е. $MA=MH=MF=1$ и $NC=NH=NE=4$.

Поскольку $FM \parallel EN$ (по условию), то $\angle MFH=\angle ENH$ (как накрест лежащие). $\angle MHF=\angle EHN$ как вертикальные. Тогда $\triangle MHF \sim \triangle EHN$ с коэффициентом $\frac{1}{4}$, т.е. $\frac{MH}{HE}=\frac{FH}{HN}=\frac{MF}{NE}=\frac{1}{4}$. Как мы знаем, $MH=1$. Тогда $HE=4$. Также, $HN=4$, тогда $FH=1$. Итак, $MH=HF=MF=1$ и $HE=HN=NE=4$. Значит, $\triangle MHF$ и $\triangle EHN$ — правильные, и $\angle MFN=60^\circ=\angle HMF=\angle MHF=$ $=\angle NHE=\angle NEH=\angle HNE$.

$\angle MHF$ и $\angle FHE$ — смежные. Тогда $\angle FHE=120^\circ$. По сумме углов четырёхугольника FHEB получаем: $\boxed{\angle ABC=60^\circ}$.

Чистовик

№1 (продолжение)

Итак, мы получили, что $\angle ABC = 60^\circ$. Тогда по сумме углов ΔCFB имеем: $\angle FCB = 30^\circ$. Как известно, $tg\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Тогда $\frac{FB}{CF} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Заметим, что $CF = CH + HF = 2CN + HF = 9$.
Тогда $FB = \frac{CF}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.
По теореме Пифагора для ΔAHF: $AF = \sqrt{AH^2 - HF^2} = \sqrt{3}$.
Значит, $AB = AF + FB = 4\sqrt{3}$.
Имеем: $CF = 9$, $AB = 4\sqrt{3}$. Тогда $\boxed{S_{ABC} = \frac{AB \cdot CF}{2} = 18\sqrt{3}}$.

Опишем около ΔABC окружность. Тогда AC будет хордой этой окружности, и для неё будет верно: $AC = 2R \cdot \sin ABC$, где R – искомый радиус.
Как мы уже знаем, $\angle ABC = 60^\circ$ и $\sin ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
По теореме Пифагора для ΔACF: $AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.
Итак, $\boxed{R = \frac{AC}{2\sin ABC} = 2\sqrt{7}}$.

Ответ: 60°, $18\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$.

211005658 (U252454 M1276794)

Чистовик

№2

Пусть самое маленькое из записанных чисел равно x, самое большое равно y, а сумма всех остальных чисел равна z. Тогда по условию составляется система уравнений:

$$\begin{cases} 35x + z + y = 592 \\ x + z + 16y = 592 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем:

$34x - 15y = 0$

$34x = 15y$

$x = \frac{15}{34}y$

По условию, x и y — натуральные. Значит, число y представимо в виде $34k$, а число x — $15k$.

Пусть $k=1$. Тогда $16y = 544$. Видно, что если k сделать большим 1, то $16y$ будет больше 592, что невозможно, т.к. все числа натуральные. Значит, $k=1$ и $\begin{cases} x = 15 \\ y = 34 \end{cases}$.

Найдя x и y, легко понять, что $z = 33$. Найдём все варианты чисел, которые:

1. В сумме дают $z = 33$
2. Все больше $x = 15$ и меньше $y = 34$.
3. Все попарно различны.

Наименьшее из чисел, входящих в сумму z, не может быть меньше 16. Тогда в сумму z входит строго 2 числа — 16 и 17 (если это неверно, нарушается хотя бы одно из 3 условий выше). Легко понять, что больше вариантов нет.

Ответ: 15, 16, 17, 34.

Чистовик

№3

Рассмотрим уравнение для точки A: (координаты точки A — $(x_A; y_A)$)

$$5a^2-4ax_A+6ay_A+x_A^2-2x_Ay_A+2y_A^2=0$$

$$x_A^2-x_A(4a+2y_A)+5a^2+6ay_A+2y_A^2=0$$

$$D=(4a+2y_A)^2-4(5a^2+6ay_A+2y_A^2)=16a^2+16ay_A+4y_A^2-20a^2-24ay_A-8y_A^2=$$

$$=-4(a^2+2ay_A+y_A^2)=-4(a+y_A)^2$$

Поскольку $(a+y_A)^2\geq 0$, то $D\leq 0$. Значит, необходимо чтобы $(a+y_A)^2$ было равно 0, т. е. $y_A=-a$. Тогда:

$$x_{A_{1,2}}=\frac{4a+2y_A}{2}=2a+y_A=a$$

Рассмотрим уравнение для точки B:

$$a^2x^2+a^2y^2-4a^3x-2ax+2a^2y+4a^4+1=0$$

$$x^2\cdot a^2-x(4a^3+2a)+a^2y^2+2a^2y+4a^4+1=0$$

$$D=(4a^3+2a)^2-4a^2(a^2y^2+2a^2y+4a^4+1)=\cancel{16a^6}+16a^4+\cancel{4a^2}-4a^4y^2-$$

$$-8a^4y-\cancel{16a^6}-\cancel{4a^2}=4a^4(4-y^2-2y)=-4a^4(y^2+2y-4)$$

211005658 (U252454 M1276794)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

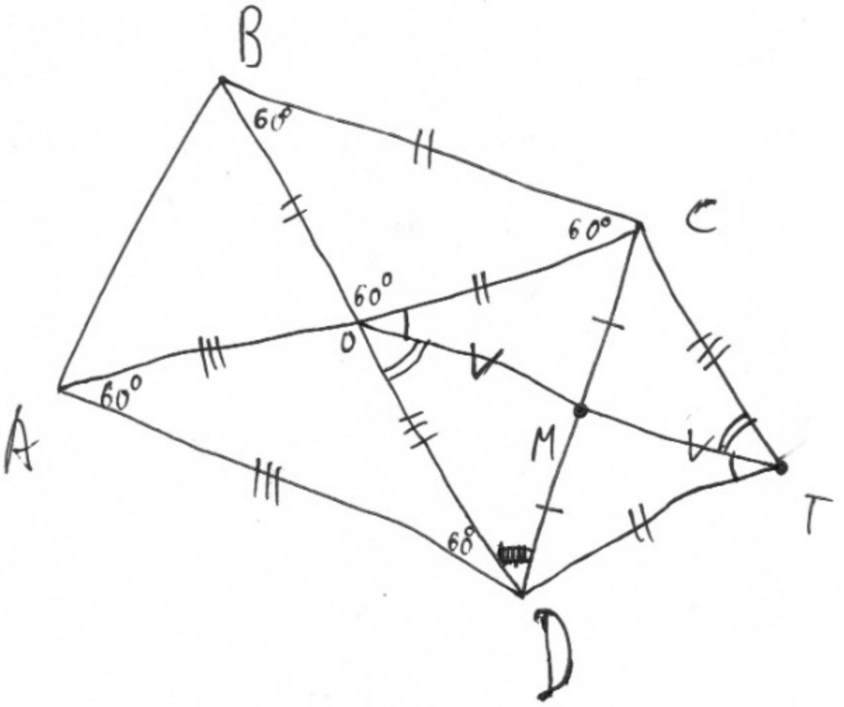
Шифр: **211005658**

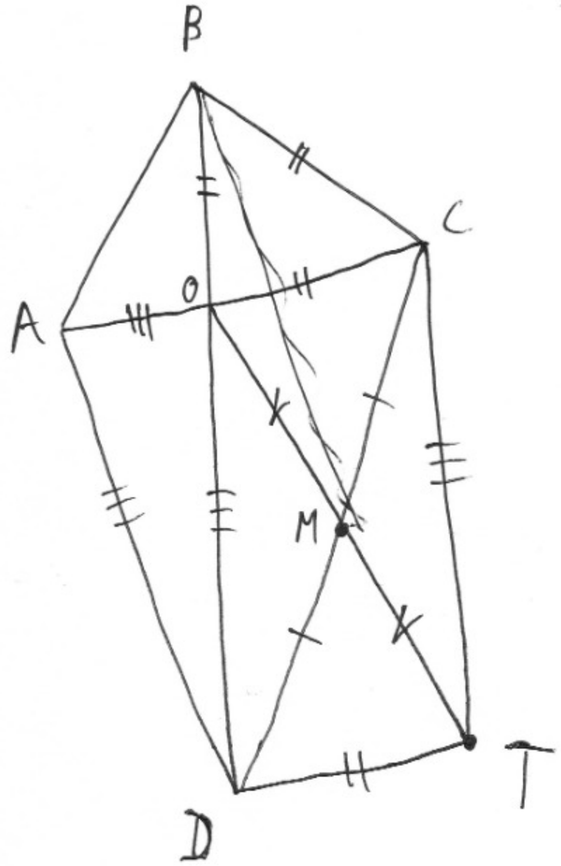
ID профиля: **252454**

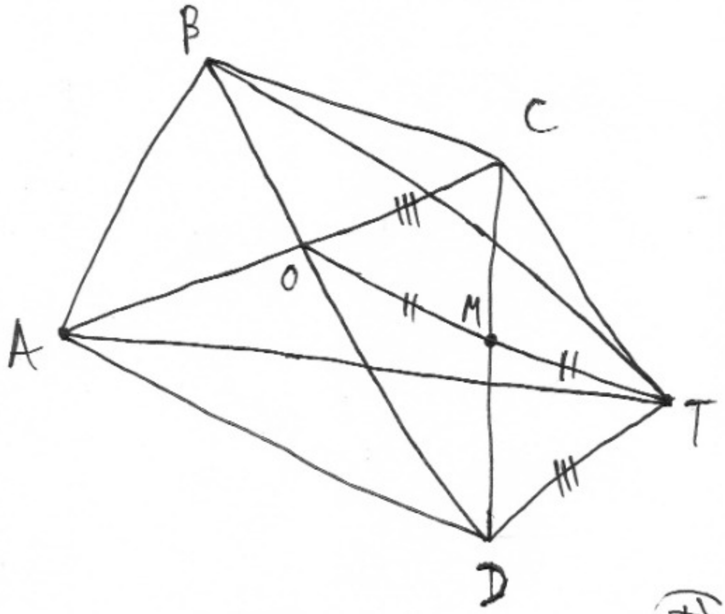
Вариант 16

Черновик

№ 6







$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x^2y^2=a$$

$$x^2+y^2=b$$

$$\begin{cases} 2b-2a=2 \Rightarrow b=1+a \\ b^2-4a-a=19 \end{cases}$$

$$(1+a)^2-5a=19$$

$$1+2a+a^2-5a=19$$

$$a^2-3a-18=0$$

$$(a-6)(a+3)=0$$

$$\begin{cases} a=6 \\ b=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2y^2=6 \\ x^2+y^2=7 \Rightarrow x^2=7-y^2 \end{cases}$$

$$(7-y^2)y^2=12$$

$$y^4-7y^2+12=0$$

$$(y^2-3)(y^2-4)=0$$

$$\begin{cases} y^2=3 \\ x^2=4 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2=4 \\ x^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Черновик

Дубль: 16

~~Не дубль (без учёта дубля): (16 · 15) · 2~~

Не дубль (с учётом дубля): (15 · 14) · 2

(16 + (15 · 14) · 2) — дубль + недубль

(16 + 15) — дубль + дубль

Итого — $16 + 30 \cdot 14 + 16 + 15 = \boxed{467}$

$14 \times 30 = 420$; $420 + 32 = 452$; $452 + 15 = 467$

16×15: 80, 16, 240; $\times 14$: 96, 14, 2560

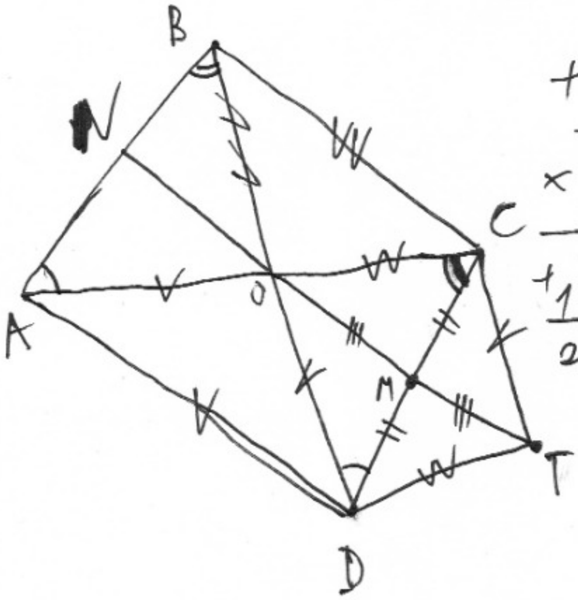
15×14: 60, 15, 750; $\times 16$: 450, 75, 12000

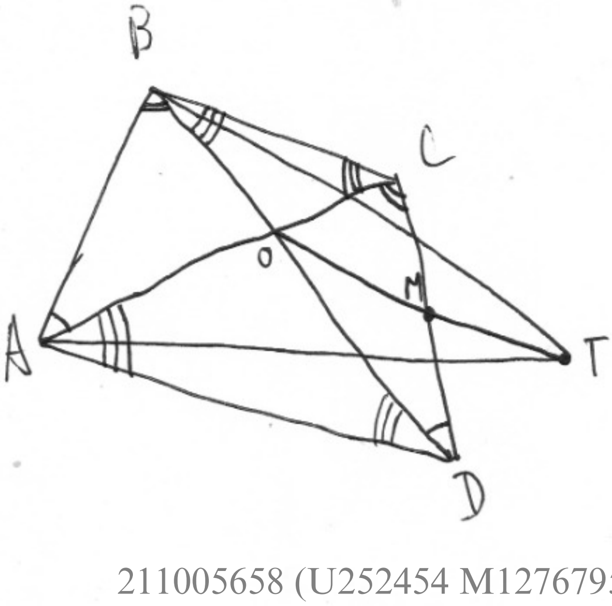
~~467 − 15~~; 64 + 9; 75 − 15 = 60

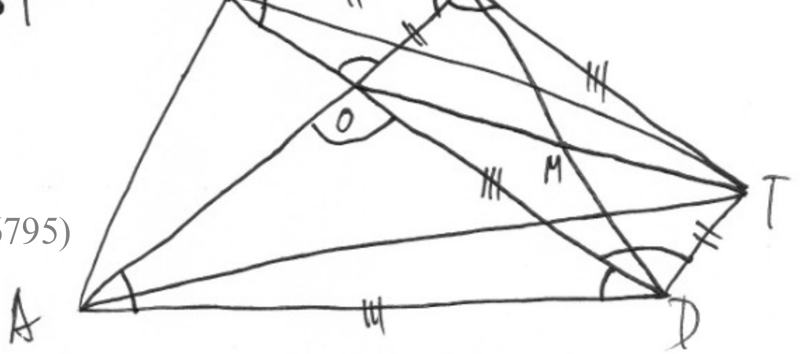
~~2560 : 130; 240; 160; 12~~

120×28: 96, 24, 3360

$3360 : 16 = 210$ (32, 16, 16, 0); $210 : 15 = 14$ (15, 60, 60, 0)







Чистовик

№4

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

Пусть $a=\frac{1}{2}x^2y^2$ и $b=x^2+y^2$:

$$\begin{cases} 2b-2a=2 \Rightarrow a=b-1 \\ (b^2-4a)-a=19 \end{cases}$$

$$b^2-4(b-1)-(b-1)=19$$

$$b^2-5b+5=19$$

b^2-5b [redacted] $14=0$

$$(b-7)(b+2)=0$$

Поскольку $x^2 \geqslant 0$ и $y^2 \geqslant 0$, то и $b=x^2+y^2 \geqslant 0$. Значит,

$$\begin{cases} b=7 \\ a=b-1=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2y^2=6 \\ x^2+y^2=7 \Rightarrow x^2=7-y^2 \end{cases}$$

$$(7-y^2)y^2=12$$

$$y^4-7y^2+12=0$$

$$(y^2-3)(y^2-4)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y^2=3 \quad ① \\ y^2=4 \quad ② \end{array}\right.$$

① $\begin{cases} y^2=3 \\ x^2=7-y^2=4 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 2 \end{cases}$

② $\begin{cases} y^2=4 \\ x^2=7-y^2=3 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm 2 \end{cases} \end{array}\right.$.

№5

Сколько есть у фокусника вариантов вытащить сначала дубль (предположим, что он вытаскивает карточки одну за другой)? 16 вариантов — когда на карточке написано 1-1, 2-2, ..., 16-16.

Теперь подсчитаем, сколькими способами фокусник может вытащить дубль, если первая карточка оказалась дублем. Таких вариантов 15 — любой дубль, кроме уже вытащенного. Итак кол-во вариантов случая «дубль-дубль» равно $16 \cdot 15$. Но фокусник вытаскивает карточки одновременно, т.е. всего вариантов $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$.

Пусть фокусник первым ходом вытащил дубль, а вторым не дубль. Посчитаем кол-во вариантов для этого случая. Первой картой может быть дубль в 16 способах. Чтобы числа не повторялись, вариантов для второй карты $2 \cdot (15 \cdot 14)$, где $15 = 16 - 1$ — кол-во вариантов чисел на красной стороне (кроме числа на дубле), $14 = 16 - 2$ — кол-во вариантов чисел на синей стороне (кроме числа на дубле и числа на красной стороне), а 2 — для каждой карточки-не-дубля существует такая же карточка, на которой числа поменяны местами. Итого для комбинации «дубль - не дубль» есть $16 \cdot (2 \cdot 15 \cdot 14)$ способов, но поскольку карточки вытаскиваются одновременно, то всего вариантов $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$.

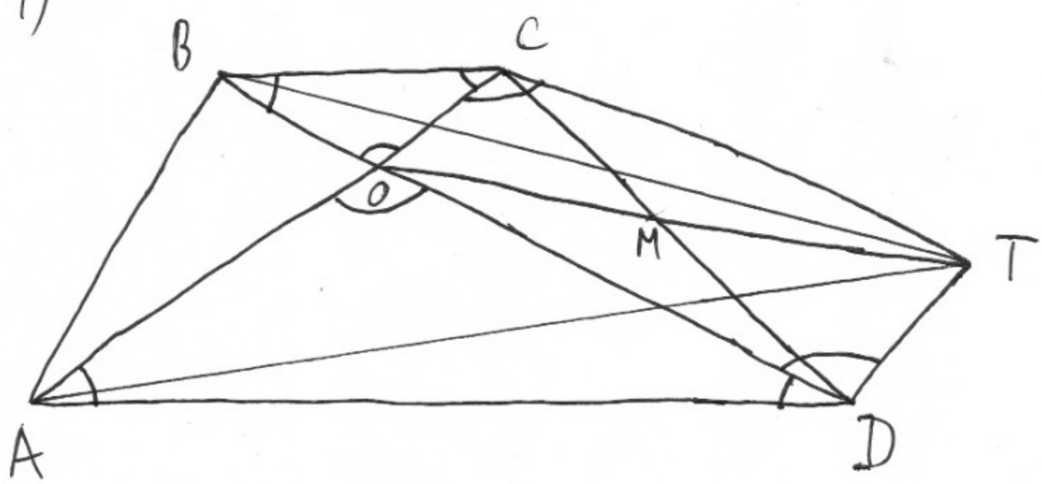
Если фокусник первым ходом вытащит не дубль, а вторым дубль, это в точности повторит случай «дубль-не дубль», поэтому этот вариант мы смотреть не будем.

Итого, $120 + 3360 = 3480$ вариантов.

Ответ: 3480 вариантов.

№6

1)



По условию, ΔAOD и ΔBOC — правильные, значит, $\angle OAD = 60^\circ = \angle ODA = \angle AOD = \angle OBC = \angle OCB = \angle BOC$.

$\angle AOD$ и $\angle COD$ — смежные. Значит, $\angle COD = 120^\circ$.

Поскольку по условию T симметрична O относительно середины CD (точка M), то $OM = TM$ и $CM = MD$. Тогда четырёхугольник $OCTD$ — параллелограмм.

Сумма соседних углов в параллелограмме равна 180°.

~~[illegible]~~

Значит, $\angle COD + \angle ODT = 180^\circ$ и $\angle ODT = 60^\circ$. А поскольку $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT$, то $\angle ADT = 120^\circ$. Аналогично, и $\angle OCT = 60^\circ$, и $\angle BCT = 120^\circ$.

Заметим, что по условию $AO = OD = AD$. Поскольку четырёхугольник $OCTD$ параллелограмм, то $OD = CT$. Значит, $AD = CT$. Аналогично и $DT = BC$.

Итак, $\Delta ADT = \Delta CTB$ по двум сторонам и углу. Значит, $AT = BT$.

~~[illegible]~~

№6 (продолжение)

1) (продолжение)

Из равенства $\triangle ATD = \triangle TBC$ имеем: $\angle ATD = \angle TBC$ и $\angle TAD = \angle CTB$.

Заметим, что $\angle CTD = 120°$ (т.к. $\angle COD = 120°$ и четырёхугольник $CODT$ — параллелограмм). А $\angle CTD = \angle CTB + \angle ATB + \angle ATD$. Поскольку $\angle ATD = \angle TBC$, то можно записать: $\angle CTD = \angle CTB + \angle ATB + \angle BTC$. По сумме углов треугольника: $\angle CTB + \angle TBC = 180° - \angle BCT = 60°$. Значит, $\angle ATB = \angle CTD - (\angle CTB + \angle TBC) = 60°$.

Итак, $\triangle ABT$ равнобедренный ($AT = BT$) и $\angle ATB = 60°$. Значит, $\angle BAT = \angle TBA = 60°$ и $AB = BT = TA$.

$\boxed{\text{ЧТД}}$

2) ~~Площадь четырёхугольника ABCD находим как~~ ~~$S_{ABCD} = AC \cdot BD \cdot \sin AOD$~~

Заметим, что четырёхугольник $ABCD$ — равнобокая трапеция. Докажем это.

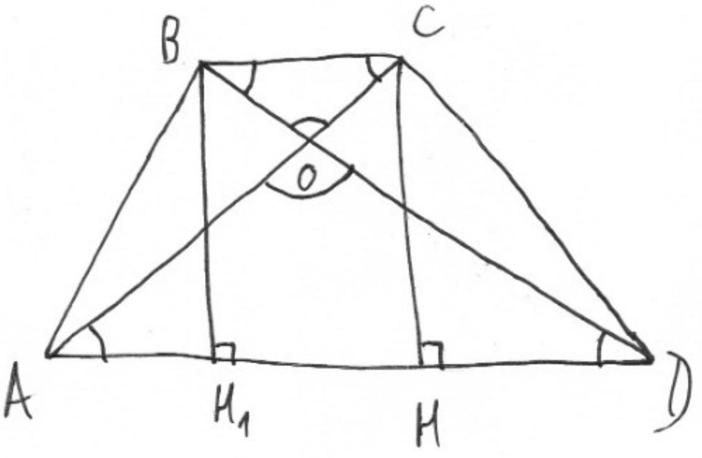
$\triangle ABO = \triangle DCO$ по двум сторонам и углу, т.к. по условию $AD = AO = DO$ и $BC = BO = CO$ и $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные. Тогда $AB = CD$.

По сумме углов $\triangle AOB$: $\angle BAO + \angle ABO = 180° - \angle AOB = 60°$. А тогда $\angle BAD + \angle ABC = (\angle OCD + \angle BAO) + (\angle OBC + \angle ABO) = 180°$. Значит, $(AD) \parallel (BC)$ и четырёхугольник $ABCD$ — равнобокая трапеция.

Чистовик

№6 (продолжение)

2) (продолжение)



Как нетрудно заметить, $HH_1 = BC$ (CH и BH_1 — высоты).
Значит, $AH_1 = HD = \frac{AD - H_1H}{2} = \frac{AD - BC}{2} = 1$.
Поскольку $AD = AO = DO$ и $BO = OC = BC$, то $AC = BD = 8$ (т.к. $AD = 5$ и $BC = 3$). По теореме косинусов для ΔBCD:

$$CD = \sqrt{BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cos DBC} = \sqrt{64 + 9 - 30 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}.$$

По теореме Пифагора для ΔCHD: $CH = \sqrt{DC^2 - DH^2} = \sqrt{60 - 1} = \sqrt{59}$. Аналогично, $BH_1 = \sqrt{59}$.

Итак, $S_{ABCD} = S_{ABH_1} + S_{BCHH_1} + S_{DCH} = 2S_{ABH_1} + S_{BCHH_1} = 2 \cdot (\sqrt{59} \cdot 1/2) + \sqrt{59} \cdot 3 = \boxed{4\sqrt{59}}$.