Часть 1

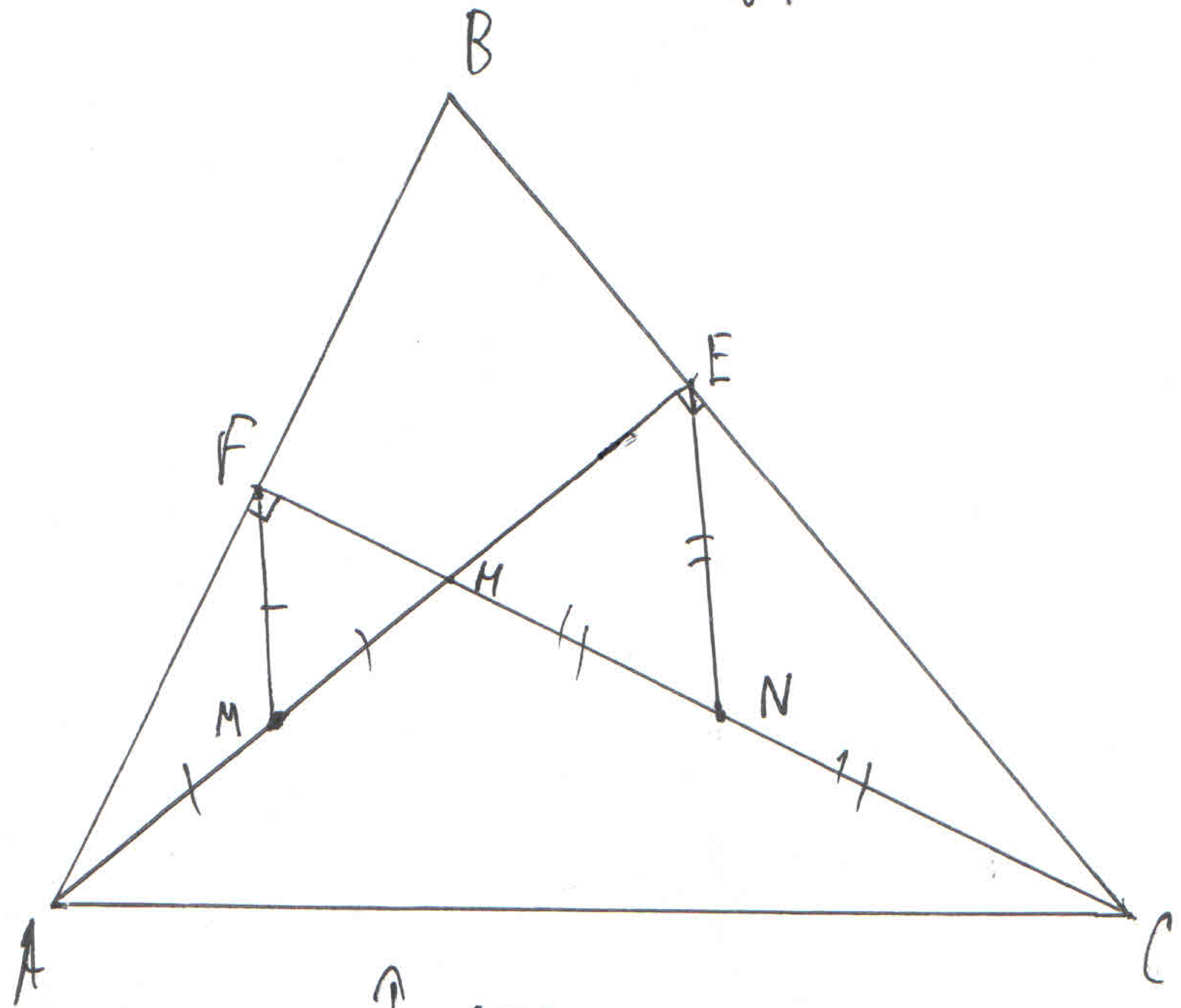
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005617**

ID профиля: **193979**

Вариант 16

Чистовик
N1



Дано:

$\triangle ABC$
CF; AE - высоты
$CF \cap AE = H$
$AM = MH$
$CN = NH$
$FM = 1$
$EN = 4$
$FM \parallel EN$

Найти:

$\angle ABC = ?$
$S_{\triangle ABC} = ?$
$R = ?$

Решение:

$\angle MFH = \angle HNE$ (н.л. при $FM \parallel EN$ и сек. FN)
$\angle FMH = \angle HEN$ (н.л. при $FM \parallel EN$ и сек. ME)

! $\triangle FMH$ и $\triangle NEH$

$\left.\begin{array}{l}\angle FMH = \angle HEN \\ \angle MFH = \angle HNE\end{array}\right| \Rightarrow \triangle FMH \sim \triangle NEH$

$k = \frac{FM}{EN} = \frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$\frac{MH}{HE} = \frac{FH}{HN} = \frac{1}{4}$

! $\triangle AFH$ - прям.
M - середина AH - гипот.

$\Downarrow$

$FM = AM = MH = 1$ (по св. мед. пров. к гип.) $\Rightarrow$ ~~FH~~ $EH = MH \cdot 4 = 4$

аналогично для $\triangle CEH$

$\Downarrow$

$EN = HN = CN = 4 \Rightarrow FH = HN \cdot \frac{1}{4} = 1$

! $\triangle FMH$

$FM = MH = FH = 1 \Rightarrow \triangle FMH$ - р/ст.

$\Downarrow$

$\angle FHM = 60^\circ$ (по св-ву р/ст $\triangle$)

$\Downarrow$

$\angle FAH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (по св-ву остр. $\angle\angle$ в прям. $\triangle$)

аналогично для $\triangle CHE$

$\Downarrow$

$\angle HCE = 30^\circ$

1

Чистовик

! $\triangle ABE$ - прям.

$\angle BAE = 30^\circ \Rightarrow \angle ABE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (по св-ву остр. $\angle\angle$ в прям-$\triangle$)

$\Downarrow$

~~аналогично~~ $\angle ABC = 60^\circ$

! $\triangle AFH$ - прям

$\cos 30^\circ = \frac{FA}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$FA = \sqrt{3}$

! $\triangle CFB$ - прям.

~~cos~~ $tg\, 30^\circ = \frac{BF}{CF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$BF = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (1+4+4) = 3\sqrt{3}$

аналогично для $\triangle ABE$ и $\triangle CHE$

$\Downarrow$

$BE = 2\sqrt{3}$

$CE = 4\sqrt{3}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$

$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 S_{\triangle ABC}}$

! $\triangle AHC$

по Th cos:

$AC^2 = AH^2 + CH^2 - 2AH \cdot HC \cdot \cos \angle AHC = 2^2 + 8^2 - 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 68 + 16 = 84$

$AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$

$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 S_{\triangle ABC}} = \frac{\cancel{4}\sqrt{3} \cdot \cancel{6}^{3}\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\cancel{4} \cdot \cancel{18}\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{7}}{3} = 2\sqrt{7}$

Ответ: 60°; $18\sqrt{3}$; $2\sqrt{7}$.

2

Чистовик

№2

~~35a~~ $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ — числа на доске

$35a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 592$

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + 16a_n = 592$ ↓ −

$34a_1 - 15a_n = 0$

$34a_1 = 15a_n$

⇓

$a_1 \vdots 15$

$a_n \vdots 34$

Предположим, что $a_1 = 15$, $a_n = 34$. Тогда найдём оставшийся набор

$35 \cdot 15 = 525$

$525 + 34 = 559$

$592 - 559 = 33$

Оставшиеся числа: 33; 16, 17.

~~Пред~~ $34 \cdot 16 = 544$

$544 + 15 = 559$

$592 - 559 = 33$

Числа сходятся.

Предположим, что $a_1 > 15$, тогда min число, чему может быть равен a_1 — 30. Тогда:

$30 \cdot 35 = 15 \cdot 2 \cdot 35 = 525 \cdot 2 = 1050 > 592$, значит $a_1 \neq 30$, аналогично для a_n.

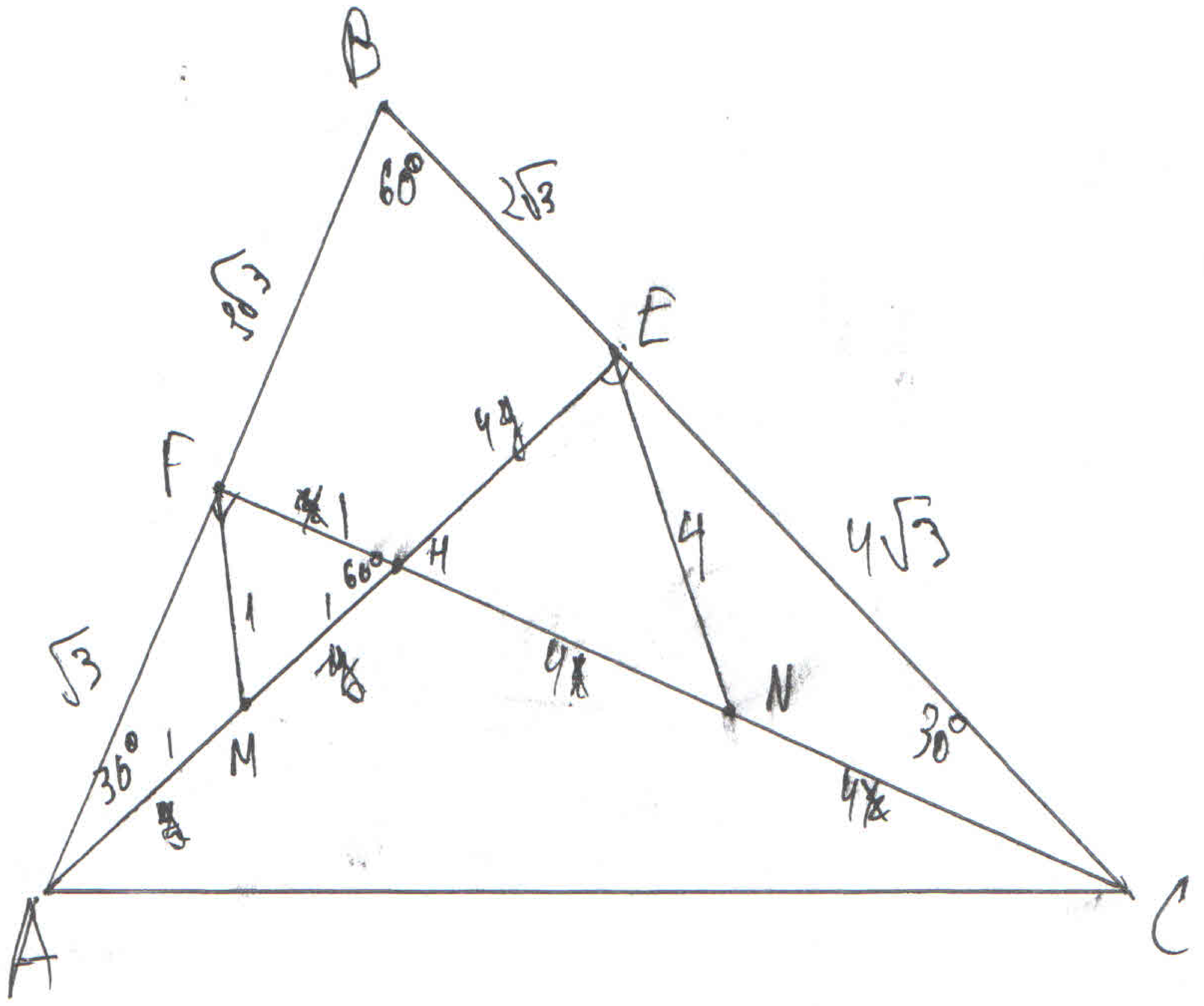
$a_n = 34 \cdot 68$

$68 \cdot 16 = 34 \cdot 2 \cdot 16 = 544 \cdot 2 = 1088 > 592$, значит $a_1 = 15$ и $a_n = 34$

Ответ: 15, 33, 34; 15, 16, 17, 34.

3

Черновик.



$FM = AM = MH = 1$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AF}{AH}$

$AF = \sqrt{3}$

$\frac{FB}{9} = \frac{FB}{CF} = \cancel{\sqrt{3}}\ tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$FB = 3\sqrt{3}$

$AB = 4\sqrt{3}$

$BE = AE \cdot tg\,30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$CE = CH \cdot \cos 30° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$

$4R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{S_{\Delta ABC}}$

$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{7}}{4 \cdot 18 \cdot \sqrt{3}} =$

$= \frac{12 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{18} = 2\sqrt{7}$

Th cos для ΔAHC

$AC^2 = AH^2 + CH^2 - 2AH \cdot CH \cdot \cos 120° =$

$= 4 + 64 + 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 68 + 16 =$

$= 84$

$AC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

Ответ: 60°; $18\sqrt{3}$; $2\sqrt{7}$

Черновік

$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$

$35a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 592 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + 16a_n$ $\quad 34a_1 = 15a_n$

$592 \overset{35}{-} 242 \overset{35}{=} 32$ $\quad a_1 : 15$

$592 \overset{16}{=} 112 \overset{16}{=} 32 \overset{16}{=} 0$ $\quad a_n : 34$

$a_1 = 15$

$a_n = 34$

30 68

514 548

78

31 32 33

30 44 68

$15 \cdot 16 = 225 + 15 = 240$

$240 + 34 = 274$

$592 - 274 =$

$16 + 17 + \dots + 33 = \frac{49 \cdot 18}{2} = 49 \cdot 9 = 360 + 81 = 441$

6

$30 \cdot 35 > 592$

$68 \cdot 16 > 592$

$15 \cdot 35 = 350 + 175 = 525$

$525 + 34 = 559$

15 33 34

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 16 \\ \hline 204 \\ +\ 34\ \ \\ \hline 544 \end{array}$$

$15 \cdot 35 = 16 \cdot 35 - 35 = 16 \cdot 34 - 35 + 16 = 525$

$16 \cdot 34 = 544$

$544 + 15 = 559$

$559 + 33 = 592$

$33 = 16 + 17$

Ответ: 15, 33, 34 ; 15, 16, 17, 34

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005617**

ID профиля: **193979**

Вариант 16

Чистовик

№4

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x^2y^2=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a-b=2 \\ a^2-b-\frac{1}{2}b=19 \end{cases}$$

$b=2a-2$

$a^2-\frac{3}{2}\cdot(2(a-1))=19$

$a^2-3a+3=19$

$a^2-3a-16=0$

$D=9+64=73$

$a=\frac{3\pm\sqrt{73}}{2}$

$$\begin{cases} a_1=\frac{3+\sqrt{73}}{2} \\ b_1=3+\sqrt{73}-2=1+\sqrt{73} \end{cases} \quad \begin{cases} a_2=\frac{3-\sqrt{73}}{2} \\ b_2=3-\sqrt{73}-2=1-\sqrt{73} \end{cases} \quad 8<\sqrt{73}<9$$

$b_2=x^2y^2\geq 0$ $\quad\Downarrow\quad$ $b_2<0$

$\varnothing$

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{3+\sqrt{73}}{2} \\ x^2y^2=1+\sqrt{73},\ x\neq 0,\ y\neq 0 \end{cases}$$

$y^2=\frac{1+\sqrt{73}}{x^2}$

$x^2+\frac{1+\sqrt{73}}{x^2}=\frac{3+\sqrt{73}}{2}\quad |\cdot 2x^2$

$2x^4+2(1+\sqrt{73})=(3+\sqrt{73})x^2$

$2x^4-(3+\sqrt{73})x^2+2(1+\sqrt{73})=0$

$x^2=t$

$D=9+6\sqrt{73}+73-16-16\sqrt{73}=66-10\sqrt{73}<66-10\cdot 9=66-90=-24<0$

$D<0$

$\varnothing$

Ответ: нет решений.

4

Чистовик

N5

Посчитаем кол-во дублей. Их всего 16. Также заметим, что у ~~волшеб~~ фокусника представлены всевозможные наборы ~~кар~~ карточек. Посчитаем отдельно пары карточек с 2 дублями и с одним дублем. С двумя:

Надо выбрать 2 из 16.

$$C_{16}^{2} = \frac{16!}{2!\cdot 14!} = 15\cdot 8 = 120$$

С одним:

Посчитаем кол-во карточек ~~без~~ с каким-то числом x. Их $15+16=31$. Тогда карточек без ~~этого~~ числа x и без дублей: $16^2 - 31 - 15 = 256 - 46 = 210$, где 15 - кол-во дублей. Число x может принять 16 значений. Тогда:

$$210\cdot 16 = 3360$$

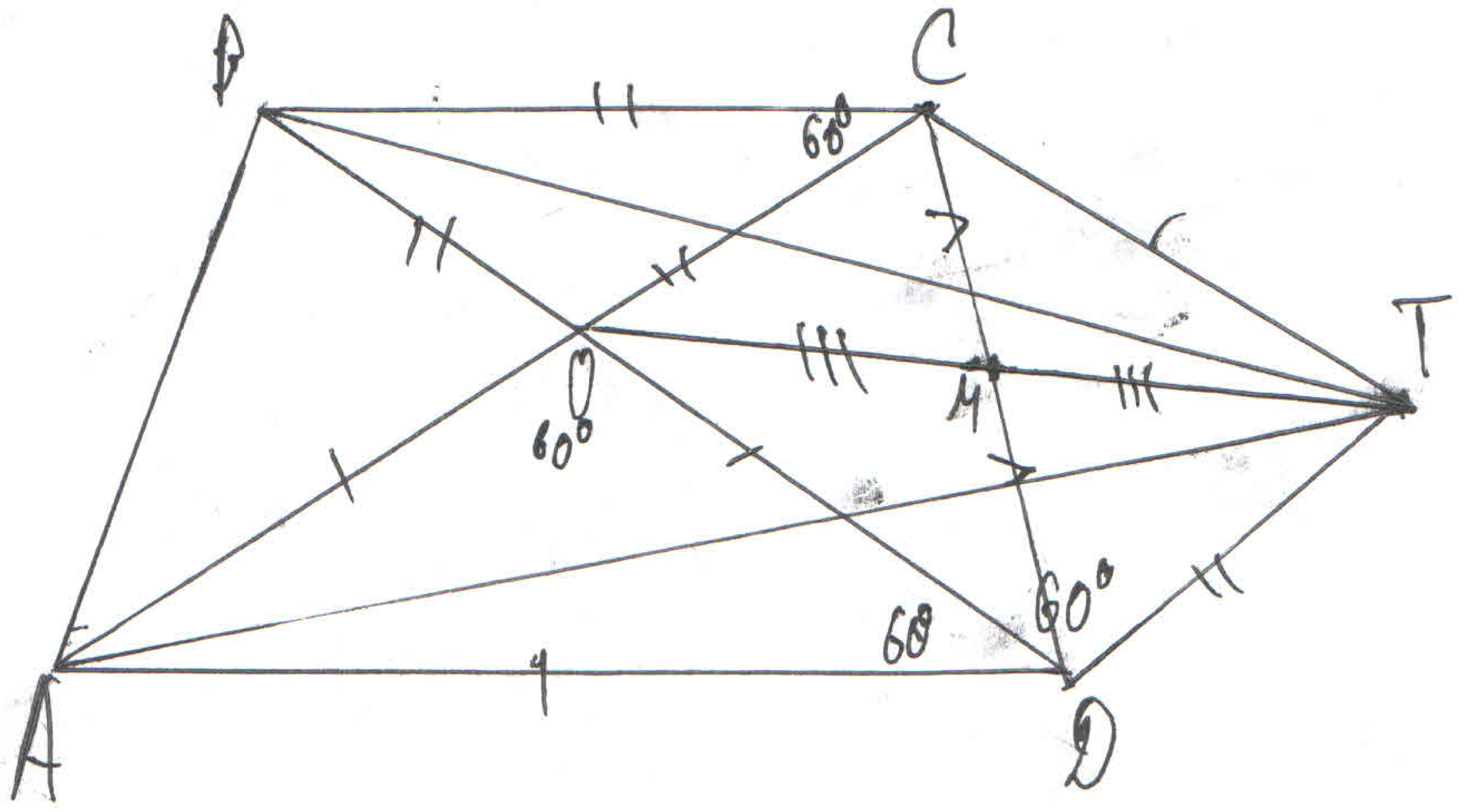
А в сумме:

$$3360+120=3480$$

Ответ: 3480 способами.

5

№6 Чистовик



Дано:

ABCD - четыр.

$AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$; $\triangle AOD$ - правильные

T сим. O отн. сер. CD

$BC = 3$

$AD = 5$

Найти:

а) Д-ть: $\triangle ABT$ - р/ст

б) $\frac{S_{\triangle ABCT}}{S_{ABCD}} = ?$

Решение:

$\angle DOC = 180° - \angle AOD = 120°$ (смежн.)

$CM = MD$
$OM = OT$ (симметрия) $\Big\} \Rightarrow$ OCTD - п-м (по признаку п-ма)

⇓

$CT = OD$
$OC = DT$ (св-ва п-ма (~~по опр.~~))

$BO + BD = AO + OC$

⇓

$BD = AC$

$\angle BCA = \angle CAD = 60°$ (н.л. при BC и AD и сек. AC)

⇓

~~$BC = $~~ $BC \parallel AD$

из пункта б можно узнать, что $BC \neq AD$

⇓

ABCD-трапеция (по опр.)

$BD = AC$

⇓

ABCD - р/б тр. (по признаку)

6

Чистовик

! $\triangle CTD$:

$\angle COD = 120^\circ \Rightarrow \angle ODT = 60^\circ$ (по св-ву п-ма)

! $\triangle BDT$ и $\triangle ABC$

$\left.\begin{array}{l} BC = OC = TD \\ \angle BCO = 60^\circ = \angle BDT \\ AC = BD \end{array}\right| \Rightarrow \triangle BDT = \triangle ABC$ (СУС)

$\Downarrow$

$AB = BT$

! $\triangle ABD$ и $\triangle ACT$

$\left.\begin{array}{l} \angle BDA = \angle ACT = 60^\circ \\ AC = BD \\ \cancel{BD}\ CT = AD \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACT$

$\angle ACT \overset{\angle DAT \text{ (по св-ву п-ма)}}{=}$

$\Downarrow$

$AT = AB$

$\Downarrow$

$AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ - р/ст (по опр-ю)

! $\triangle AOB$

по Т-е cos:

$AB^2 = OB^2 + AO^2 - 2OB \cdot AO \cdot \cos\angle BOA = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 34 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} =$
$= 49$

$AB = 7 = BT = AT$

$S_{\triangle ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ (по св-ву р/ст $\triangle$) $= \frac{49\sqrt{3}}{4}$

Д.п. BH - высота

$AH = \frac{AD - BC}{2} = 1$

! $\triangle AHB$ - прям

по Т-е Пифагора

$BH^2 + AH^2 = AB^2 \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{49-1} = 4\sqrt{3}$ $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot BH = \frac{5+3}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49\sqrt{3}}{16 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{49}{64}$

Ответ: $\frac{49}{64}$ $\frac{49}{64}$

7

Черновик

№4

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$$\cancel{2x^4-2x^2+1+2y^4+2y^2+1=38}$$

$$\cancel{(x^2-1)^2+(y^2-1)^2+x^4+y^4=38}$$

$$\begin{cases} 2a-b=2 \\ a^2-2b-\frac{1}{2}b=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a-b=2 \\ a^2-\frac{3}{2}b=19 \end{cases} \qquad \cancel{b=2a-2}$$

$b=2a-2$

$a^2-3a+3=19$

$\cancel{a^2-a-11=0}$

$a^2-3a-16=0$

$D=9+64=73$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{73}}{2}$$

$$b=3\pm\sqrt{73}-2=1\pm\sqrt{73}$$

$$\begin{cases} a_1=\frac{3+\sqrt{73}}{2} \\ b_1=1+\sqrt{73} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2=\frac{3-\sqrt{73}}{2} \\ b_2=1-\sqrt{73}<0 \end{cases} \quad 8<\sqrt{73}<9$$

$\varnothing$

$$x^2+y^2=\frac{3+\sqrt{73}}{2}$$

$$x^2y^2=1+\sqrt{73}$$

$$y=\frac{\sqrt{1+\sqrt{73}}}{x}$$

$$x^2+\frac{1+\sqrt{73}}{x^2}=\frac{3+\sqrt{73}}{2}$$

Черновик

№4

$$x^2+\frac{1+\sqrt{73}}{x^2}=\frac{3+\sqrt{73}}{2} \quad \Big| \cdot 2x^2$$

$$4x^4+2+2\sqrt{73}=3x^2+\sqrt{73}x^2 \qquad x^2=t$$

$$4t^2-(3+\sqrt{73})t+2(1+\sqrt{73})=0$$

$$D=9+6\sqrt{73}+73-8-8\sqrt{73}=\cancel{32}-32\sqrt{73}=\cancel{80}\;50-26\sqrt{73}$$

$$\wedge$$

$$50-26\cdot 9=-184<0$$

N5

Сколько дублей?

$$16\cdot 16=256$$

16

$\cancel{16+16}\;32$

$\cancel{15\cdot 15=225}$ $\qquad 15\cdot 14=210$

$\cancel{32\cdot 225=2^5\cdot 3^2\cdot 5^2=530\cdot 16=2020\cdot 4=8080}$

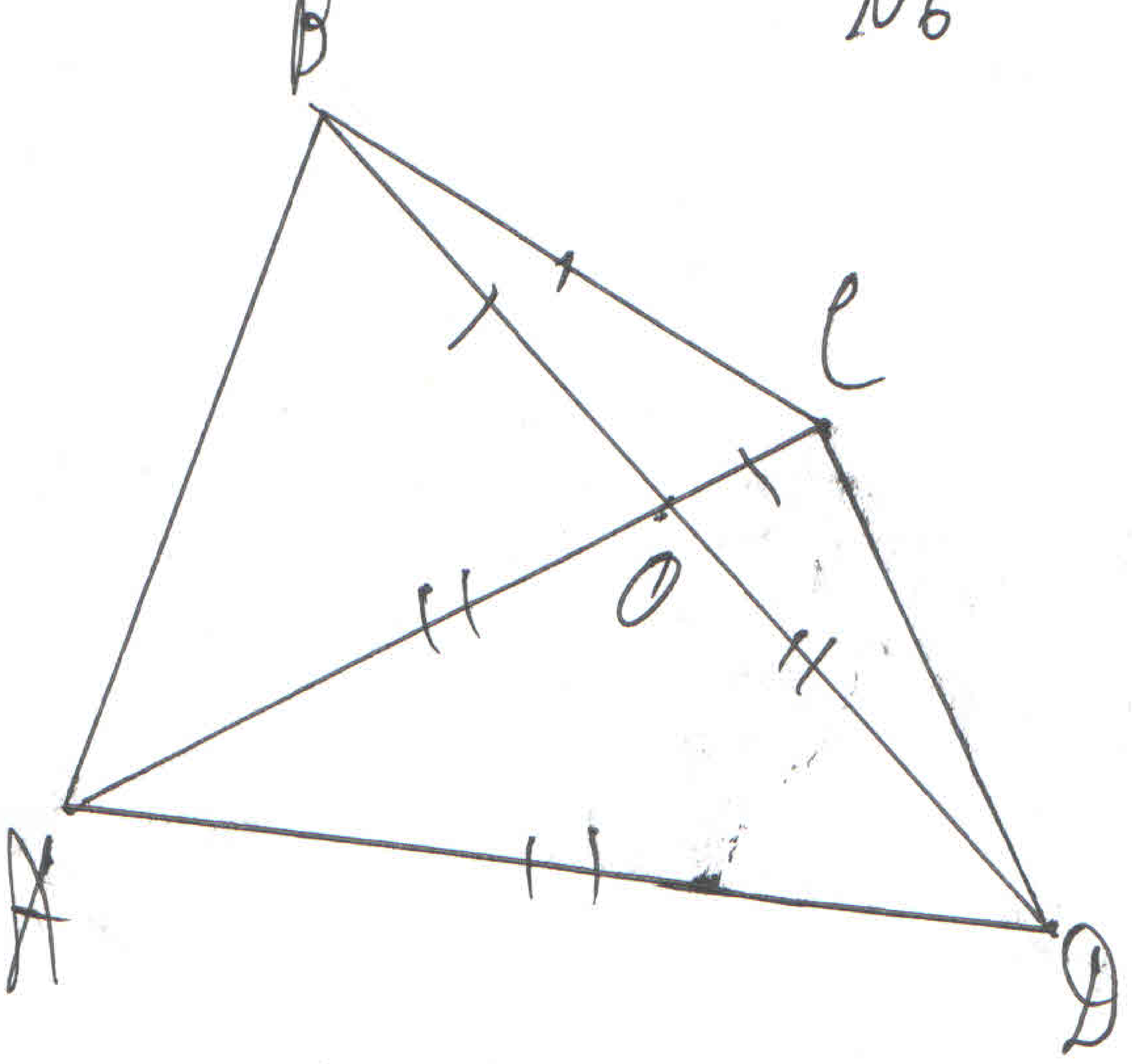
$$\frac{X}{X}$$

$$C_{16}^2=\frac{16!}{2!\cdot 14!}=15\cdot 8=120$$

$\cancel{16\cdot 210+16\cdot\frac{15}{2}=16(210+7{,}5)=16\cdot}$

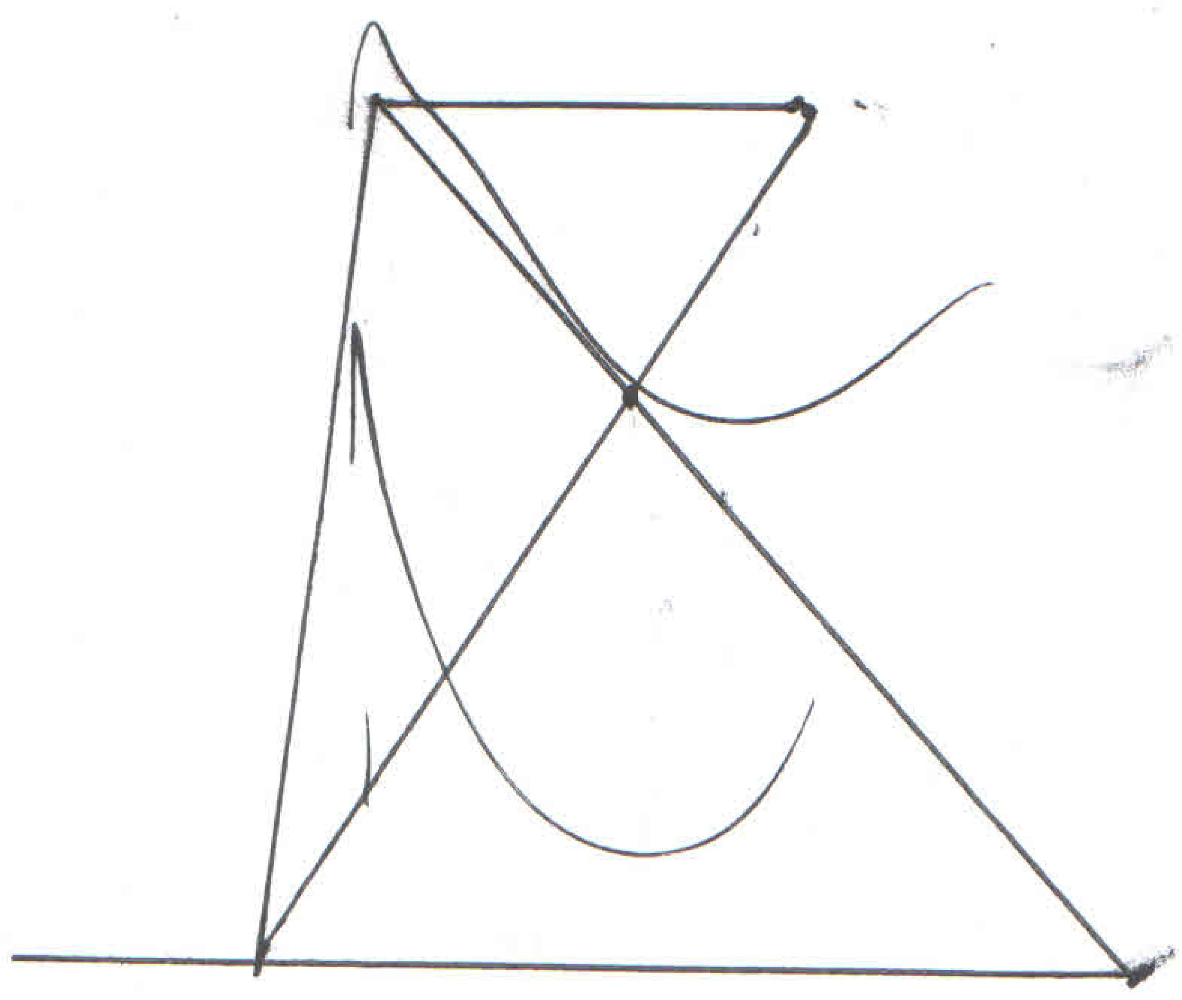
$$16\cdot 210=4\cdot 840=2\cdot 1680=3360$$

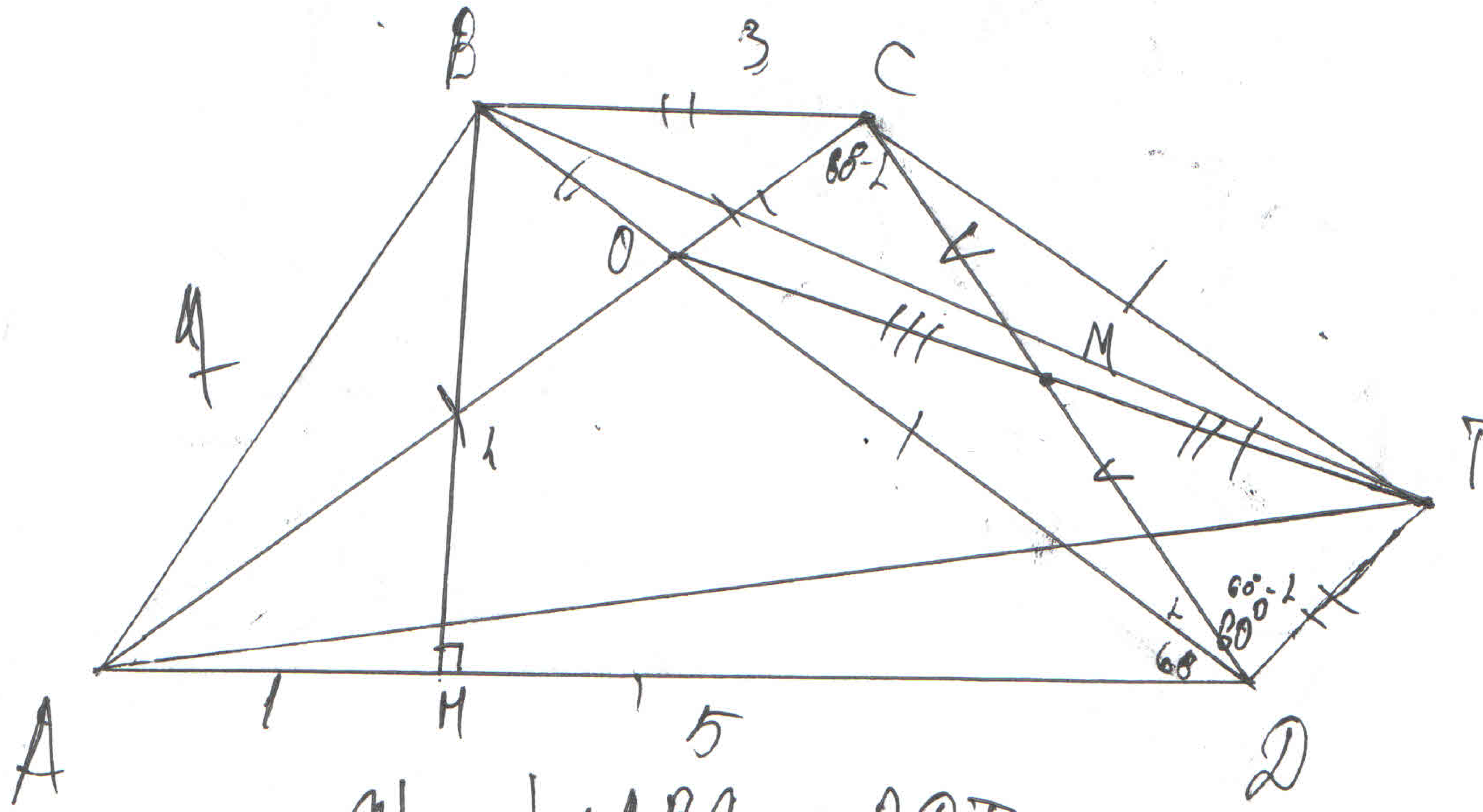
N6



Черновик

№6





а) ! △ABC и △BDT

$\angle BCA = \angle BDT = 60^\circ$

$BC = DT$

$AC = BD$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BDT$ (СУС)

$\Downarrow$

$AB = BT$

$CT = OD$

! △ACT и △ABD

$\angle BDA = \angle ACT = 60^\circ$

$AC = BD$

$CT = AD = OD$

$\Rightarrow \triangle ACT = \triangle BDA$

$\Downarrow$

$AT = AB$

$\Downarrow$

$AT = AB = BT$

Черновик

№6

~~$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot BT \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}$~~

! $\triangle AOB$

по т. cos:

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos 120^\circ = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 34 + 15 = 49$

$AB = 7$

$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BT \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$

$h = BH = \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{5+3}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49\sqrt{3}}{16 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{49}{64} = \left(\frac{7}{8}\right)^2$