Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005224**

ID профиля: **216571**

Вариант 16

Задача №2 лист 1 из 3

1) На доске записаны числа:

$a_1, a_2 \dots a_n$. $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

По условию

$$35a_1 + a_2 + \dots + a_n = 592$$
$$- \quad a_1 + a_2 + \dots + 16a_n = 592$$

$$34a_1 - 15a_n = 0$$

$$34a_1 = 15a_n$$

a_1 и a_n - натуральные $\Rightarrow a_1, a_n \neq 0$

НОД$(34, 15) = 1 \Rightarrow$ ~~34 a_1~~ $a_1 = 15$; $a_n = 34$

2) $35 \cdot 15 + a_2 + \dots + 34 = 592$

$525 + 34 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 592$

$a_2 + \dots + a_{n-1} = 33$

$16 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \quad 33$

Пусть $a_2 = 16$

Тогда a_3 минимум 17. ~~$a_2 + a_3$~~ $= 3$ $16 + 17 = 33$ $\Rightarrow$ Если чисел ≥ 4 больше вариантов нет, т.к. a_2 и a_3 были взяты минимально возможные

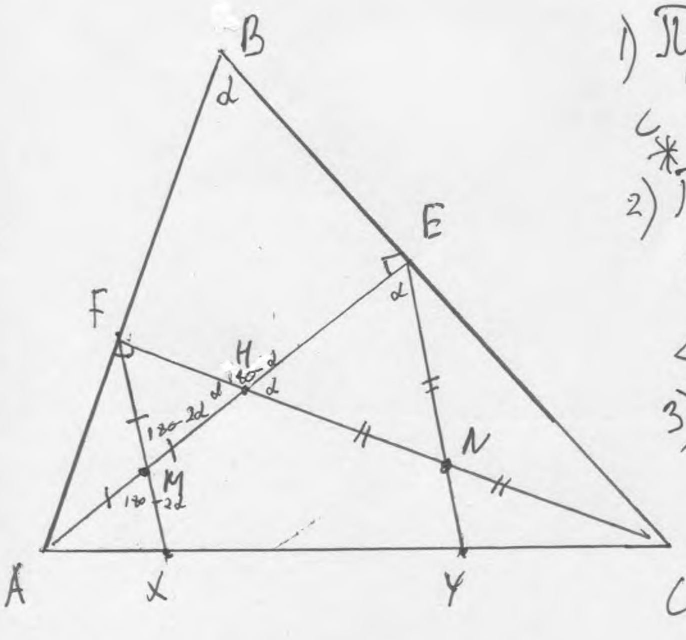
Пусть всего чисел 3. Тогда $a_2 = 33$

Вышло 2 варианта:

Ответ: 15, 16, 17, 34

15, 33, 34

Задача №1 лист 2 из 3



1) Продлим FM и EN до пересечения с AC в точках X и Y соответственно.

*

2) Пусть $\angle AHF = \alpha \Rightarrow \angle EHN = \alpha$ (вертикальные)

$\angle EHN = \angle HEN = \alpha$ ($\triangle HNE$ равнобедр; $HN = EN$)

3) $\angle HFM = \angle MHF = \alpha$ ($\triangle FMH$ равнобедр; $FM = MH$)

$\angle FMH = 180^\circ - \angle FHM - \angle MFH = 180 - 2\alpha$ (сумма углов $\triangle FHM$)

$\angle AMX = \angle FMH$ (вертикальные)

4) AM принадлеж. AE; AX принадлеж AX; $MX \parallel EY$ } $\triangle AMX$ подобен $\triangle AEY \Rightarrow \angle AMX = \angle AEY$

5) $\angle AMX = \angle AEY$

$180^\circ - 2\alpha = \alpha$

$180^\circ = 3\alpha$

$\alpha = 60^\circ$

6) $\angle FHE = 180^\circ - \angle EHN = 180^\circ - \alpha$ (смежные)

$\angle ABC = 360^\circ - \angle HFB - \angle HEB - \angle FHE = 360^\circ - \cancel{180}\, 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$ (сумма углов четырёхугол. FHEB

$\boxed{\angle ABC = \alpha = 60^\circ}$

7) $\angle FCB = 180 - \angle BFC - \angle FBC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\angle BAE = 180 - \angle ABE - \angle AEB = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

8) $\triangle FHM$ и $\triangle FEN$ равносторонние, т.к они равнобедренные с углом $60^\circ \Rightarrow FH = 1$; $HE = 4$

---

* В прямоугольном треугольнике медиана к гипотенузе равна половине гипотенузы $\Rightarrow AM = MH = FM$

$HN = NC = EN$

Задача №1

Мин з из 3

9) $FB = \tan\angle FCB \cdot FC = \tan 30 \cdot 9 = 3\sqrt{3}$

$BE = \tan\angle BAE \cdot AE = \tan 30 \cdot 6 = 2\sqrt{3}$

$EC = 2\cos\angle NCE \cdot NC = 2\cos 30 \cdot 4 = 2\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 4\sqrt{3}$

$AF = 2\cos\angle FAM \cdot AM = 2\cos 30 \cdot 1 = \sqrt{3}$

$AB = FA + FB = 4\sqrt{3}$

$BC = EB + EC = 6\sqrt{3}$

10) $S_{ABC} = \cancel{\cos\angle ABC \cdot AB \cdot BC}\ \frac{1}{2}\sin\angle ABC \cdot AB \cdot BC = \frac{\sin 30 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$

11) По теореме ~~...~~ Пифагора

$AC^2 = AE^2 + EC^2$

$AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 48} = \sqrt{84} =$

По теореме синусов

$\frac{AC}{\sin ABC} = 2R$

$R = \frac{AC}{2\sin ABC} = \frac{\sqrt{84}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

Ответ: $4; \angle ABC = 60$; $S = 18$; $R = 2\sqrt{21}$

~~abc~~ ... a

$a_1 a_2 \ldots a_n$

$35a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 592$

$3a_1 + a_2 + \ldots + 16a_n = 592$

$39a_1 = 15a_n = 0$

$39a_1 = a_n \cdot 15$

15 39

39
15

2
35
15
175
35
525
39
559

559

2
39
16
204
39
544
15
559

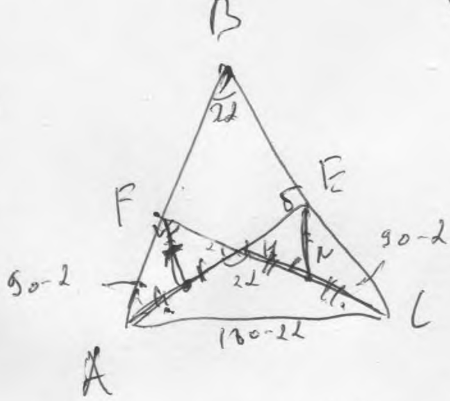
16 12

39

46

$\boxed{15\ 16\ 17\ 34}$

32 33



$\angle ABC$

S_{ABC}

R_{ABC}

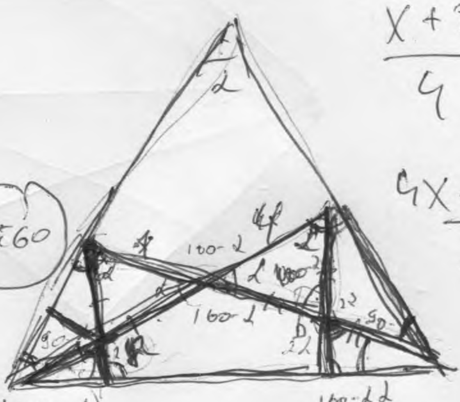
$\alpha = 100 - 2\alpha$

$100 = 3\alpha \quad \alpha = 60$

$180 - 2\alpha + 180 - 2\alpha = 2\alpha$

$180 - \alpha = (90-\alpha) + (90-\alpha) + (100 - 100 - \alpha)$

$180 - \alpha = 180 - 2\alpha + \alpha$



$tg\, 30 \cdot 9 +$

$sin\, cos 30 \cdot 1 \cdot 2$

$\frac{x+8}{4} = \frac{1+a}{b}$

$\frac{4x+2}{2} = \frac{4+b}{a}$

$b = 4\frac{1+a}{x+8}$

$\begin{cases} bx + 8b = 4 + 4a \\ 4ax + 2a = 8 + b \end{cases}$

$\frac{\sqrt{3}}{m}$

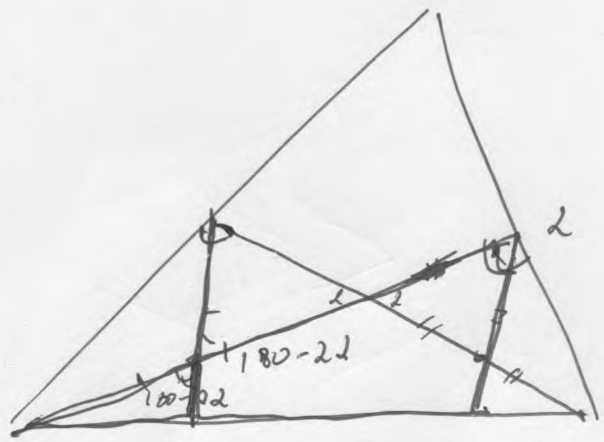
$4ax + 2a = 8 + 4\frac{1+a}{x+8}$

$4ax^2 + 32ax + 2ax + 16a = 8x + 64 + 4 + 4a$

$4ax^2 + 34ax + 14a - 8x - 68 = 0$

$tg\,30 \cdot 9 + \cos 30 \cdot 1 \cdot \cdot 2 = AB$
$tg\,30 \cdot 6 + \cos 30 \cdot 4 \cdot 2 = BC$

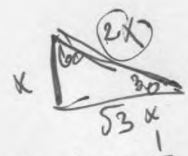
$5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$
$a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$



$\frac{\alpha \, {}^{16}_{3}}{48}$

8q

2·2



$\cos 60 = \sin 30 = \frac{1}{2}$
$\cos 30 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$84 =$

$\frac{84}{4} = 12$

$4\sqrt{3}$

21·4

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005224**

ID профиля: **216571**

Вариант 16

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

1) Обозначим $a=x^2 \Rightarrow a\geq 0$

$b=y^2 \Rightarrow b\geq 0$

2) $$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2-\frac{1}{2}ab=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+2b-ab=2 \\ a^2+b^2+2ab-2,5ab=19 \end{cases}$$

$\cancel{2a+2b-2}=ab$

$$\begin{cases} 2(a+b)=2+ab \\ (a+b)^2-2,5ab=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=\frac{2+ab}{2} \\ (a+b)^2-2,5ab=19 \end{cases}$$

3) Подставим $a+b$

$$\left(\frac{2+ab}{2}\right)^2-2,5ab=19 \quad |\cdot 4$$

$$(2+ab)^2-10ab=76$$

$$4+4ab+a^2b^2-10ab=76$$

$$(ab)^2-6ab-72=0$$

$$D=(-6)^2-4(-72)\cdot 1=36+288=324>0$$

$$ab=\frac{-(-6)\pm\sqrt{324}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 18}{2}=\begin{matrix}12\\-12\end{matrix} \qquad \begin{matrix}a\geq 0\\ b\geq 0\end{matrix} \Rightarrow ab\geq 0 \Rightarrow \boxed{ab=12}$$

Продолжение на листе 2

4) $\begin{cases} 2a+2b-12=2 \\ a^2+b^2-\frac{1}{2}\cdot 12=19 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} b=7-a \\ a^2+b^2=25 \end{cases}$

5) Подставим b

$a^2+(7-a)^2=25$

$a^2+49-14a+a^2=25$

$2a^2-14a+24=0$

$a^2-7a+12=0$

$D_1=(-7)^2-4\cdot 12\cdot 1=49-48=1>0$

$a=\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{7\mp 1}{2}=\begin{matrix} 3 & \Rightarrow b=4 \\ 4 & \Rightarrow b=3 \end{matrix}$

6) $a=3;\ b=4$

$\Downarrow$

$x=\pm\sqrt{3}\quad y=\pm 2$

$\Downarrow$

$(\sqrt{3},2);\ (\sqrt{3};-2);\ (-\sqrt{3};-2);\ (-\sqrt{3};2)$

$a=4;\ b=3$

$\Downarrow$

$x=\pm 2;\ y=\pm\sqrt{3}$

$(2;\sqrt{3});\ (2;-\sqrt{3});\ (-2;-\sqrt{3});\ (-2;\sqrt{3})$

Ответ: $(\sqrt{3};2),\ (\sqrt{3};-2),\ (-\sqrt{3};-2),\ (-\sqrt{3};2),\ (2;\sqrt{3}),\ (2;-\sqrt{3}),\ (-2;-\sqrt{3}),\ (-2;\sqrt{3})$

Задача №5

1) Выбрать дубль можно 16 способами (дублей всего 16)

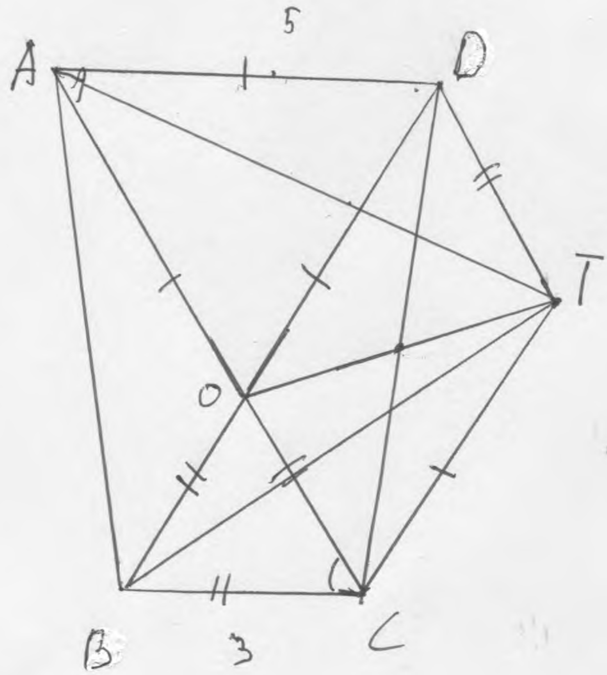
2) Заметим, что всего вариантов таких карточек 16^2. Значит, все карточки есть.

3) Посчитаем кол-во способов вытянуть удовлетворяющую требования карту вместе с дублем. Для этого посчитаем кол-во неподходящих карт. Карточки вида $x:y$ и $y:x$ подходят к дублю $x:x$. На месте y может быть любое число кроме x. $\Rightarrow$ таких карт $15+15=30$ вариантов. Также второй картой не может быть $x:x$, так как она уже использована. $\Rightarrow 16^2-31$ карта может быть парой

4) Всего будет $16\cdot(16^2-31)$ вариантов. Но заметим, что дважды посчитаны варианты, когда вытащим 2 дубля. Их будет $\frac{16\cdot15}{2}$, так как 16 вар. для первого дубля, 15 вар для второго, но все пары посчитаны дважды, поэтому делим на 2. В итоге ответ $16\cdot(16^2-31)-\frac{16\cdot15}{2}=16\cdot(256-31)-\frac{240}{2}=16\cdot(225)-$
$-120=3600-120=3480$.

Ответ: 3480.

Задача №6



1) $DT = OC \quad TC = OD$
$DT \parallel OC \quad TC \parallel OD$
Так как $\triangle DOC$ симметричен $\triangle DTC$ относительно середины CD.

2) $DT \parallel OC \parallel AC$, $AD = TC$
$\Rightarrow$ ~~трапе~~ $ADTC$ — равнобокая трапеция $\Rightarrow$ Диагонали AT и DC равны.

3) $TC \parallel OD \parallel DB$; $DT = BC$
$\Rightarrow$ $BCTD$ — равнобокая трапеция $\Rightarrow$ Диагонали DC и TB равны

4) $AD \parallel BC$, так как накрестлежащие углы $\angle BCA$ и $\angle CAD$ равны (60°) $\Rightarrow ABCD$ — трапеция

5) $60^\circ = \angle ADB = \angle ACB \Rightarrow ABCD$ — вписанный четырёхугольник.

6) 4) → $ABCD$ трапеция
5) → $ABCD$ вписанный
→ $ABCD$ равнобедренная трапеция.
$\Rightarrow AB = DC$.

7) 2) → $AT = DC$
3) → $BC = TB$
6) → $DC = AB$
→ $DC = AT = TB = AB \Rightarrow \triangle ABT$ равносторонний

8) Пусть $AB = x$
Тогда $S_{ABT} = \sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{3x}{2} - x\right)\left(\frac{3x}{2} - x\right)\left(\frac{3x}{2} - x\right)} = \sqrt{1{,}5x \cdot 0{,}5x \cdot 0{,}5x \cdot 0{,}5x} =$
$= 0{,}5^2 \cdot \sqrt{3}\, x = 0{,}25\sqrt{3}\, x = \frac{\sqrt{3}}{4} x$

9) Высота трапеции $ABCD$ это $h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{5+3}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - 1}$

10) $S_{ABCD} = h \cdot \frac{5+3}{2} = 4\sqrt{x^2 - 1}$

$2a+2b-12=2$

Мит 5 инд 2

$2a^2+2b^2-\cancel{4}2=38$

$a+b=7$ 3 4 $\sqrt{3}$ 2

$a^2+b^2=25$ 2 $\sqrt{3}$

$a^2+(7-a)^2=25$

$\cancel{a^2-49+14a-a^2=25}$

$14a^2=21$

$\frac{16\cdot 15}{2}+16\cdot$

$2a^2-14a+49=25$

$2a^2-14a+24=0$

$a^2-7a+12=0$

$D=49-40=1$

$\frac{7\pm 1}{2}$ 4 $\Rightarrow b=3$

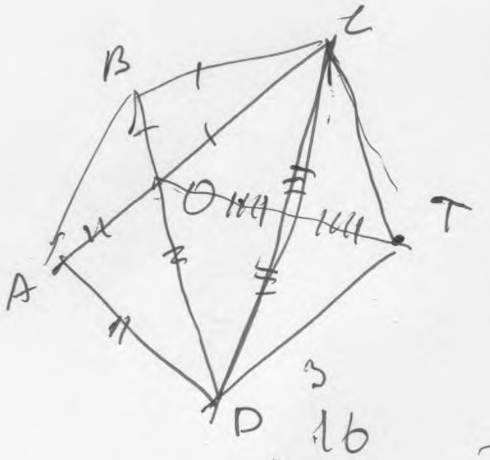
3 $\Rightarrow b=4$

15.

1 15 1 +1

1

30



$16\cdot(16^2-31)$

16 × 16 = 96, 16, 256

16^2

225 × 16 = 1350, 225, 3600

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

$a=x^2$
$b=y^2$

лист 6 из 7

$$\boxed{2a+2b-ab=2}$$
$$a^2+b^2-\frac{ab}{2}=19$$
$$\boxed{2a^2+2b^2-ab=38}$$

$ab=2+2a+2b$
$a+b=\frac{2+ab}{2}$

$$2a^2+2b^2+2a+2b-2ab=40$$

$\frac{16\cdot 15}{2}+16\cdot$

$$(a^2-b)^2+2a+2b+2a^2+2b^2=40$$
$$(a^2-b)^2+2(a+b+a^2+b^2)=40$$

16^2 166

38

16 дублей

$1 \cdot$ 15 16^2-30

$$a(2-b)+2b=2$$
$$a=2\frac{1-b}{2-b}$$

$18 \times 18 = 324$

$$2\cdot 4\left(\frac{1-b}{2-b}\right)^2-2b\frac{1-b}{2-b}+2b^2=38$$

$$8\cdot(1-b)^2-2b(1-b)(2-b)+2b^2(2-b)^2=38(2-b)^2$$

$12 \cdot 4 \ldots$; $288 + 36 = 324 = 18^2$.

$$a^2+b^2-2ab+3a+3b=41$$
$$(a-b)^2+3a+3b=41$$

$3a^2+3b^2+(a^2-b)^2=38\cdot 4$

$\frac{6\pm 18}{2}=ab$

$\boxed{ab=12}$

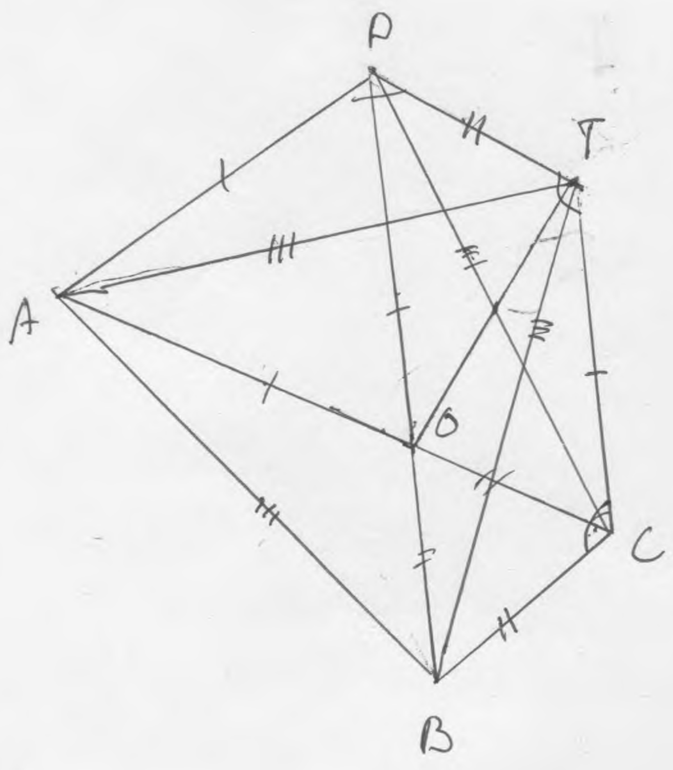
$$2a^2+2b^2-2a-2b=36$$
$$a^2+b^2-a-b=18$$
$$a(a-1)+b(b-1)=18$$

$36+4\cdot 72$

$(a+b)^2$ $a^2+b^2+2ab-2{,}5ab=19$
$(a+b)^2-2{,}5ab=19$
$\left(\frac{2+ab}{2}\right)^2-2{,}5ab=19$
$(2+ab)^2-10ab=76$
$4+4ab+a^2b^2-10ab=76$
$a^2b^2-6ab-72=0$

Лист 7 из 7

Окружности около треуг. $\triangle APT$ и $\triangle CBT$ равны



$\sqrt{1{,}5x \cdot 0{,}5x \cdot 0{,}5x \cdot 0{,}5x} = 0{,}25\sqrt{3}x^2$

$$\frac{x^2 - 4}{\frac{4 \cdot (x^2 - 4)}{\frac{\sqrt{3}}{4} x^2}}$$