Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

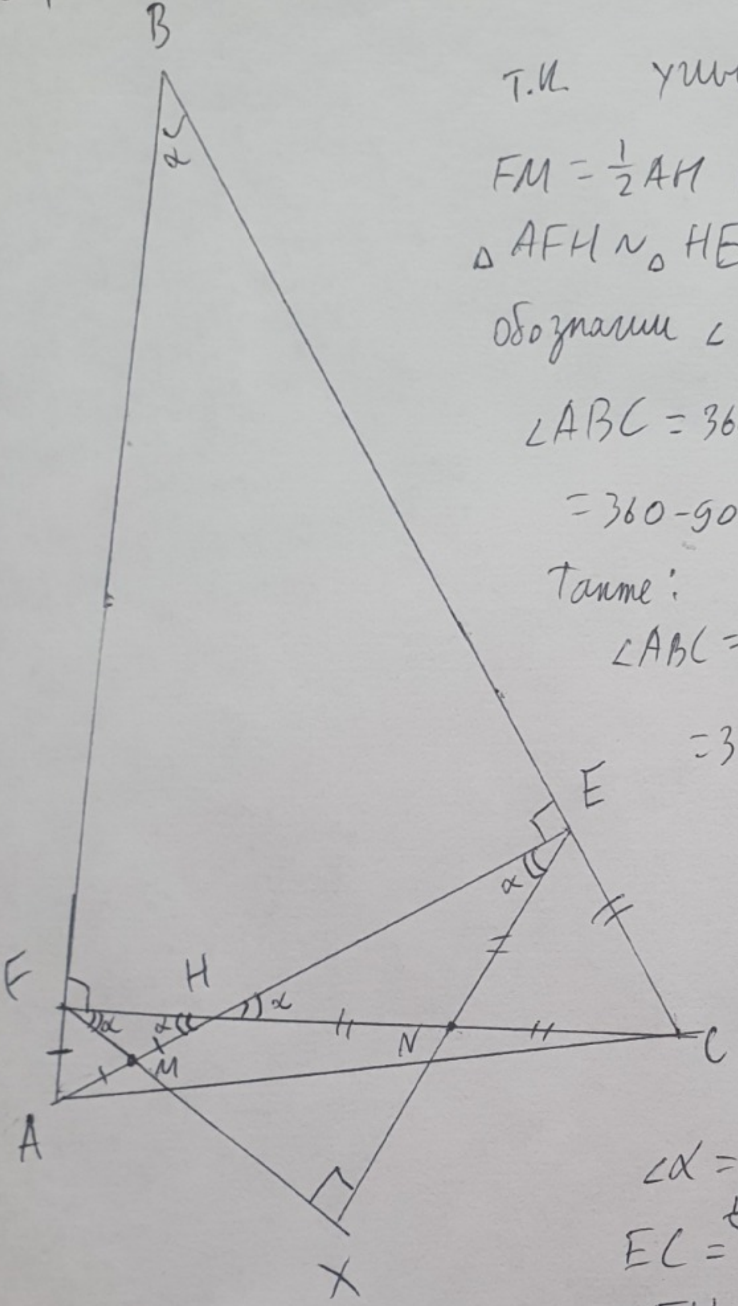
Шифр: **211005163**

ID профиля: **314097**

Вариант 16

Чистовик

№1



т.к. углы $\angle AFC$ и $\angle AEC$ - прямые, то $FM = \frac{1}{2}AH$ и $EN = \frac{1}{2}HC$, также $\triangle AFH \sim \triangle HEC$ по вертикальным углам

обозначим $\angle AHF = \alpha$, тогда:

$\angle ABC = 360 - \angle BFH - \angle BEH - \angle FHE =$

$= 360 - 90 - 90 - (180 - \alpha) = \alpha$

Также:

$\angle ABC = 360 - \angle BFX - \angle BEX - \angle FXE =$

$= 360 - (90+\alpha) - (90+\alpha) - 90 =$

$= 90 - 2\alpha$

⇓

$\alpha = 90 - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 30°$

⇓

$\angle ABC = 30°$

$\angle\alpha = 30°$

⇓

$EC = \frac{1}{2}CH$; $AF = \frac{1}{2}AH$

Также из $\angle\alpha = 30°$ вытекает $FH = AF \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$

Тогда $FC = FH + 2EN = 8 + \sqrt{3}$; $BC = 2FC$ (FC лежит против $\angle\alpha = 30°$)

⇓

$BC = 16 + 2\sqrt{3}$

$AE = 2FM + NE \cdot \sqrt{3} = 2 + 4\sqrt{3}$

⇓

$S_{ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = (2+4\sqrt{3})(8+\sqrt{3}) = 28 + 34\sqrt{3}$

Также найдём AC:

$$AC = \sqrt{FC^2 + AF^2} = \sqrt{(8+\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{68 + 16\sqrt{3}}$$

$$R_{опис} = \frac{AC}{2\sin\alpha} = AC \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = AC = \sqrt{68+16\sqrt{3}}$$

Чистовик 3 из 3

№2

$35a_1+a_2+a_3+\ldots a_n=592 \qquad a_1+a_2+\ldots+16a_n=592$

$\Downarrow$

$(a_1+\ldots+a_n)+34a_1=(a_1+\ldots+a_n)+15a_n=592$

$\Downarrow$

$34a_1=15a_n \Rightarrow a_n=a_1\cdot\frac{34}{15} \Rightarrow a_1 \vdots 15$, т.к. a_n - натур.

Если $a_1 \geqslant \cancel{15}\ 30$, то $35a_1+a_2+\ldots+a_n>35a_1\geqslant 35\cdot 30>592$

$\Downarrow$

$a_1=15$ ($a_1=0$ невозможно, т.к. тогда сумма всего будет равна 0)

$\Downarrow$

$a_n=34$

$\Downarrow$

$35a_1+\ldots+a_n=35\cdot 15+a_2\ldots+a_{n-1}+34=559+a_2\ldots+a_{n-1}=592$

Тогда $a_2+\ldots+a_{n-1}=33$ и $15<a_i<34$

Если $n\geqslant 4$, то оставшиеся числа — 16 и 17, т.к. если они попарно различны, и каждое больше 15, то сумма 2 чисел как минимум $S=16+17=33$ (в других случаях она больше).

Если $n=3$, то оставшееся число и равно 33

$\Downarrow$

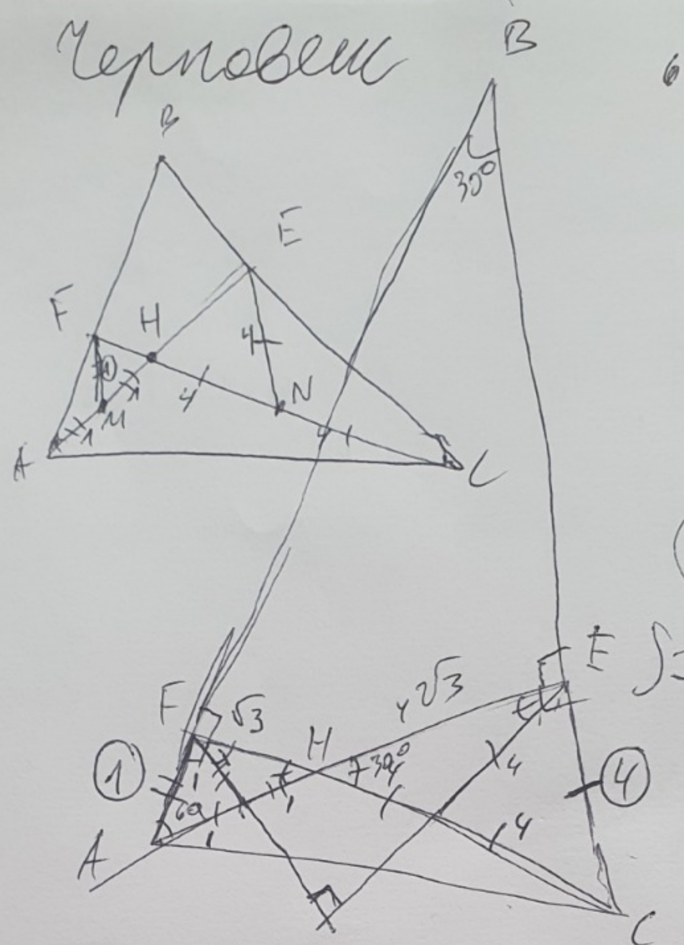
Либо написаны числа 15, 16, 17, 34,

либо 15, 33, 34

211005163 (U314097 M1277294)

Чорновик

6



$(2+4\sqrt{3})\cdot 2$

$S=(4+8\sqrt{3})\cdot(8+\sqrt{3})$

$180-(180-\alpha)=\alpha$

$180-2\alpha-90=90-2\alpha$

$360-90\cdot 3-2\alpha$

$\sqrt{(2+4\sqrt{3})^2+4^2}$

$90-2\alpha$

$\cancel{360-90-90-180+\alpha}$

$1^2+(4+4+\sqrt{3})^2=$

$90-2\alpha=\alpha$

$\alpha=30°$

$8+\sqrt{3}$

$1+64+3+16\sqrt{3}$

$68+16\sqrt{3}$

$r_{on}=\dfrac{\sqrt{68+16\sqrt{3}}}{\sin 30}=(68+16\sqrt{3})\cdot 2$

$4+16\sqrt{3}+48+16=\sqrt{68+16\sqrt{3}}$

$16+32\sqrt{3}+2\sqrt{3}+12$

$28+34\sqrt{3}$

Черновик

$34a_1 = 15a_2$

$\cancel{\frac{a_2}{a_1} = \frac{34}{15}}$ $a_2 = a_1 \cdot \frac{34}{15}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 35 \\ \hline 75 \\ 45 \\ \hline 525 \end{array}$$

$a_1 = 15$ 34

$15 \cdot 35 + 34 =$

$525 + 34$

559

$a_1 \geq 30$ $a_1 = 15$ $a_2 = 34$

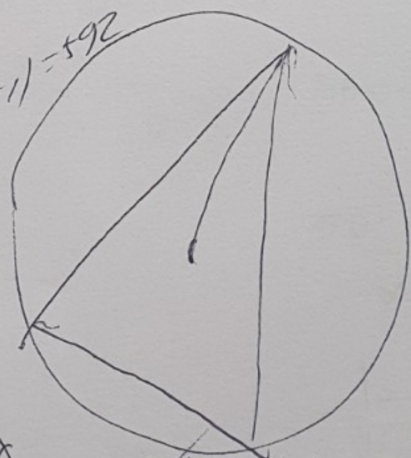
$a_3 = 592 - a_2 - 35a_1$

$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n$

$$\begin{array}{r} 592 \\ -\ 535 \\ \hline 33 \end{array}$$

$35a_1 + a_2 \ldots + a_n = 592$

$16a_n + a_1 + a_2 + \ldots (a_n - 1) = 592$



$30 \cdot 45$

$\cancel{(a_1 + \ldots + a_n)} + 15a_n = \cancel{(a_1 + \ldots + a_n)} + 34a_1$

$15a_n = 34a_1$

$a_n = a_1 \cdot \frac{34}{15} \Rightarrow a_1 \vdots 15$, т.к. a_n - целое

Если $a_1 \geq 30$, то $16a_1 \geq 30 \cdot 16 = 480$

≥ 45 $16a_1 \geq 45 \cdot 16 > 592$

211005163 (U314097 M1277294)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005163**

ID профиля: **314097**

Вариант 16

№4

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

1) $x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2{,}5x^2y^2=19$

$2x^2+2y^2-x^2y^2=2 \quad |\cdot 2{,}5$

2) $5(x^2+y^2)-2{,}5x^2y^2=5$

Вычтем 2) из 1): $(x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2)-14=0$

Пусть $x^2+y^2=a$, тогда:

$$a^2-5a-14=0$$

$a_1=7 \quad a_2=-2$ – не подходит, т.к. сумма квадратов ≥ 0.

$$x^2y^2=2(x^2+y^2)-2=12$$

Составим систему:

$$\begin{cases} x^2y^2=12 \\ x^2+y^2=7 \end{cases} \quad x^2=7-y^2 \Rightarrow (7-y^2)y^2=12$$

$$-y^4+7y^2-12=0$$

$$y^4-7y^2+12=0$$

$$y_1^2=4 \quad y_2^2=3$$

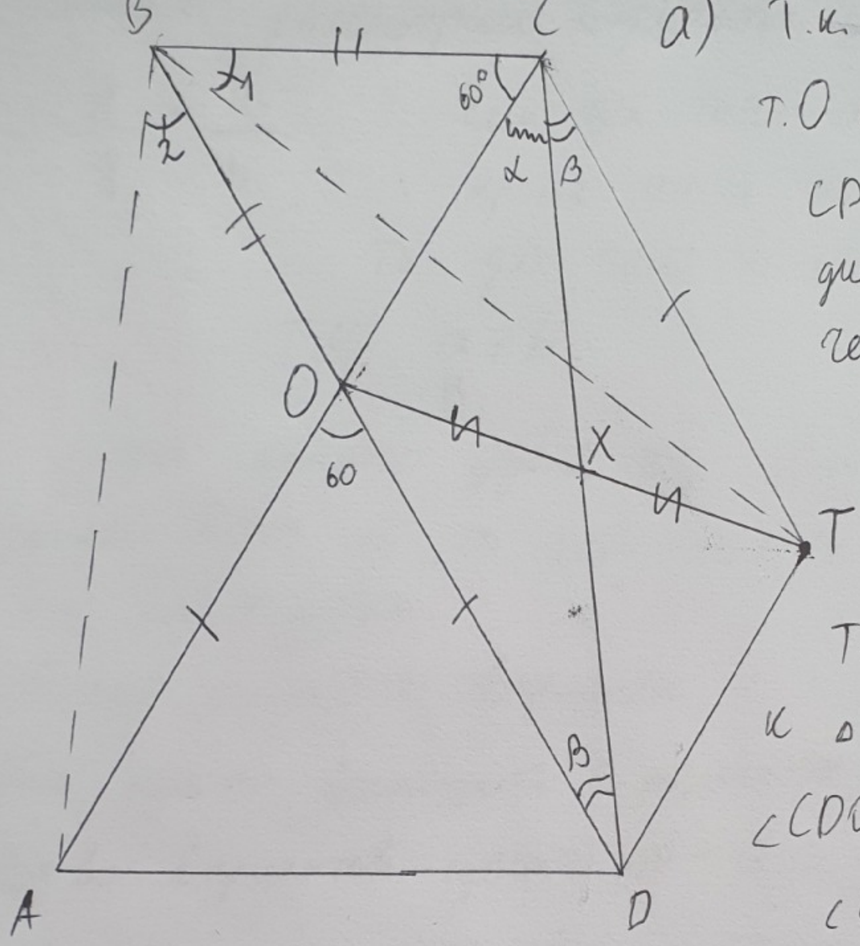
$x^2=4 \quad x^2=3 \quad \Leftarrow \quad y_1=\pm 2 \quad y_2=\pm\sqrt{3}$

$x=\pm 2 \quad x=\pm\sqrt{3}$

Таким образом получаем ~~8х~~ симметричные решения, где $x = \pm 2$, $y = \pm\sqrt{3}$ или наоборот.

Чистовик: 4 из 5

№6



а) Т.к. точка T симметрична т.O относительно середины CD, то OCTD - пар-мм, т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам

$AO = OD \Downarrow = CT$

Т.к. $\angle DOA$ - внешний к $\triangle COD$, то $\alpha + \beta = \angle DOA = 60°$

$\angle CDO$ и DCT - н/л

$\angle CDO \overset{\Downarrow}{=} \angle DCT$

$\angle OCT = \alpha + \beta = 60°$

$\Downarrow$

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT =$
$= 60° + 60° = 120$

$\triangle BOA = \triangle BCT$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Leftarrow$

$\Downarrow$

$BT = BA$; $\angle 1 = \angle 2$

$\Downarrow$

$\angle ABT = \angle ABO + \angle OBC - \angle TBC = \angle 2 + 60° - \angle 1 = 60°$

$\Downarrow$

$\triangle ABT$ - равноб. с $\angle 60°$

$\Downarrow$

он правильный

ЧТД

Чистовик: 5 из 5

б) Если $BC=3$, $AD=5$, то $BT=\sqrt{BC^2+AD^2-2\cdot BC\cdot AD\cdot\cos 120^\circ}=$

$$=\sqrt{9+25+5\cdot 3}=\sqrt{49}=7$$

Тогда $S_{ABT}=\dfrac{BT^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\dfrac{49\cdot\sqrt{3}}{4}$

Стоит также заметить, что $ABCD$ – равнобокая трапеция ($BC \parallel AD$, т.к. н/л углы равны по 60°)

$$\Downarrow$$

$$S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot h$$

Также $h=h_{AOD}+h_{BOC}=BC\cdot\cos 30+AD\cdot\cos 30^\circ=(BC+AD)\cos 30^\circ=$

$$=4\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{ABCD}=4\cdot 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{49\sqrt{3}}{4\cdot 16\sqrt{3}}=\frac{49}{64}$$

Черновик

б)

$BT = \sqrt{a^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha}$

$5^2 + 3^2 + 2\cdot5\cdot3\cdot\cos\beta = \sqrt{49} = 7$

25 9 15

$S_{ABT} = \frac{BT}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{BT}{2} = BT^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

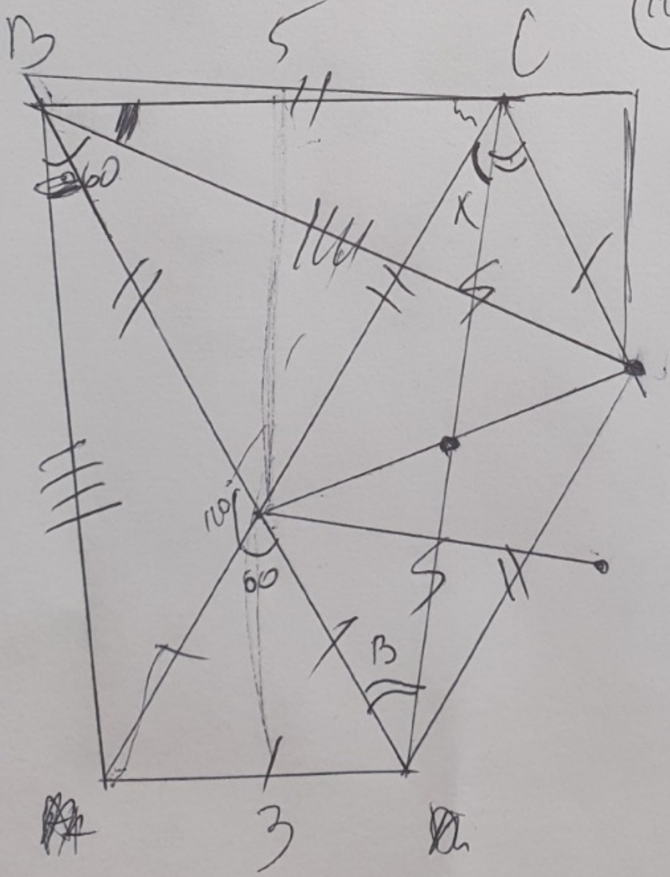
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{49\sqrt{3}}{4\cdot16\sqrt{3}} = \frac{49}{64}$

$\frac{7^2\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\alpha + \beta = 60$

120

а)



ABCD – равноб. трапеция

$5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}\cdot\frac{5+3}{2} = 16\sqrt{3}$

211005163 (U314097 M1277295)

№2

Черновик

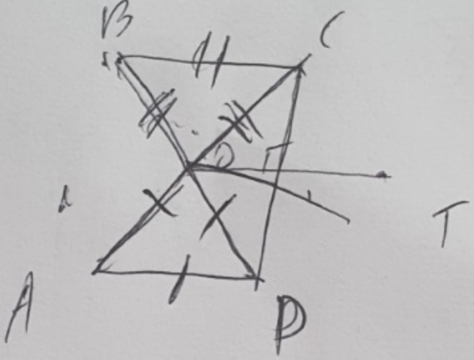
$\frac{1}{1}$ $\frac{15}{15}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{15}{14}$

$15\cdot14\cdot16+16\cdot\frac{15}{2}$

$\frac{2}{2}$ $\frac{15}{15}$

$\frac{1}{1}$ $\frac{2}{2}$

№3



Дубль

1

$\frac{15}{14}$

$16\cdot15\cdot14+16\cdot\frac{15}{2}$

$15\cdot14$

0 0 00

$\frac{16^2\cdot(16^2-1)}{2}$ $\frac{16^4-16^2}{2}$

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{1}{2}x^2y^2=1 \\ x^4+y^4-\frac{1}{2}x^2y^2=19 \end{cases}$$

№1

Черновик

$(y^2+x^2)^2-2{,}5x^2y^2=19$

$5(x^2+y^2)-2{,}5x^2y^2=5$

$x^4-x^2+y^4-y^2=18$

$x^4+x^2+y^4+y^2+x^2y^2=20$

$x^2(x-1)(x+1)$

$14=(x^2+y^2)^2-5(x^2+y^2)$

$x^2+y^2=a$

$a^2-5a-14=0$

$7;-2$

-2 – не подходит

15

14

$x^2+y^2=7$

$\frac{1}{2}x^2y^2=6$

$16(15\cdot 14+\frac{15}{2})$

$$\begin{cases} x^2y^2=12 \\ x^2+y^2=7 \end{cases}$$

$x^2=7-y^2$

$16\cdot 15(14+\frac{1}{2})=$

$(7-y^2)y^2=12$

$=16\cdot 15\cdot 14{,}5=$

$-y^4+7y^2-12=0$

$=8\cdot 15\cdot 29$

$y^4-7y^2+12=0$

$y^2=4 \quad y^2=3$

$y=2 \quad y=\sqrt{3}$

$x=\sqrt{3} \quad x=2$

11

211005163 (U314097 M1277295)

Чистовик: 3 из 5

№5

Сначала рассмотрим варианты с 1 дублем:

$\frac{x}{x} ; \frac{a}{b}$ Если для числа a есть все варианты, кроме числа на дубле, то есть $16-1=15$, то для числа b есть уже 14 вариантов, т.к. $a \neq b$ и x.

Для каждого дубля тогда $15 \cdot 14$ вариантов, и, т.к. дублей всего 16, то есть $16 \cdot 15 \cdot 14$ вариантов, где был бы 1 дубль.

Далее рассмотрим варианты с 2 дублями:

Нам нужно вытащить 2 различных дубля из 16.

Кол-во вариантов сделать это – $\frac{16 \cdot 15}{2}$

Теперь сложим эти варианты: $16 \cdot 15 \cdot 14 + \frac{16 \cdot 15}{2} =$

$= 8 \cdot 15 \cdot 29$ вариантов

211005163 (U314097 M1277295)