Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

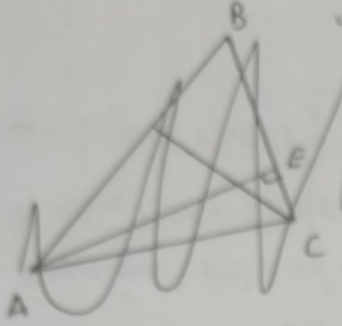
Шифр: **211007758**

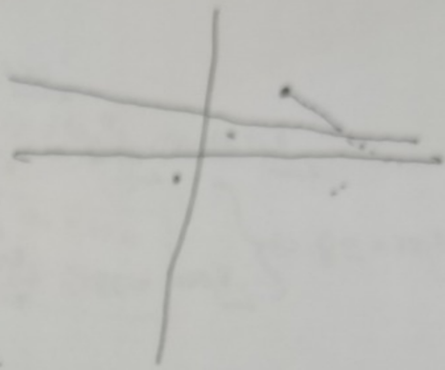
ID профиля: **847776**

Вариант 15

В №1. Черновик.

№1 (чистовик).





№3 черн.

~~$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0.$~~

$$\boxed{5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0.}$$

$9a^2-6ax+x^2+x^2+2xy+y^2=4a^2+4ay.$

$(3a-x)^2+(x+y)^2=4a^2+4ay.$

$a_1=\frac{16am}{31} \Rightarrow a_n=31n$

$a_1=16m$

16 31.

32 62.

64 124.

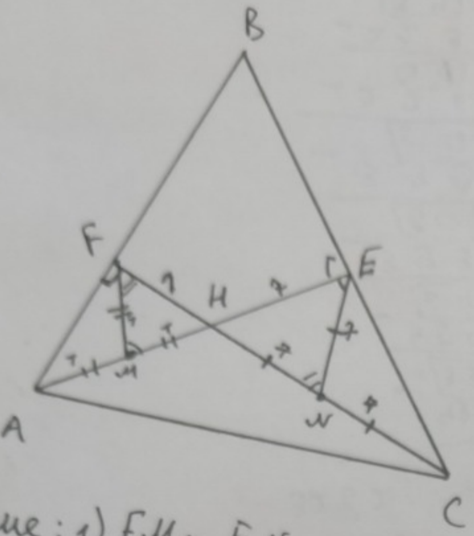
128 + 248. $\frac{16+31}{2}\cdot 16=47\cdot 8$

$= 581 - 376 = 105.$

3262. 581 − 99 = 487 − 33 = 454 − 61 = 393 − 60 = 333 − 57 = 276 − 47 = 229 − 34 = 195

195 − 36 = 159 − 38 = 121 − 59 = 62 − 58.

16
17
18
19
20



№1 (чистовик).

Дано: $\triangle ABC$ (остроугольный).

$CF \perp AB \quad AE \perp BC$.

$CF \cap AE = H$.

$AM = MH$; $HN = NC$. $FM = 1$; $EN = 7$.

$FM \parallel EN$.

Найти: $\angle ABC$; $S_{\triangle ABC}$; $R_{оп.}$

Решение: 1) FM и EN – медианы прямоугольных треугольников $\Rightarrow$ $FM = MH = AM = 1$; $HN = NC = EN = 7$.

2) $FM \parallel EN$.
$\angle FHM = \angle EHN$ $\Big\} \Rightarrow \triangle FMH \sim \triangle HEN \Rightarrow \dfrac{FH}{HN} = \dfrac{FM}{EN} \Rightarrow \boxed{FH = 1.}$

$\dfrac{HE}{MH} = \dfrac{EN}{FM} \Rightarrow \boxed{HE = 7}$

3) $FM = FH = MH \Rightarrow \angle FHM = 60^\circ$

4) $\angle BFH + \angle BEH = 180^\circ \Rightarrow \angle B + \angle FHE = 180^\circ$.
$\angle FHE = 180^\circ - \angle FHM = 120^\circ$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\angle B = 60^\circ}$

5) По т. косинусов:

$AH^2 + HC^2 - 2 \cdot AH \cdot HC \cdot \cos AHC = AC^2 \Rightarrow AC^2 = 4 + 196 - 2 \cdot 2 \cdot 14 \cdot \cos 120^\circ$.

$AC^2 = 228 \Rightarrow AC = 2\sqrt{57}$.

5) По т. синусов.

$\dfrac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = 2\sqrt{57}$.

6) $\angle HCE + \angle EHC = 90^\circ \Rightarrow \angle HCE = 30^\circ \Rightarrow \dfrac{BC}{FC} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 10\sqrt{3}$. $\Big\} \Rightarrow BE = 3\sqrt{3}$.

7) По т. Пифагора: $EC^2 = HC^2 - HE^2 \Rightarrow EC = 7\sqrt{3}$.

8) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BEA} + S_{\triangle AEC} = \dfrac{3\sqrt{3} \cdot 9}{2} + \dfrac{7\sqrt{3} \cdot 9}{2} = \dfrac{90\sqrt{3}}{2} = 45\sqrt{3}$.

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 45\sqrt{3}$; $\angle ABC = 60^\circ$; $R = 2\sqrt{57}$.

$\cancel{5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0}$

$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0.$

$a^3 \quad a^4$

$\cancel{a^2x^2-6a^2x+9a^2+a^2y^2} \quad a^2/x^2$

черн.

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0.$

$\cancel{2x^2-6ax+9a^2 \; x^2-6ax+9a^2+x^2+2xy+y^2}$

$\cancel{x^2+y-9} \; \cancel{(x+y-3a)^2=x^2+y^2+9a^2+2xy-6ay-6ay}$

$5a^2-\underline{6ax}\boxed{-4ay}+2x^2+2xy+y^2=0.$

$a^2x^2+a^2y^2-\underline{6a^2x}-2a^3y+\boxed{4ay}+a^4+4=0.$

№3 черн.

$~~a \cdot b~~ (a+b-c)(a+b-c) = a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$

$2ab = 4ay \Rightarrow a = 2a \quad b = y$

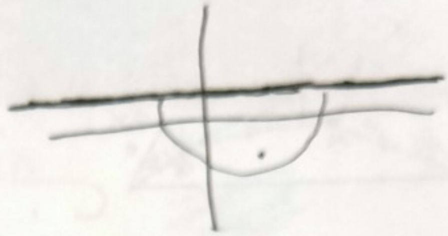
$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0.$

$\cancel{a^2x^2-6a^2x+9a^2+a^2y^2+4ay+4 = 2a^3y-a^4}$

$(ax-3a)^2+a^2y^2-2a^3y+a^4 = -4ay-4.$

$a^2(x-3)^2+a^2(y-a)^2 = -4ay-4.$

$(x-3)^2+(y-a)^2 = -\frac{4ay+4}{a^2}$



$9-5\sqrt{3}$

$-2a^3y \quad -9a^2.$

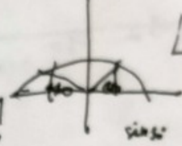
$\boxed{a^2x^2-6a^2x+9a^2}+a^2y^2-2a^3y+4ay+a^4+4-9a^2=0.$

$(ax-3a)^2$

$BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = FC.$

$BC = \frac{FC \cdot 2}{\sqrt{3}} \quad \frac{30}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}. \quad 10\sqrt{3}$



№2 черновик.

$S+31a_1 = S+16a_m$

$\Downarrow$

$EC = 7\sqrt{3}.$

$a_1 = \frac{16a_m}{31}.$

$\Downarrow \quad a_1 = 16 \quad a_m = 31.$

$196-49 = 147. = 3 \cdot 49 = 7\sqrt{3}.$

$~~a_1~~ = a_m = 31n \quad 32 \quad 62.$

$a_1 = 16. \quad 64 \quad 124.$

$372+16. \quad 248.$

$16 \cdot 32 = 128$

$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$

$47 \cdot 8.$

$372.$

$16 \cdot 32 = 256 \cdot 2 = 512+31 = \begin{array}{r} 581 \\ -543. \\ \hline \boxed{38.} \end{array}$

$17+21$
$18+20.$
$19+19$
2

$\cancel{9+49-2\cos 120^\circ \cdot 2}$

$4+196-2\cos 120^\circ \cdot 2 \cdot 14 = m.$

$200+28 = m^2. \quad m = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}. \quad 4+196-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot 14$

$\Vert$

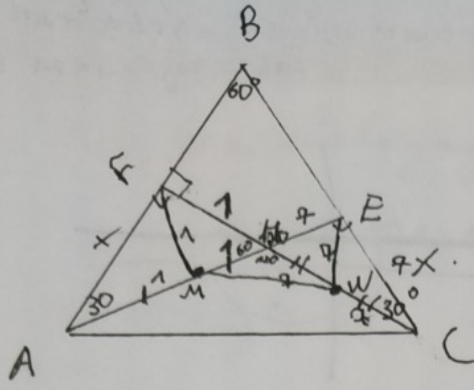
$2\sqrt{57}$

$\frac{2\sqrt{57}}{\frac{1}{2}} = 2R.$

$200+28. = 228.$

$2\sqrt{57}$

№1. Черновик.



$$\begin{array}{r|l} 581 & 31 \\ -31 & 18 \\ \hline 271 & \\ -248 & \\ \hline 230 & \end{array}$$

№2. Черновик.

$$\cancel{a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^3y + 4ay + a^4 + 4 = 0}.$$

$$\cancel{a^2x^2 + 6a^2x + 9a^2} + a^2y^2 - \cancel{2a^3y}\ 4ay + 4 = 2a^3y - a^4.$$

$$\cancel{a_1\ a_2}\ a_3 \dots a_n. + 31a_1 = S + 581$$

$$\cancel{a_1 = \frac{581}{31}}.$$

№2 Черновик.

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \dots a_n.\quad S-$

$32a_1 + a_2 + \dots a_3 + a_4 + a_5 + \dots a_n = 581.$

$31x = 16y.$

$x = \frac{16}{31}y.\quad y = 31.$

$x = 16.$

№3 черн.

$5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0.$

$$\frac{BC}{15} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{15}.$$

211007758 (U847776 M1273555)

В

№1. Черновик.

№2 (чистовик).

$$\left.\begin{aligned} S_I &= a_1 + a_2 + \ldots + a_m \\ S_{II} &= 32a_1 + a_2 + \ldots + a_m \\ S_{III} &= a_1 + a_2 + \ldots + 17a_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} S_{II} &= S_I + 31a_1 \\ S_{III} &= S_I + 16a_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow 31a_1 = 16a_m.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= 16n. \\ a_m &= 31n. \end{aligned}}$$

1) $n = 1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 16. \\ a_m &= 31 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ ~~$S_{max} = \frac{16+31}{2}$~~ ~~...~~ $32 \cdot a_1 + \ldots + a_m = 581.$

$$\Downarrow$$

$a_2 + a_3 \ldots = 38.$

$16 < a_2, a_3 \ldots < 31 \Rightarrow$ $a_2 = 17$ $a_3 = 21.$

$a_2 = 18$ $a_3 = 20.$

$a_2 = 19$ $a_3 = 19.$

$a_2 \neq a_3.$

$$\Downarrow$$

$a_2 = 17$; $a_3 = 21$ и $a_2 = 18$; $a_3 = 20$ – ед. случа

2) $n = 2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 32. \\ a_m &= 62. \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{II} > 581 \Rightarrow$ не подходит.

3) При последующем возрастании n суммы будут только расти, а значит 581 равняться не будут $\Rightarrow n = 1$ - единственное возможное.

Ответ: 1) $a_1 = 16$ $a_2 = 17$ $a_3 = 21$ $a_4 = 31.$

2) $a_1 = 16$ $a_2 = 18$ $a_3 = 20$ $a_4 = 31.$

211007758 (U847776 M1273555)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007758**

ID профиля: **847776**

Вариант 15

№4. (чистовик).

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3. \\ x^4+y^4-x^2y^2=31. \end{cases}$$

Замена: $x^2=t\ (t\geq 0)$; $y^2=m\ (m\geq 0)$.

$$\begin{cases} 3t+3m-mt=3. \\ t^2+m^2-mt=31. \end{cases} \quad \begin{cases} 3(m+t)=3+mt. \\ (m+t)^2-3mt=31. \end{cases} \quad \begin{cases} m+t=\frac{3+mt}{3}. \\ (m+t)^2=31+3mt. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\frac{(3+mt)^2}{9}=31+3mt.$$

$$27mt+279=9+6mt+m^2t^2.$$

$$m^2t^2-21mt-270=0.$$

$$D=441+1080=1521.$$

$mt_{1,2}=\frac{21\pm 39}{2}$ $\left[\begin{array}{l} -9 \\ 30 \end{array}\right.$ $m\geq 0; t\geq 0 \Rightarrow$ не подходит.

$$\begin{cases} mt=30. \\ 3m+3t=33 \end{cases} \quad \begin{cases} m=\frac{30}{t}. \\ \frac{30}{t}+t=11. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$t^2-11t+30=0\ (t\neq 0).$$

$$D=121-120=1.$$

$t_{1,2}=\frac{11\pm 1}{2}$ $\left[\begin{array}{l} 6. \\ 5 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \begin{cases} t=6 \\ m=5 \end{cases}$ или $\begin{cases} t=5 \\ m=6. \end{cases}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \begin{cases} x=\sqrt{6}. \\ y=\sqrt{5}. \end{cases} & \begin{cases} x=-\sqrt{6}. \\ y=\sqrt{5} \end{cases} & \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases} & \begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{5}. \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{6} \end{cases} & \begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases} & \begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases} & \begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{6}. \end{cases} \end{array}}$$

Ответ: $(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{5})$ или $(\pm\sqrt{5};\pm\sqrt{6})$.

№ (а). (чистовик).

№ 4.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

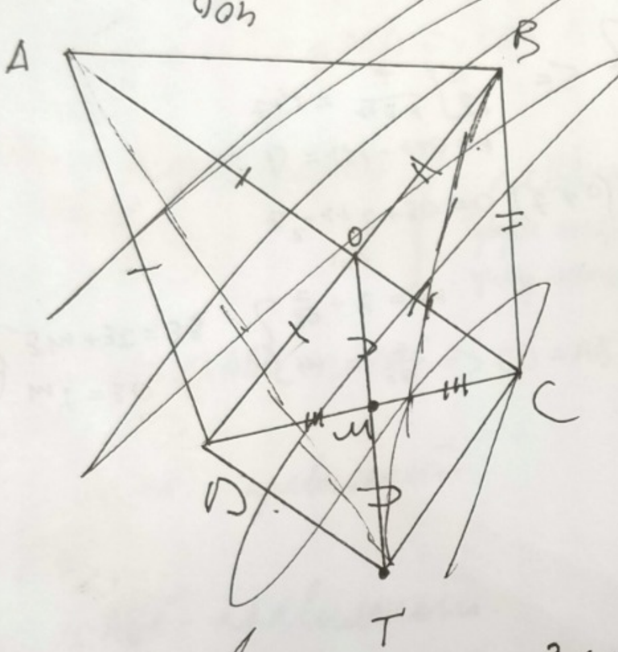
1) ~~Замена~~ $3t+3m-mt=3$, $t^2+m^2-mt=31$ $\Rightarrow t^2+m^2-31=3t+3m-3$

$t^2-3t+m^2-3m-28=0$.

$D=9-4$.

№ 7.

доп



$$\begin{cases} 3m+3t-mt=3 \\ m^2+t^2-mt=31 \end{cases}$$

$(m-t)^2+mt=31$

$(m+t)^2-3mt=31$

$m+t=\frac{3+mt}{3}$

$31+3mt=\frac{9+6mt+m^2t^2}{9}$

$3\cdot 6+3\cdot 5-30$.

$\sqrt{6}$ $\sqrt{5}$.

$$31+3mt=\frac{(3+mt)^2}{9}$$

$$279+27mt=9+6mt+m^2t^2$$

$$m^2t^2-21mt-270=0$$

$$D=441+1080=1521$$

$$\begin{array}{r} \times\ 39 \\ 39 \\ \hline +351 \\ 1170 \\ \hline 1521 \end{array}$$

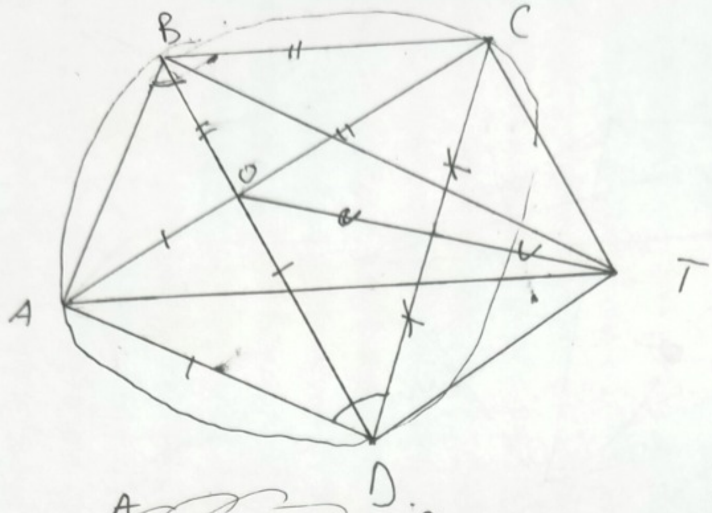
$mt=\frac{21\pm 39}{2}$ $\boxed{30}$.

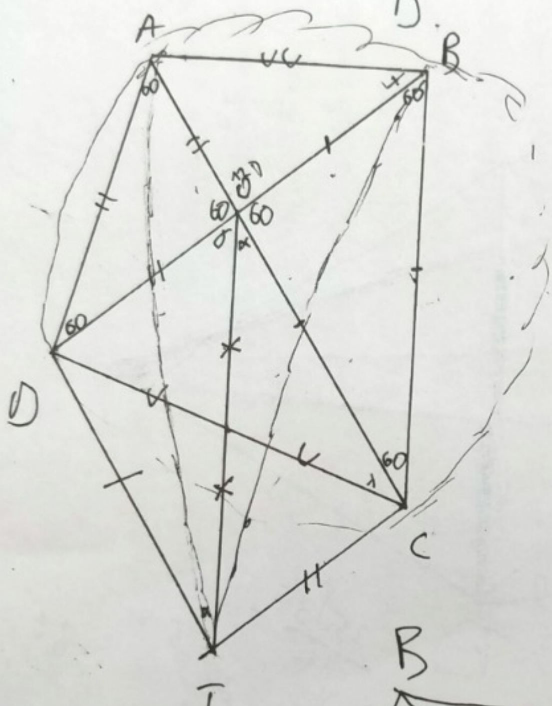
$3m+3t=31$.

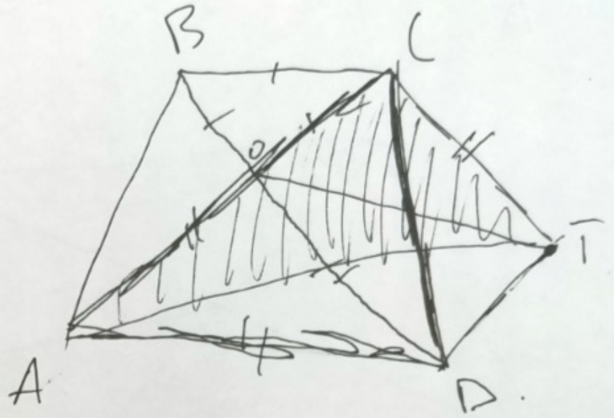
$m+t=11$.

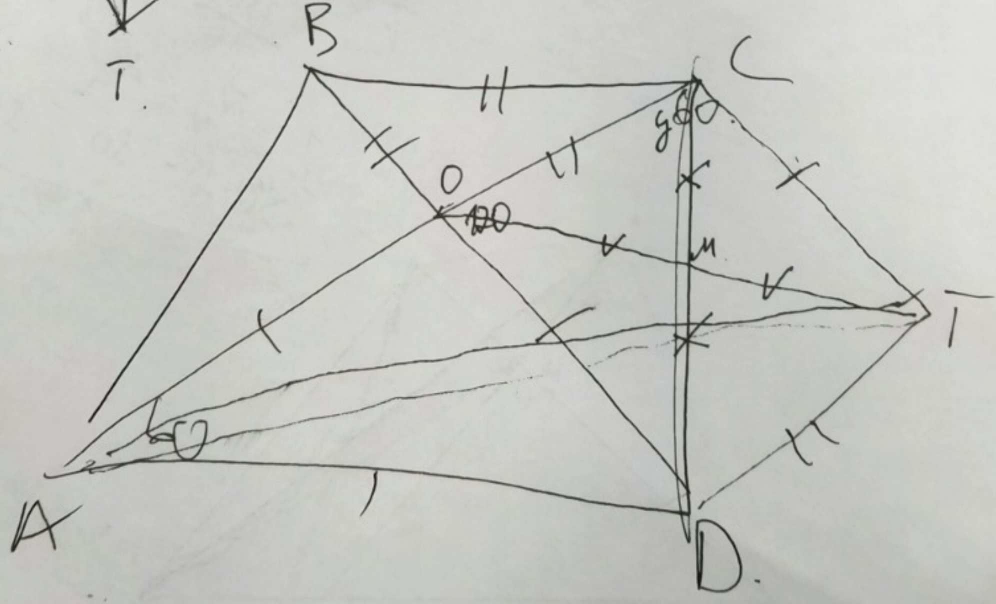
$mt=30$.

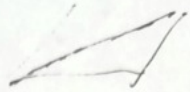
211007758 (U847776) M1

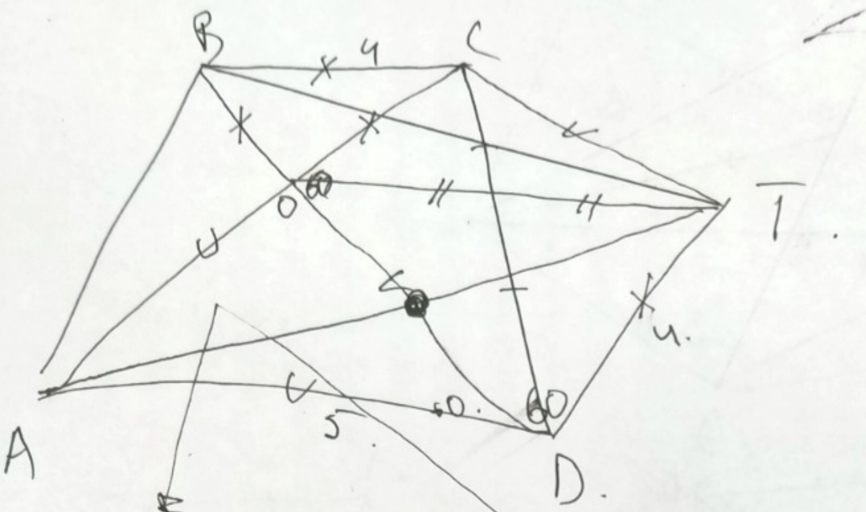

B
C
O
T
A
D

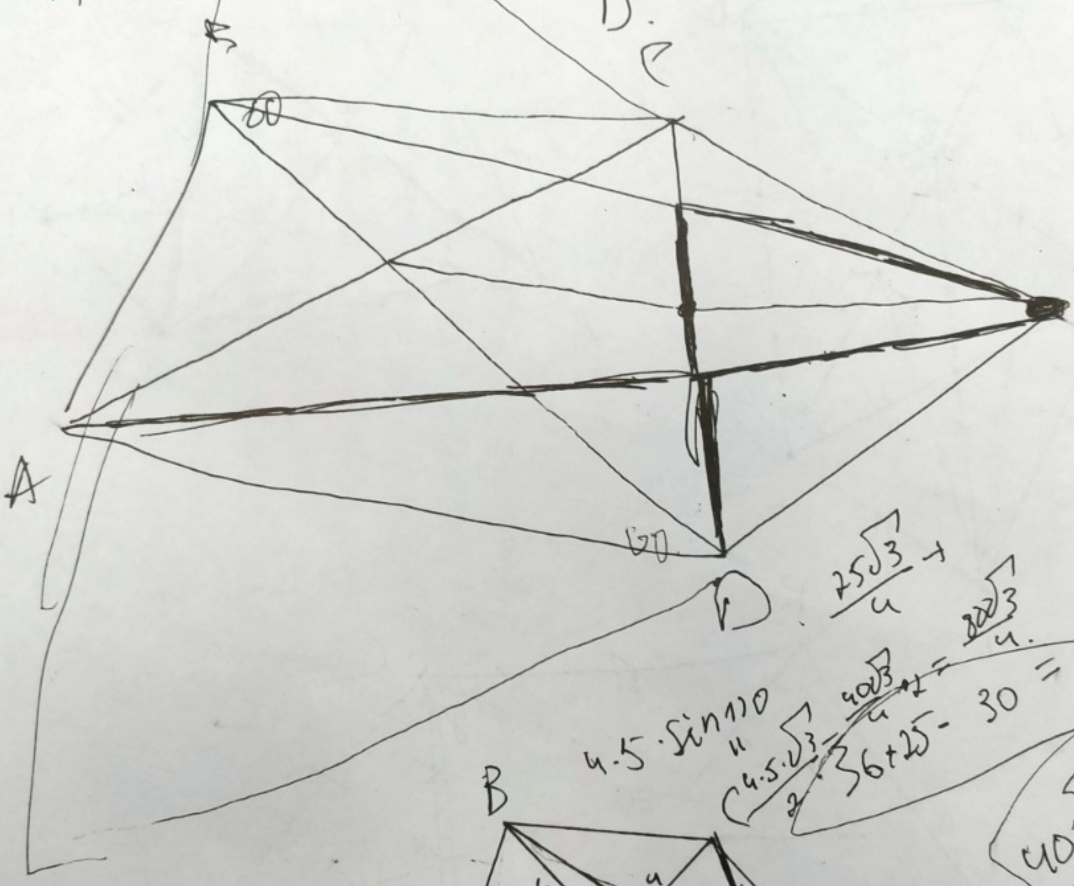

A
B
60
60
60
60
60
60
D
C
T


B
C
O
T
A
D


B
C
O
120
M
T
A
D







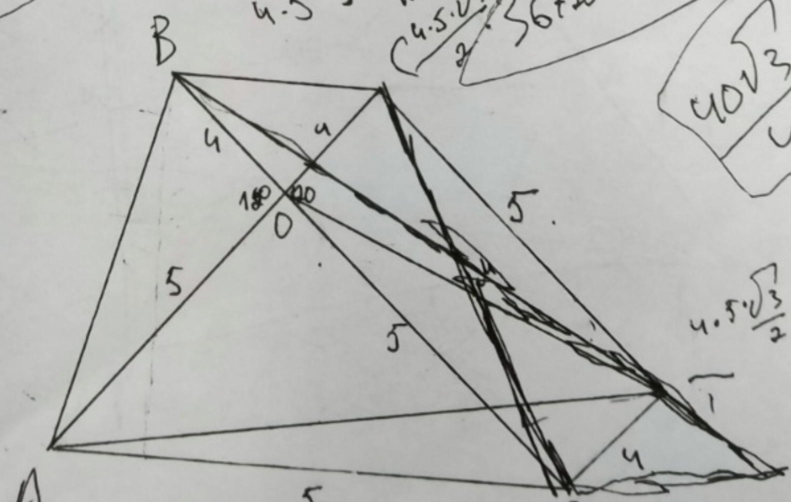
$\frac{25\sqrt{3}}{4}+$ 81

$4\cdot5\cdot\sin 120$

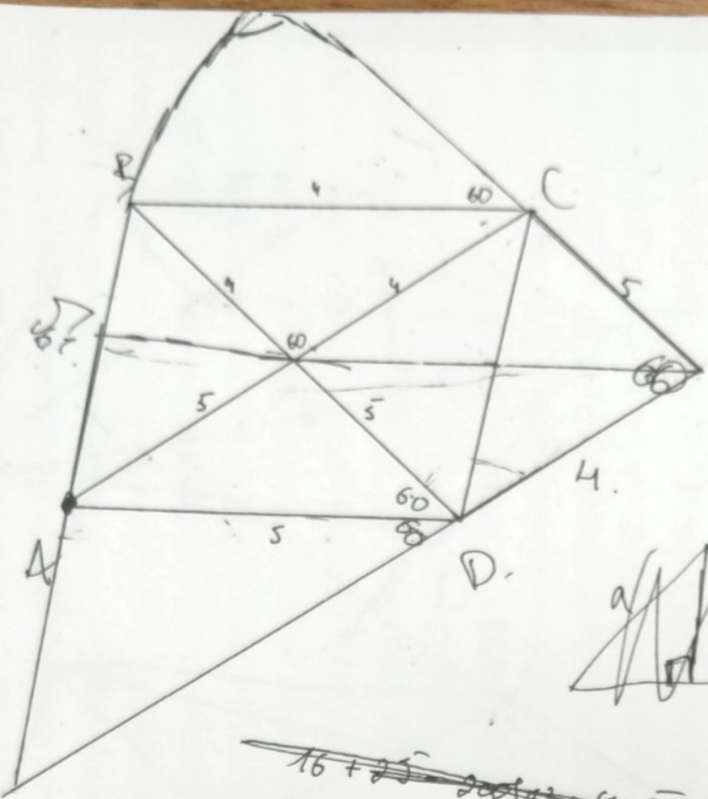
$\frac{4\cdot5\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{40\sqrt{3}}{4}\cdot2=\frac{80\sqrt{3}}{4}$

$36+25-30=31$

$\boxed{\frac{40\sqrt{3}}{4}+\frac{25\sqrt{3}}{4}}+\frac{16\sqrt{3}}{4}$



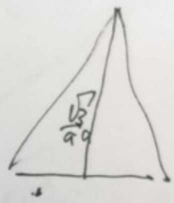
$4\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}:2=5\sqrt{3}=\frac{20\sqrt{3}}{4}\cdot2=\frac{40\sqrt{3}}{4}$



$\cancel{16 + 25 - 2\cos 120 \cdot 4 \cdot 5 =}$

$41 + 20$

$\cancel{61 + 25 - 10\sqrt{61}\cos m = 16}$



$16 + 25 - 2\cos 120° \cdot 4 \cdot 5 = m^2.$

$m^2 = 41 + 20 = \sqrt{61}.$

$\frac{1}{2} \sin 60° \cdot 4 \cdot 4 = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$

$\frac{a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

$\frac{61 \cdot \sqrt{3}}{}$

$\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\sin} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot 4 \cdot 5 = 5\sqrt{3}.$

$5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{32\sqrt{\cdot} + 5}{}$

№5 (чистовик).

1) 20 вариантов - вытянуть дубль.

2) 19^2 вариантов - вытянуть II картошки (число, которое использовали в I раз нельзя использовать повторно).

$\Downarrow$

всего вариантов - $20 \cdot 19^2$, но при этом набор карточек AB и BA - это один способ, поэтому всего вариантов

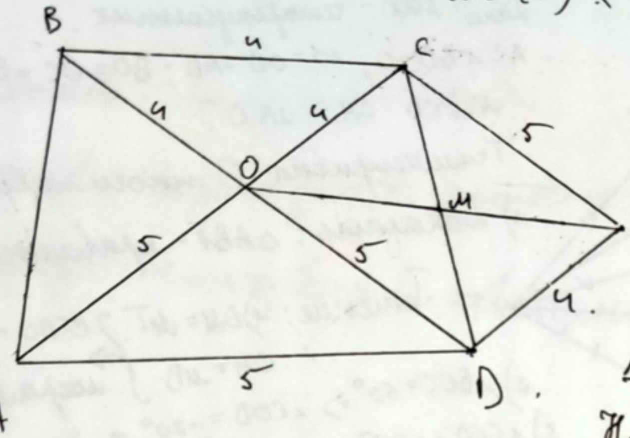
$\parallel$

$10 \cdot 19^2 = 3610$.

Ответ: 3610 вариантов.

211007758 (U847776 M1273556)

№6 (б) (чистовик.



Дано: $ABCD$ - четырехугольник.

$\triangle BOC$, $\triangle AOD$ - правильные

$M \in CD$ $CM = MD$.

T симметрична относительно M.

$BC = 4$ $AD = 5$.

$\triangle ABT$ - правильный.

Найти: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение: 1) ~~$S_\triangle AB$~~ $BO = 4$. $AO = 5$. $\angle BOA = 120°$ $\Rightarrow$ $AB = \sqrt{16+25+20}$. $AB = \sqrt{61}$.

2) $S_{\triangle ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{61}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{61\sqrt{3}}{4}$.

3) $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \sin 120° \cdot 4 \cdot 5 = 5\sqrt{3}$.

4) $S_{\triangle BOC} = \frac{BO^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

5) $S_{\triangle AOD} = \frac{AO^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

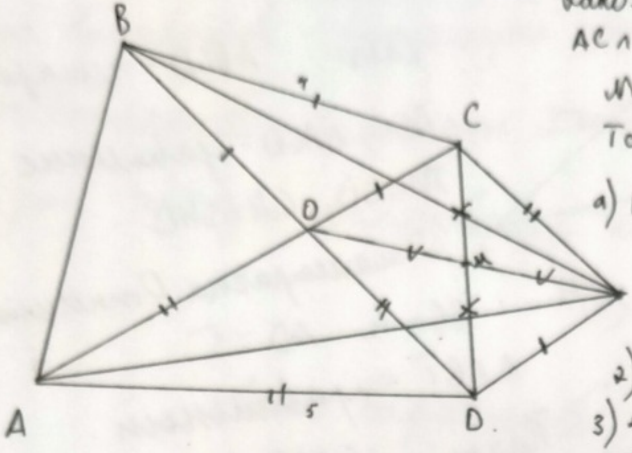
6) $S_{ABCD} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

7) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61}{81}$.

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61}{81}$.

№6 (а) (чистовик).

Дано: $ABCD$ - четырехугольник.
$AC \cap BD = O$; $AO = OD = AD$; $BO = OC = BC$.
$M \in CD$ $CM = MD$.
T симметрична O относительно CD



а) Доказать: $\triangle ABT$ - правильный.

Решение:
1) $OM = MT$, $CM = MD$ $\Rightarrow$ $CTDO$ - параллелограмм.
2) $\angle BOC = 60° \Rightarrow \angle COD = 120°$
3) $\angle COD + \angle OCT = 180°$ т.к. $OCTD$ - параллелограмм $\Rightarrow \angle OCT = 60°$.
4) $CT = OD$ (т.к. параллелограмм), $OD = DA$ $\Rightarrow CT = AD$.
5) $CT = AD$, AC - общая, $\angle OCT = \angle CAD = 60°$ $\Rightarrow \triangle ACT = \triangle ACD \Rightarrow CD = AT$.
6) $\angle ODT = \angle OCT = 60° \Rightarrow \angle ODT = \angle CBD$. $DT = OC \Rightarrow DT = BC$. BD - общая $\Rightarrow \triangle CBD = \triangle TDB$ по двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow CD = BT$.
7) $BO = OC$, $AO = OD$, $\angle BOA = \angle COD$ $\Rightarrow \triangle ABO = \triangle COD \Rightarrow CD = AB$.
8) $AB = CD$, $BT = CD$, $AT = CD$ $\Rightarrow \triangle ABT$ - правильный.

Ответ: $\triangle ABT$ - правильный.