Часть 1

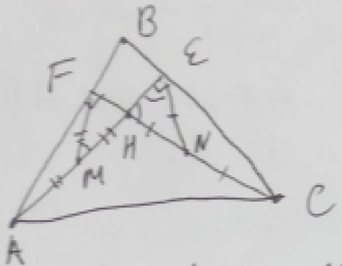
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007741**

ID профиля: **815904**

Вариант 15

№1 Чистовик



1) $\triangle AFH$ — прямоугольный; M — середина $AH \Rightarrow$
$\Rightarrow AM = MH = FM$ (медиана из пр. угла)

2) Аналогично, $EN = HN = NC$.

3) $FM \parallel EN \Rightarrow \angle FMH = \angle HEN$ (накр. леж.)

4) $HN = NE \Rightarrow \angle EHN = \angle HEN$ $(= \angle FMH)$
(как р/б)

5) $\angle FHM = \angle EHN$ (как вертикальные)

6) $\angle MFH = \angle MHF$ (как углы при основании р/б $\triangle FMH$ $(FM = MH)$

7) $\angle MFH = \angle HNE$ (как накр. леж.)

8) $\triangle FMH$: $\angle F = \angle M = \angle H \Rightarrow \triangle FMH$ — р/с;
$\angle F = \angle M = \angle H = 60^\circ$.

9) Аналогично п.8 в $\triangle ENH$: $\angle E = \angle N = \angle H = 60^\circ$

10) $\triangle AFH$: $\angle F = 90^\circ$; $\angle H = 60^\circ \Rightarrow \angle FAH = 30^\circ$

11) Аналогично, $\angle ECH = 30^\circ$

12) $AH = 2FM = (п.1) = 2$
$CH = 2EN = 14$

13) $\triangle FMH$ — р/с $\Rightarrow FH = FM = 1$
$\triangle ENH$ — р/с $\Rightarrow EH = EN = 7$

14) $FC = FH + HC = 1 + 14 = 15$
$AE = AH + HE = 2 + 7 = 9$

15) Из пр. $\triangle ABE$; $\angle A = 30^\circ$; $AE = 9$: $AB =$
$= \dfrac{AE}{\cos 30^\circ} = \dfrac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

16) Аналогично, $BC = \frac{FC}{\cos 30^\circ} = \frac{15 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$

17) Из пр. $\triangle ABE$: $\angle E = 90^\circ$; $\angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

18) Т. косинусов для $\triangle ABC$ и ст. AC:

$$AC^2 = 36 \cdot 3 + 100 \cdot 3 - 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 60 \cdot 3 =$$
$$= 3(136 - 60) = 3 \cdot 76$$
$$AC = \sqrt{3 \cdot 76} = 2\sqrt{57}$$

19) Обобщ. т. синусов для $\triangle ABC$:

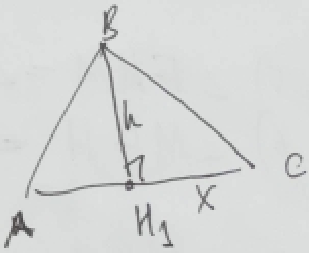
$$2R = \frac{AC}{\sin B} = \frac{2\sqrt{57}}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{57}}{\sqrt{3}}$$

$$R = 2\sqrt{19}$$

20) Проведем высоту из $\angle B$:

$BH_1 = h$; $AH_1 = 2\sqrt{57} - x$

$H_1C = x$.



Тогда из пр. $\triangle ABH_1$ и $\triangle BH_1C$:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 300 \\ h^2 + (2\sqrt{57} - x)^2 = 36 \cdot 3 \end{cases}$$ (по т. Пифагора)

$$4\sqrt{57}\,x - 4 \cdot 57 = 300 - 36 \cdot 3$$
$$4\sqrt{57}\,x = 336$$
$$x = \frac{84}{\sqrt{57}}$$
$$h^2 = 300 - \frac{84 \cdot 84}{57} = \frac{3348}{19}$$
$$h = \frac{6\sqrt{3 \cdot 31}}{\sqrt{19}}$$
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{3 \cdot 31}}{\sqrt{19}} \cdot 2\sqrt{57} = 18\sqrt{31}.$$

Ответ: $\underset{\angle B}{60^\circ}$; $\underset{R}{2\sqrt{19}}$; $\underset{S}{18\sqrt{31}}$

Итого, варианты:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_2 = 17 \\ a_3 = 21 \end{cases} \\ 32 \cdot 16 + 17 + 21 + 31 = \\ = 16 + 17 + 21 + 31 \cdot 17 = 581 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} a_2 = 18 \\ a_3 = 20 \end{cases} \\ 32 \cdot 16 + 18 + 20 + 31 = \\ = 18 + 16 + 20 + \\ + 31 \cdot 17 = 581 \end{array}$$

Далее при увеличении a_2 и сохранении суммы $a_2 + a_3 = 38$ a_3 будет $\le a_2$.

Ответ: $(16; 17; 21; 31)$

$(16; 18; 20; 31)$

Пусть числа равны №2 Чистовик соответственно по возрастанию $a_1 \ldots a_n$. Тогда $0 < a_1 < \ldots < a_n$.

По условию:

$$\begin{cases} 32a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 581 \quad \cdot(-1) \\ a_1 + \ldots + 17a_n = 581 \end{cases} \Bigg| \oplus$$

$$-31a_1 + 16a_n = 0$$

$$31a_1 = 16a_n.$$

$a_1; a_n \in \mathbb{N}$, $31 \perp 16$ (вз. просты) $\Rightarrow$ $a_1 \vdots 16$, $a_n \vdots 31$; $a_1 \geq 16$, $a_n \geq 31$

1) Если $a_1 > 16$, то т.к. $a_1 \vdots 16$, то $a_1 \geq 32$, т.е.

$\overset{32a_1}{a_2 + \ldots + a_n +} = 1024 + \ldots = 32 \cdot 32 + \ldots > 581$, значит $a_1 = 16$.

2) Если $a_n > 31$, то т.к. $a_n \vdots 31$, то $a_n \geq 62$, т.е.

$a_1 + \ldots + a_{n-1} + 17a_n = \ldots + 62 \cdot 17 > 581$, значит, $a_n = 31$.

3) $32a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 32 \cdot 16 + \ldots + 31 = 581$

$a_2 + \ldots + a_{n-1} = 581 - 543 = 38$

Заметим, что чисел от a_2 до a_{n-1} не менее 2, иначе a_n будет не самым большим.

Заметим, что чисел от a_2 до a_{n-1} не более 2, т.к. $a_2 > a_1 = 16 \Rightarrow a_2 + \ldots + a_{n-1} \geq a_2 \cdot (n-2) \geq$ $\geq 17 \cdot (n-2)$, а $17 \cdot 3 > 38$.

Значит чисел $a_2 \ldots a_{n-1}$ ровно 2. Т.е. $n = 4$.

$a_2 > a_1 = 16$. Значит, $a_2 \geq 17$.

$a_3 = 38 - a_2$. $a_3 > a_2$.

Задача 3 Чистовик.

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=a;\ y=a.$

$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0$

$(ax-3a)^2+(ay-a^2+2)^2=5a^2$

$(x-3)^2+(y-a+\frac{2}{a})^2=5$

$B(3;\ a-\frac{2}{a})$ (при $a=0$, второе уравнение не окружность)

$A(a;a)$

1) $\begin{cases} a>1 \\ a-\frac{2}{a} < 1 \quad | \cdot a \end{cases}$

$a^2-2a-\cancel{1}+a<0$

$(a-2)(a+1)<0$

$a\in(-1;2)$

$a\in(1;2)$

2) $\begin{cases} a<1 \\ a-\frac{2}{a}>1 \quad | \cdot a\ (a<0) \end{cases}$ $\quad a-\frac{2}{a}>a$

$\frac{2}{a}<0$

$a<0$

$a^2-2-a<0$

$a\in(-1;2)$ и $a<0$

$a\in(-1;0)$

Ответ: $(-1;0)\cup(1;2)$

211007741 (U815904 M1276758)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007741**

ID профиля: **815904**

Вариант 15

Чистовик

Задача 4 (Лист 1)

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-x^2y^2=3 \\ (x^4+y^4+2x^2y^2)-2x^2y^2-x^2y^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-x^2y^2=3 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=31 \end{cases}$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} a=x^2+y^2 \\ b=x^2y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a-b=3 \\ a^2-3b=31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=3a-3 \\ a^2-3(3a-3)=31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-9a+9-31=0 \\ b=3a-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-11a+2a-22=0 \\ b=3a-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-11)(a+2)=0 \\ b=3a-3 \end{cases}$$

I. $\begin{cases} a=11 \\ b=30 \end{cases}$ или II. $\begin{cases} a=-2 \\ b=-9 \end{cases}$

Чистовик Задача 4 (лист 2)

Сделаем обратную замену:

I. $\begin{cases} x^2+y^2=11 \\ x^2y^2=30 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=11-y^2 \\ (11-y^2)y^2=30 \end{cases}$

$\begin{cases} 11y^2-y^4=30 \\ x^2=11-y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} y^4-11y^2+30=0 \\ x^2=11-y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} y^4-5y^2-6y^2+30=0 \\ x^2=11-y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2(y^2-5)-6(y^2-5)=0 \\ x^2=11-y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} (y^2-6)(y^2-5)=0 \\ x^2=11-y^2 \end{cases}$

а) $\begin{cases} y^2=6 \\ x^2=5 \end{cases}$ или б) $\begin{cases} y^2=5 \\ x^2=6 \end{cases}$

а) $\begin{cases} x=\sqrt5 \\ y=\sqrt6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt5 \\ y=-\sqrt6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\sqrt5 \\ y=\sqrt6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\sqrt5 \\ y=-\sqrt6 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=\sqrt6 \\ y=\sqrt5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt6 \\ y=-\sqrt5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\sqrt6 \\ y=\sqrt5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\sqrt6 \\ y=-\sqrt5 \end{cases}$

Ответ: $(\sqrt5;\sqrt6)$; $(\sqrt5;-\sqrt6)$; $(-\sqrt5;\sqrt6)$; $(-\sqrt5;-\sqrt6)$; $(\sqrt6;\sqrt5)$; $(-\sqrt6;\sqrt5)$; $(\sqrt6;-\sqrt5)$; $(-\sqrt6;-\sqrt5)$

II. $\begin{cases} x^2+y^2=-2 \\ x^2y^2=-9 \end{cases}$

$x^2\geq0;\ y^2\geq0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2\geq0.$

Но $x^2+y^2=-2$, значит решений нет. $(-2<0)$

211007741 (U815904 M1276759)

№5 Чистовик

Т.к. все карточки различные и их ровно 20^2 и стороны карточек различны, то значит, у фокусника есть все пары чисел $(a; b)$, где a и b от 1 до 20 и карточки $(a; b)$ и $(b; a)$ считаем различными. Их ровно $20 \cdot 20 = 20^2$. (20 способов на 1 место и 20 способов на 2 место).

Дублей всего 20. ((1;1); (2;2) ... (20;20)).

Если фокусник вытянул 2 дубля, то способов это сделать $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ (20 способов на первое место, 19 способов на 2 место и делим на 2, т.к. не важно, что первое, а что второе).

Если фокусник вытянул ровно 1 дубль, то способов вытянуть дубль 20; способов вытянуть вторую карту (не дубль и без повт. с первой картой цифр): $\underbrace{20 \cdot 20}_{\text{всего}} - \underbrace{20}_{\text{дублей, включая выбранную}} - \underbrace{19 \cdot 2}_{\text{карт, у которых первая или вторая (не одновр.) совпадают с цифрой на дубле}} = 342$.

Итого, всего способов $190 + 342 \cdot 20 = 7030$

Ответ: 7030

Чистовик. Задача 6 (лист 4)

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{61} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{61}} = 5\sqrt{3}$$

5) Аналогично $S_{\triangle COD} = 5\sqrt{3}$

$(CO=4;\ OD=5;\ \angle COD = 120^\circ)$

6) $$S_{ABCD} = 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 14\sqrt{3} + \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

7) $\triangle ABT$ – р/с (по п. а)

$AB = \sqrt{61}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 61 = \frac{\sqrt{3} \cdot 61}{4} \text{ (по лемме I.)}$$

8) $$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61\cancel{\sqrt{3}} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 81\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{61}{81}.$$

Ответ: $\frac{61}{81}$.

~~Листовик (Лист 2)~~

Листовик

Задача 6 (Лист 3)

II. 1) $S_{ABCD} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOA} + S_{\triangle COD}$.

2) $\triangle BOC$ – р/с; $BC = 4 \Rightarrow S_{\triangle BOC} = \frac{\sqrt3}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt3$ (по лемме I)

3) $\triangle AOD$ – р/с; $AD = 5 \Rightarrow S_{\triangle AOD} = \frac{\sqrt3}{4} \cdot 5^2 = \frac{25\sqrt3}{4}$ (по лемме I.)

4) $\triangle BOA$: $BO = 4$

$AO = 5$

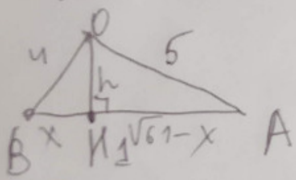
$\angle BOA = 120^\circ$ (как смежный с $\angle BOC = 60^\circ$)

по т. косинусов:

$AB^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot4\cdot5\cdot\cos 120^\circ = 16 + 25 + 20 = 61$

$AB = \sqrt{61}$.

Опустим высоту из вершины O.



$OH_1 = h$

$BH_1 = x$.

$AH_1 = \sqrt{61} - x$.

Тогда по т. Пифагора

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 16 & | \cdot (-1) \\ h^2 + (\sqrt{61} - x)^2 = 25 \end{cases} \Bigg| \oplus$$

$61 - 2\sqrt{61}x = 9$

$2\sqrt{61}x = 52$

$x = \frac{26}{\sqrt{61}}$

$h^2 = 16 - x^2 = 16 - \frac{26\cdot26}{61} = \frac{300}{61}$

$h = \frac{10\sqrt3}{\sqrt{61}}$

211007741 (U815904 M1276759)

Чистовик
задача 6 (лист 2)

10) $OCTD$ – параллелограмм $\Rightarrow OC \parallel TD$; $OD \parallel CT$

11) $\angle COD = 120^\circ$, $CO \parallel DT$ $\Big| \Rightarrow \angle TDO = 60^\circ$ (как внутренние односторонние)

12) $\angle TDO = 60^\circ$, $OD \parallel CT$ $\Big| \Rightarrow \angle CTD = 120^\circ$ (как внутр. одност.)

13) $ACTD$; $\angle CAD = 60^\circ$; $\angle CTD = 120^\circ$; $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ $\Big| \Rightarrow ACTD$ – вписанный.

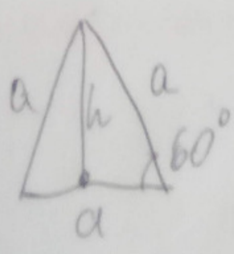
14) $ACTD$ – впис., $ABCD$ – впис. $\Big| \Rightarrow ABCTD$ – вписанный (около ACD можно описать только 1 окружность)

15) $ABCTD$ – впис., $\angle BCA = 60^\circ$, $\angle BCA$ и $\angle BTA$ оп. на дугу AB с одной стороны $\Big| \Rightarrow \angle BTA = \angle BCA = 60^\circ$

16) Аналогично, $\angle BDT = \angle BAT = 60^\circ$

17) $\angle BAT = 60^\circ$, $\angle BTA = 60^\circ$ $\Big| \Rightarrow \triangle BAT$ – р/с (правильный), ч.т.д.

б) 1. Докажем, что для равностороннего треугольника со стороной a его площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.



Проведем высоту, кот. является также медианой и биссектрисой.

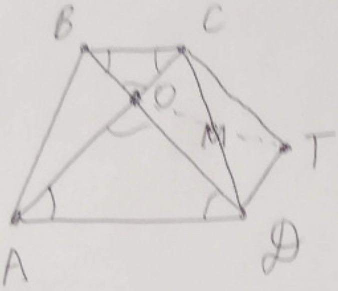
$h = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S = \frac{1}{2} a h = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, ч.т.д.

Чистовик

Задача №6 (лист 1)

а)



1) $\triangle BOC$ - правильный $\Rightarrow BO = OC = BC$;
$\angle B = \angle C = \angle O = 60°$

2) Аналогично: $AO = OD = AD$
$\angle OAD = \angle ODA = \angle AOD = 60°$

3) $\left.\begin{array}{l}\angle OBC = 60° \\ \angle ODA = 60°\end{array}\right| \Rightarrow BC \parallel AD$, т.к. накрест лежащие углы равны.

4) $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ - трапеция (по опр.)

5) На сторону AB опираются углы $\angle BCA = 60°$ и $\angle BDA = 60° \Rightarrow ABCD$ - вписанный (по пр.)
(C и D с одной стороны от AB)

6) $\left.\begin{array}{l}ABCD \text{ - вписанный} \\ ABCD \text{ - трапеция}\end{array}\right| \Rightarrow ABCD$ - р/б трапеция

7) Пусть M - середина CD.
Тогда $CM = MD$ и $OM = MT$. (по построению T)

8) $\left.\begin{array}{l}CM = MD \\ OM = MT\end{array}\right| \Rightarrow OCTD$ - параллелограмм
т. к. диагонали делятся точкой пересечения пополам.

9) $\left.\begin{array}{l}\angle BOC \text{ и } \angle COD \text{ - смежные} \\ \angle BOC = 60°\end{array}\right| \Rightarrow \angle COD = 180° - 60° = 120°$.