Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007619**

ID профиля: **367113**

Вариант 15

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$ **Черновик**

$+4-9a^2$

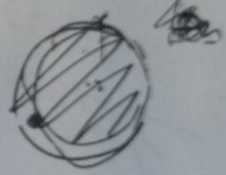
$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4=0$

$a^2(x^2-6x)$ … $(a^2-2a)^2=4a^2-(2-a^2)^2=-4-a^4+4a^2$

$a^2(x-3)^2+a^2\left(y^2+2y\left(\frac{2}{a}-a\right)+\left(\frac{2}{a}-a\right)^2\right)+$

$a^2(x-3)^2+a^2\left(y+\frac{2}{a}-a\right)^2+4+a^4-9a^2-4-a^4+4a^2=0$

$(x-3)^2+\left(y+\frac{2}{a}-a\right)^2=5a^2$ $(x-1)^2+(y-1)^2=1$



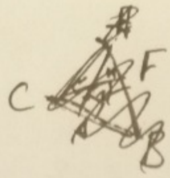
$y+\frac{2}{a}-a$ $\left(3;\ a-\frac{2}{a}\right)$

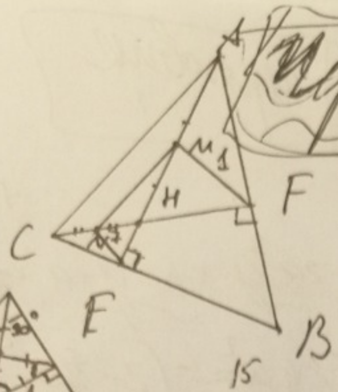
$a-\frac{2}{a}>1 \Rightarrow a^2-a-2>0$

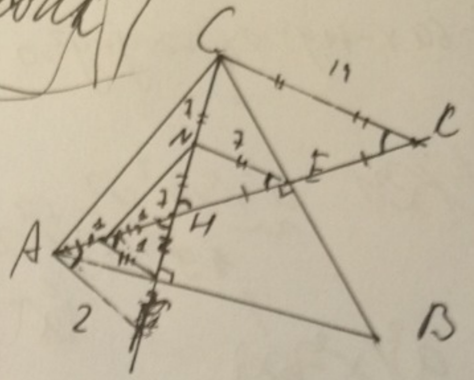
$\cancel{a^2-2a+a-2>0}$

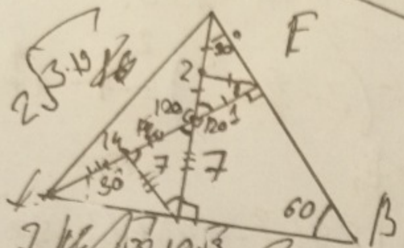
$(a-2)(a+1)>0$

~~Черновик~~









$7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $10\sqrt{3}$

$15 / \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$\frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$

$4 + 14^2 - 2 \cdot 4 \cdot 14 \cdot \cos 120^\circ = 4 + 196 + 2 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 196 + 32 = 228 =$

$228 = 114 \cdot 2 = 4 \cdot 57 = 4 \cdot 3 \cdot 19$

$S = \frac{10\sqrt{3} \cdot 9}{2} = 45\sqrt{3}$

$\sqrt{49 \cdot 3 + 81} = \sqrt{3(49 + 27)} = \sqrt{3 \cdot 76} = 15$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 \cdot 15 = 45\sqrt{3}$

$2R = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{2\sqrt{3 \cdot 19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\quad 2\sqrt{3 \cdot 19}$

$R = 2\sqrt{19}$

$\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4\sqrt{3}$

$512 + 31 = 543$

$\sqrt{4 \cdot 4 \cdot 3 + 9} =$

$= \sqrt{3(16 + 3)} =$ $\sqrt{3 \cdot 19} \cdot 2$

$32x_1 + \ldots + x_n = 581$

$x_1 + \ldots + 17x_n = 581$

$31x_1 + \ldots x_{n-1} = x_2 + \ldots + 16x_n$

$38: a + b, a < 31$ $\quad 32 \cdot 16 =$

$x_n : 31$

$31 + 38 + 16 \cdot 32$

$69 \quad 512$

581.

$x_1 = \frac{16}{31} x_n$

$38 = 17 + 21, \; 18 + 20,$

$x_n = 31, \; x_1 = 16$

$\frac{32 \cdot 16}{31} x_n \leq 581 + x_n =$

$=$

211007619 (U367113 M1274046)

№3.

Преобразуем выр-е (2) для точки B:

$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+1=0$

$a^2(x^2-6x+9)+a^2y^2+a^2\cdot 2y(\frac{2}{a}-a)+(\frac{2}{a}-a)^2\cdot a^2-$

$-a^2(\frac{2}{a}-a)^2+a^4+4-9a^2=0$

$a^2(x-3)^2+a^2(y+\frac{2}{a}-a)^2-\cancel{a^4}-4+4a^2+\cancel{a^4}-9a^2=0$

$\cancel{a^2}(x-3)^2+\cancel{a^2}(y+\frac{2}{a}-a)^2=5\cancel{a^2}$

При $a\neq 0$, если же $a=0$, то $\frac{2}{a}$ - не сущ-т (Л)

$(x-3)^2+(y+\frac{2}{a}-a)^2=5$

$B(3;\ a-\frac{2}{a})\Rightarrow a-\frac{2}{a}\vee 1\Rightarrow a^2-a-2\vee 0$

$(a-2)(a+1)\vee 0$

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$ это выр-е больше

$\cancel{2(x+y)^2}\ (x+y)^2+x^2-6ax+5a^2-4ay=0$

211007619 (U367113 M1274046)

№1.

Дано:

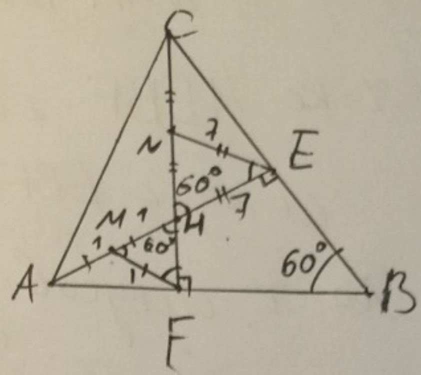
Z

найти:

S_{ABC}

$\angle ABC$

R_{on}



1) Заметим, что NE и FM - медианы в прямоуг. тр-ках CEH и HFA, а значит,

($\angle E = 90°$, $\angle F = 90°$: высоты, $CN = NH$, $MH = AM$ - поусл.)

$NE = NH = CN = 7$, $MH = MF = AM$ - по св-ву мед в пр. тр.

2) ~~значит~~, тр-ки NEH и MHF - р/б, $\angle NEH = \angle NHE$, $\angle FHM = \angle MFH$. но $NE \parallel MF$, а значит $\angle NEH = \angle HMF$ - при $NE \parallel MF$ и EM-секущ. ~~тогда~~. заметим, что $\angle NHE = \angle MHF$ - вертикальн. ал-но, $\angle NEH = \angle NHE = \angle MHF = \angle HFM = \angle HMF$ - по св-ву транзитивности. тогда $\triangle MHF$ - р/стр, $MH = HF = MF = 1$, Аналогично доказываем, что $\triangle HNE$ - р/стр, $NH = HE = NE = 7$, соотв. углы равны

3) $\left[\begin{matrix} CN = NH \\ MH = AM \end{matrix}\right.$ - из данного $\Rightarrow AH = 2$, $CH = 14$.

По теор. кос. для $\triangle AHC$, $\angle AHC = 120°$ ($\angle NHE = 60°$ - р/стр $\triangle$, $\angle NHE = 180° - \angle NHE$)

$AC^2 = HC^2 + AH^2 - 2HC \cdot AH \cdot \cos 120°$

$AC^2 = 14^2 + 4 + 2 \cdot 14 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 196 + 32 = 4 \cdot 3 \cdot 19$.

$AC = 2\sqrt{3 \cdot 19}$

211007619 (U367113 M1274046)

3) $\angle FHE = \angle NHM = 120^\circ = 180^\circ - \angle NHE$

В ч-ке $HEBF$ $\angle HEB + \angle EBF + \angle BFH + \angle FHE = 360^\circ$,

сл-но, $\angle EBF = 60^\circ$ $(\Leftrightarrow \angle ABC)$ ~~$2B$~~ $2R_{on} =$

По т. синусов для $\triangle ABC$, $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{2\sqrt{3 \cdot 19}}{\sin 60^\circ} =$

$$= \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{19} = 2R_{on} \Rightarrow R_{on} = 2\sqrt{19}.$$

4) В $\triangle ABE$ $AB = \dfrac{AE}{\sin B} \Rightarrow AB = \dfrac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}$

$(AE = EH + MH + AM = 9)$

$CF = CN + NH + HF = 7 + 7 + 1 = 15$

$$S_{ABC} = \frac{CF \cdot AB}{2} = 45\sqrt{3}.$$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{ABC} = 45\sqrt{3}$, $R_{on} = 2\sqrt{19}$

№2.

Пусть у нас набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на доске,

Запишем условие: $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$

$32x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 581$ (1)

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + 17x_n = 581.$ (2)

Приравняем их:

$32x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 + x_2 + \ldots + 17x_n.$

Заметим, что $x_2, \ldots, x_{n-1}$ не изменились, сократим их.

$31x_1 = 16x_n; \quad x_1 = \frac{16}{31}x_n.$

Подставим в (1):

$\frac{32 \cdot 16}{31}x_n + \ldots + x_n = 581.$

x_n, x_1 - натуральные, сл-но $x_n \vdots 31$.

Заметим, что x_n не может быть больше 31, т.к. тогда $\frac{32 \cdot 16}{31} \cdot x_n$ будет больше 581 при условии $x_n \vdots 31$, тогда (т.к. $16 \cdot 32 = 512$)

$x_n = 31, \quad x_1 = \frac{16}{31}x_n = 16.$

Рассмотрим (I):

$\frac{32 \cdot 16}{31}x_n + x_n + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 581.$

Подставим $x_n = 31$:

$16 \cdot 32 + 31 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 581$

$x_2 + \ldots + x_{n-1} = 38.$

Заметим, что $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n$

тогда $16 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < 31$, $x_2 + \ldots + x_{n-1} = 38.$ (3)

Нетрудно заметить, что чисел в сумме (3) будет 2, т.к. если их 3 то мин. знач-е равно $17+18+19 > 38$. нетрудно перебрать все различные пары неодинаковых чисел, первое из котор. больше 3-го учитывая, что оба они ≥ 17: $(17; 21)$, $(18; 20)$

19 и более не подходят, т.к. тогда второе больше или равно первому.

Ответ: $(16, 17, 21, 31)$; $(16; 18; 20; 31)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007619**

ID профиля: **367113**

Вариант 15

Черновик

1-20

1-19

$20 \cdot 20 \Rightarrow 20$

$20 \cdot 19 \cdot 19$

1;1

$\frac{19 \cdot 19}{k}$

$20 \cdot 19 \Rightarrow 20 \cdot 19 \cdot 18$

$1 \rightarrow 20$

20

20

$20 \rightarrow 19 \cdot 19 - \cancel{19}$

всего дублей

дублей

$20 \cdot 19 \cdot 19$

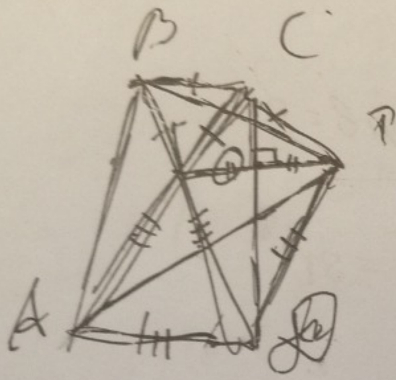
2-х дубли дублей

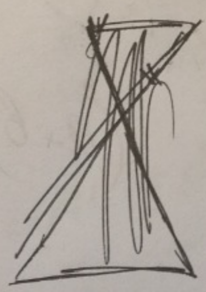
$\frac{20 \cdot 19}{2}$

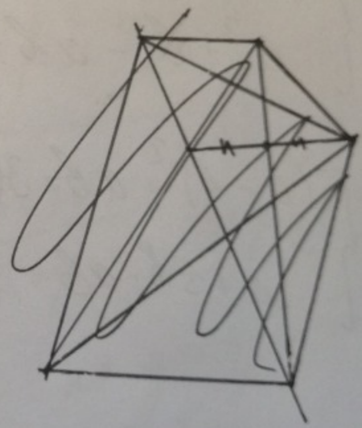
$20 \cdot 19 \cdot 19 - 19 \cdot 10 = 19 \cdot 10(2 \cdot 19 - 1) =$

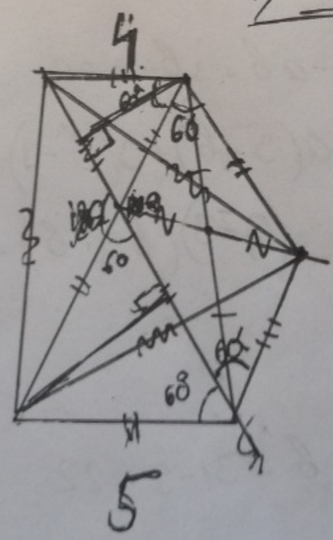
$20 : 19$

$370 \cdot 19 =$









$16 + 81 - \cancel{6}\, 9 \cdot 4 =$

$= 61$

Черновик.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4+y^4-3x^2-3y^2=\cancel{3}\,28 \\ (x-y)^2+x^2y^2=31 \end{cases}$$

$(x^2-y^2)^2+3x^2+3y^2=28$

$x^2=a,\ y^2=b$

$$\begin{cases} 3a+3b-ab=3 \quad |\cdot 3 \\ a^2+b^2-ab=31 \end{cases}$$

$9a+9b-3ab=9$

$(a+b)^2-3ab=31$

$$\begin{cases} (a-b)^2+ab=31 \\ 3a+3b-ab=3 \Rightarrow 3a-ab+3b-3=0 \end{cases}$$

$\cancel{3}\,a(3-b)+3(b-3)+6=0$

$a,b\geq 0$

$(a-3)(\cancel{b}\,3-b)=-6$

$\cancel{3/4=(a-b)^2+3a+3b}$

$3/-b$ $\cancel{b\geq 3}$

$(a+b)^2-9a-9b=31-9=22$

$(a+b)(a+b-9)=22$

$(11-b-3)(3-b)=-6$

$\cancel{D}=4+4\cdot 9=40$

$\left[b=\frac{-2+\sqrt{40}}{2}=-1+\sqrt{10}=\sqrt{10}-1 \right.$

$\left[\begin{array}{l} a+b=11 \\ a+b=-2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a=11-b \\ a=-2-b \end{array}\right.$

$(8-b)(3-b)=-6$

$+3 \quad -2$

$+2 \quad -3$

$b^2+2b-9=0$

$\cancel{b^2}$

$\left[\begin{array}{l} 5=b \Rightarrow a=6 \\ 6=b \Rightarrow a=5 \end{array}\right.$

-9

$(-b-5)(3-b)=-6$

$b^2+5b-3b-15=\cancel{2}-6$

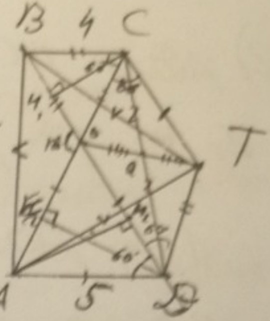
$(b+5)(b-3)=-6$

211007619 (U367113 M1274047)

№5, чистовик

Заметим, что всего карточек было 20×20,
... уникальна расположим их в таб-

№6. Чистовик.



Дано: 2

ABT - р/ар - ?

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = ?$

1) $OCTD$ - параллелограмм.
Пусть $CD \cap OT = Q$, тогда
из условия: $CQ = QD$
из св-в симметрии: $QO = QT$.
сл-но, $CT = OD$, $CO = TD$.
но в ΔBOC $BO = OC = BC$ - из его правильности, аналогично $AO = OD = AD$.
Откуда по св-вам транзитивности
$CT = AO = OD = AD$, $BC = CO = BO = DT$.

2) $\angle BOC = \angle BCO = \angle OBC = \angle AOD = \angle OAD = \angle ODA = 60°$ - из св-в р/стр тр-ков.
тогда $\angle COD = \angle BOA = 180° - \angle BOC = 120°$. Далее, $\angle ACT = \angle BDT = 60° = 180° - \angle COD$ - из св-в параллелограмма.

3) $\Delta BCT = \Delta ADT = \Delta BOA$: I признак
$BO = DT = BC$, $CT = AO = AD$ - по доказанному.
$\angle BCT = \angle BCA + \angle ACT = 60 + 60° = 120°$
$\angle ADT = \angle ODT + \angle ODA = 60° + 60° = 120$
$\angle BOA = 120°$ - по док-ву

Откуда $BA = BT = AT$ - как соотв. против равных углов!

211007619 (U367113 M1274047)

Чистовик, 6

2) $AD=5$, $BC=4$.

~~тр~~ из док. ранее:

$AD = DO = \cancel{AD}\ OA = CT = 5$

$BO = CO = BC = TD = 4.$

итак, по теореме косинусов в $\triangle BOA$:

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2AB \cdot BO \cdot \cos 120^\circ$

$AB^2 = 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot 9 + 25 = 61$

$AB = \sqrt{61}$.

~~$S_{ABT}=$~~ Вообще, в любом р/стр тр-ке высота равна стороне $\cdot \sin 60^\circ$, т.е. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ стороны. тогда площадь такого тр-ка равна $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, где a – сторона.

$S_{ABT} = \frac{61 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Пусть в тр-ках BOC и AOD высоты CH_1 и AH_2 соотв.

тогда $CH_1 = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $AH_2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. заметим, что

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{BCD} = \frac{CH_1 \cdot BD}{2} + \frac{AH_2 \cdot BD}{2} = \frac{BD}{2}(CH_1 + AH_2) =$

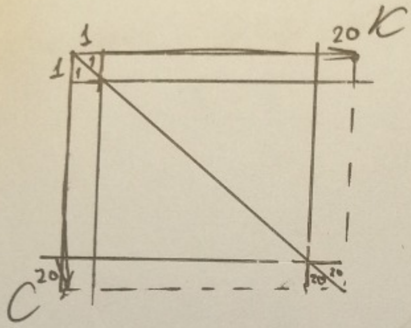
$= 9 \cdot \left(\frac{4}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{9 \cdot 9}{4}\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{61}{4}\sqrt{3}}{\frac{9}{4} \cdot 9 \cdot \sqrt{3}} = \frac{61}{81}$

Ответ: $\frac{61}{81}$

№5, чистовик

Заметим, что всего карточек было 20×20, каждая уникальна. расположим их в таблицу:



где К – красная сторона, а С – синяя. заметим, что всего дублей 20. Пусть фокусник всегда берёт сначала дубль. на ход решения это не повлияет, т.к. от порядка ничего не зависит. тогда он взял одну из 20 карточек. Далее рассмотрим выбор второй. заметим, что на дубле есть какое-то число, и использовать его уже нельзя. таким образом, из таблицы удалятся один столбец и строка, то есть $20+20-1=39$ карточек. („-1" так как столбец и строка пересекаются). у нас останется $19 \cdot 19$ клеток, их и может выбрать фокусник, то есть суммарно их $20 \cdot 19^2$. Однако мы учли каждую пару дублей дважды, то есть взяв их сначала первыми, потом вторыми. Всего таких пар $\frac{20\cdot 19}{2} = 190$. Вычтем это число. Искомое $20\cdot 19^2 - 190 = 190\cdot 37 = 7030$ способов — наш ответ.

$$\begin{array}{r} \times\, 190 \\ 37 \\ \hline 133 \\ +\,57 \\ \hline 7030 \end{array}$$

Ответ: 7030 сп.

Чистовик 5

№4, Чистовик

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

Пусть $x^2=a$, $y^2=b$. $(a,b\geq 0)$ тогда:

$$\begin{cases} \cancel{3a+3b}\ 3a+3b-ab=3 \\ a^2+b^2-ab=31. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+3b-ab=3 \,|\cdot 3 \\ (a+b)^2-3ab=31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a+9b-3ab=9 \\ (a+b)^2-3ab=31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2-9(a+b)=22 \quad (1) \\ 3a+3b-ab=3 \end{cases}$$

$$(a+b)(a+b-9)=22.$$

Решим это уравнение для $a+b$. оно квадратное, то есть им-т 2 корня. несложно их найти:

$$\left[\begin{array}{l} a+b=11 \\ a+b=-2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a=11-b \quad (3) \\ a=-2-b \quad (2) \end{array}\right.$$

~~Рассмотрим оба случая~~ заметим, что a и b больше 0, но система (2) не удовлетворяет условию, т.к. сумма 2 полож. чисел <0 (ложь)

Тогда ~~решим~~ рассмотрим $a+b=11$ для второго ур-я. итак:

чистовик. 4

$3(a+b)-ab=3$

$33-a(11-a)=3$

$a(11-a)=30$

Это кв. ур-е, корни которого легко найти: $\left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=6. \end{array}\right.$ Тогда $\left[\begin{array}{l} b=6,\ a=5 \\ b=5,\ a=6 \end{array}\right.$

откуда имеем несколько пар ответов:

$\left[\begin{array}{l} x^2=a=5,\ x=\pm\sqrt{5},\ y^2=b=6,\ y=\pm\sqrt{6} \\ y^2=b=5,\ y=\pm\sqrt{5},\ x^2=a=6,\ x=\pm\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Ответ: $(\sqrt{5};\sqrt{6})$; $(\sqrt{5};-\sqrt{6})$; $(-\sqrt{5};\sqrt{6})$; $(-\sqrt{5};-\sqrt{6})$; $(\sqrt{6};\sqrt{5})$; $(\sqrt{6};-\sqrt{5})$; $(-\sqrt{6};\sqrt{5})$; $(-\sqrt{6};-\sqrt{5})$.

211007619 (U367113 M1274047)