Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007467**

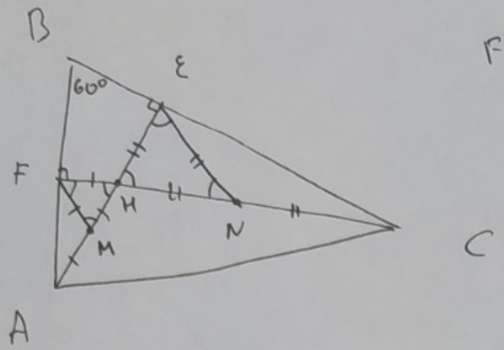
ID профиля: **279051**

Вариант 15

Чистовик   Математика 9 класс

Вариант 15

№ 1



$FM=1$

$EN=7$

$FM \parallel EN$

$\boxed{\begin{gathered}\angle ABC - ? \\ S_{ABC} - ? \\ R_{ABC} - ?\end{gathered}}$

$\boxed{\text{Ответ: } \angle ABC = 60^\circ;\ S_{ABC} = 45\sqrt{3};\ R_{ABC} = 2\sqrt{19}}$

Решение:

I) $FM = MH = AM$; $EN = NH = NC$ (медиана в прямоугольном Δ)

II) $$\left.\begin{aligned}&\angle FMH = \angle HEN\ (FM \parallel EN)\\ &\angle HEN = \angle EHN\ (HN = EN)\\ &\angle EHN = \angle FHM\ (\text{верт.})\\ &\angle MHF = \angle MFH\ (FM = MH)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle FHM = \angle HMF = \angle MFH = 60^\circ$$ (углы одного Δ)

$\Downarrow$

HFM – правильный Δ

Аналогично HEN – правильный Δ

III) $\angle ABC = 360^\circ - 2\cdot 90^\circ - \angle FHE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (сумма углов в чет. $FBEH$)

$\boxed{\angle ABC = 60^\circ}$

IV) $AE = 1 + 1 + 7 = 9$

$BE = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot AE$ (ΔADE ($\angle ABE = 60^\circ$; $\angle BAE = 30^\circ$)) $= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 9 = 3\sqrt{3}$

$CH = 7 + 7 = 14$

$EC = \sin 60^\circ \cdot CH$ (ΔHEC ($\angle EHC = 60^\circ$; $\angle HEC = 90^\circ$)) $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 14 = 7\sqrt{3}$

$BC = 3\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = \frac{9 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = \boxed{45\sqrt{3}}$

$\boxed{S_{ABC} = 45\sqrt{3}}$

V) $EC = 7\sqrt{3}$

$AE = 9$

$AC = \sqrt{EC^2 + AE^2}$ (ΔAEC ($\angle AEC = 90^\circ$)) $= \sqrt{49\cdot 3 + 81} = \sqrt{228} = 2\sqrt{3}\sqrt{19}$

VI) $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R_{ABC}$ (т. синусов ΔABC) $\Rightarrow R_{ABC} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{19}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{19}$

$\boxed{R_{ABC} = 2\sqrt{19}}$

Чистовик — Математика 9 класс

Вариант 15

№2

Ответ: $\boxed{16, 17, 21, 31}$ $\boxed{16, 18, 20, 31}$

На доске написаны числа $a_1, a_2, \dots a_n$ и (пусть) $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

(они попарно различны)

I) На доске написано 1 число

$a \Rightarrow 32a = 581$

$17a = 581$

это бред ли, т.к. тогда $15a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 32a = 0$

II) На доске хотя бы 2 числа

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n + 31a_1 = 581 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n + 16a_n = 581 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 31a_1 = 16a_n$$

$\Downarrow$

$$a_n = \frac{31a_1}{16}$$

$\left.\begin{array}{l}\text{числа натуральные;} \\ (31, 16) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \vdots 16 \Rightarrow a_1 = 16k$ (k - натуральное)

$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 16k \\ a_n = 31k \end{array}}$

$32a_1 + a_n \le 581$ ~~...~~ (~~равенство~~ $(a_1 + a_2 + \dots + a_n + 31a_1 = 581)$ числа натуральные и их хотя бы 2)

$\Downarrow$

$32 \cdot 16k + 31k \le 581$

$512k + 31k \le 581$

$543k \le 581$

$\Downarrow$

$k \le 1$ (k натуральное) $\Rightarrow k = 1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 16;\ a_n = 31}$

$32a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = 581$

$16 < a_2, a_3 \dots a_{n-1} < 31$

$\Downarrow$

$n - 1 = 3$ ~~...~~

(если $n-1 < 3 \Rightarrow a_2 + \dots + a_{n-1} < 31 < 38$)

(если $n-1 > 3 \Rightarrow a_2 + \dots + a_{n-1} > 3 \cdot 16 > 38$)

$32 \cdot 16 + 31 + (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) = 581$

$543 + (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) = 581$

$a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 38$

$\boxed{\begin{array}{l} a_2 = 17 \\ a_3 = 21 \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} a_2 = 18 \\ a_3 = 20 \end{array}}$ $\cancel{\begin{array}{l} a_2 = 19 \\ a_3 = 19 \end{array}}$ ~~все числа различны~~ $(16 < a_2 < a_3 < 31)$

лист 2 из 2

211007467 (U279051 M1273359)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007467**

ID профиля: **279051**

Вариант 15

Чистовик

Математика 9 класс

Вариант 15

№5

Заметим, что существуют абсолютно любые карточки, т.к. всего различных карточек из условия $\leq 20^2$ (на синей стороне 20 вариантов написать число и на красной тоже 20). Значит в наборе 20 дублей (есть дубль с каждым из чисел от 1 до 20).

~~Осталось выб~~ Как только фокусник выберет один из 20 дублей, ему останется выбрать ~~повторную~~ вторую карточку так, чтобы на второй карточке не было числа как на дубле. Сколько способов выбрать вторую карточку?

Пусть фокусник выбрал дубль с числом ~~10~~ n. Тогда посмотрим сколько карточек с числом n на синей стороне: их 20, т.к. на красной стороне может стоять любое число от 1 до 20, но забудем о дубле с номером n (он уже выбран). Итого 19 карточек фокусник выбрать точно не может. Точно так-же он не может выбрать карточку с числом n на ~~синей~~ красной стороне. Из таких карт тоже 19 под запретом. Значит, способов выбрать вторую карточку $20^2 - 19 - 19 - 1$

с числом n на синей стороне

с числом n на красной стороне

дубль с числом n

понятно, что карточка, подходящая под оба эти условия — дубль (уже выбран)

Способов провернуть махинацию из условия

$\boxed{20 \cdot (20^2 - 39)}$

Дважды посчитали случаи, когда вытащены 2 дубля, таких случаев $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ (дублей 20). $7220 - 190 = 7030$

Ответ: 7030

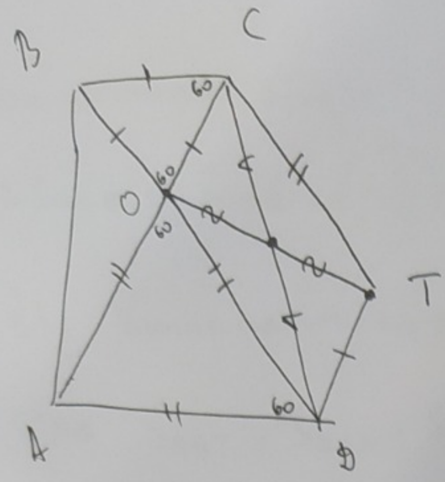
лист 1 из 1

211007467 (U279051 M1273360)

Чистовик Математика 9 класс

Вариант 15

№6



а) I) OCTD – параллелограмм (диагонали точкой пересечения делятся пополам по условию)

$\Downarrow$

$CT = OD$; $OC = DT$

$\angle OCT = \angle ODT = \cancel{180^\circ - 120^\circ}$

$\angle COB = 60^\circ$ ($\triangle BOC$-прав)

II) $\triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA$

$BO = BC = TD$ (правильные $\triangle$ и парал. OCTD)

$OA = CT = DA$ (правильные $\triangle$ и парал. OCTD)

$\angle BOA = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

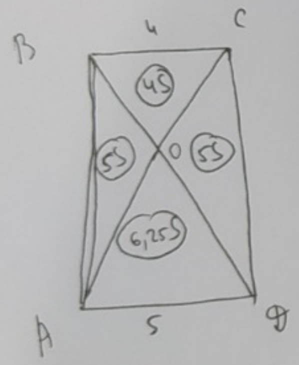
$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ (прав. $\triangle$)

$\angle TDA = \angle TDO + \angle ODA = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$\Downarrow$

$BA = BT = TA \Rightarrow$ $\boxed{\triangle ABT \text{ – правильный}}$

BC=4
AD=5



б) $S_{\triangle BOC} = 4S \Rightarrow S_{\triangle ABO} = 5S$ ($S_{\triangle ADO} : S_{\triangle BOC} = OC : OA = 4:5$)

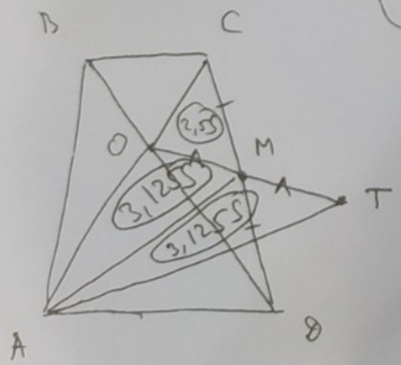
$\boxed{\triangle \text{ прав.}}$

Аналогично $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{BOA}} = \frac{5}{4} \Rightarrow$ $\boxed{S_{\triangle AOD} = 6{,}25S}$

$S_{DOC} = 5S$ (так же)

$\Downarrow$

$\boxed{S_{ABCD} = 20{,}25S}$



M – середина CD

$S_{OCM} = \frac{1}{2} S_{OCD} = 2{,}5S$ (середина)

$S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ACD} = \frac{1}{2}(6{,}25S + 5S) = 5{,}625S$ (середина)

$\Downarrow$

$S_{AOM} = 5{,}625S - 2{,}5S = 3{,}125S$

$S_{AMT} = S_{AOM}$ (M-середина OT) $= 3{,}125S$

$\Downarrow$

$S_{AOT} = 6{,}25S$

№6 (продолжение)

Аналогичным образом считаем $S_{BOT} = \left(\frac{S_{BCD}}{2} - S_{OMD}\right) \cdot 2 = S_{BCD} -$

$- 2S_{OMD} = S_{BOC} = 4S$

Из вышенаписанного следует:

~~$S_{AТA}$~~ $S_{ABT} = S_{BOA} + S_{AOT} + S_{BOT} = 5S + 6{,}25S + 4S = \boxed{15{,}25S}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \cancel{\frac{18{,}25}{}} \frac{1525}{2025} = \boxed{\frac{61}{81}}$$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{61}{81}}$