Часть 1

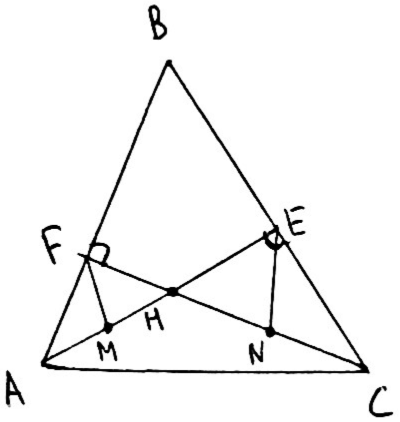
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007147**

ID профиля: **185105**

Вариант 15

N1



$FM = 1$ $EN = 7$ FM и EN медианы в прямоугольных треугольниках AFH и $CEH \Rightarrow AH = 2FM = 2$ $CH = 2EN = 14$

$\triangle AFH \sim \triangle CEH$ по 2 углам $\Rightarrow \angle FMH = \angle ENH$ т.к это соответствующие углы в 2 подобных треугольниках

$\angle MFH = \angle HNE$ т.к $FM \parallel EN \Rightarrow \angle FMH = \angle MFH$

$\angle MFH = \angle MHF$ т.к $FM = MH \Rightarrow \triangle FMH$ - равносторонний

аналогично $\triangle HEN$ - равносторонний $\Rightarrow \angle FHA = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FAH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$$S = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC}{2} = \cancel{\frac{AB \cdot BC}{4}} \frac{AB \cdot BC \cdot \sqrt{3}}{4} \qquad S = (AB \cdot CF) : 2 = (BC \cdot AE) : 2$$

$$CF = \cancel{AH +} FH + CH = FM + CH = 1 + 14 = 15 \qquad AE = AH + HE = 2 + EN = 9$$

$$\frac{AB \cdot BC \sqrt{3}}{4} = \frac{15AB}{2} \Rightarrow AB \cdot BC \cdot \sqrt{3} = 30AB \Rightarrow BC = \frac{30}{\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{3}AB \cdot BC}{4} = \frac{9BC}{2} \Rightarrow \sqrt{3}AB \cdot BC = 18BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{18}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \frac{AB \cdot BC\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{30}{\sqrt{3}} \cdot \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{180\sqrt{3}}{4} = 45\sqrt{3}$$

$2R = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$ - по теореме синусов $AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2 \cdot \cos\angle AHC \cdot AH \cdot HC$ по теореме косинусов

$\angle AHC = 120^\circ$ т.к $\angle EHC = 60^\circ \Rightarrow AC^2 = 2^2 + 14^2 + 2 \cdot 14 \Rightarrow AC = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}$

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2\sqrt{57}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{57} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{19}$$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$ $S = 45\sqrt{3}$ $R = 2\sqrt{19}$

N2 $x_1, x_2, \dots x_n$ — эти числа в порядке возрастания

$32x_1 + x_2 + \dots x_n = 581 \qquad x_1 + x_2 + \dots 17x_n = 581 \Rightarrow 32x_1 + x_2 + \dots x_n = x_1 + x_2 + \dots 17x_n \Rightarrow$

$\Rightarrow 31x_1 = 16x_n \Rightarrow x_1 \vdots 16 \quad x_n \vdots 31$

$32x_1 < 581 \quad x_1 \vdots 16$ если $x_1 \neq 16$, то $x_1 \geq 32 \Rightarrow 32x_1 \geq 1024 > 581 \Rightarrow x_1 = 16$

$17x_n < 581 \quad x_n \vdots 31$ если $x_n \neq 31$, то $x_n \geq 62 \Rightarrow 17x_n \geq 1054 > 581 \Rightarrow x_n = 31$

$32x_1 + x_2 + x \dots x_n = 581 = 512 + x_2 + \dots + x_n \Rightarrow x_2 + \dots x_n = 69 \quad x_n = 31 \Rightarrow x_2 + \dots x_{n-1} = 38$

$\Rightarrow 16 < x_2, x_3 \dots, x_{n-1} < 31$ т.к все различны и x_1 и x_n наименьшее и наибольшее число. если чисел > 4, то $x_2 + x_3 + x_{n-1} \geq 3 \cdot 17 > 38 \Rightarrow$ чисел max 4

если 3 числа, то $x_2 = 38 > 31$. если 2 числа, то $0 \neq 38 \Rightarrow$ 4 числа

$x_2 + x_3 = 38 \qquad 16 < x_2 < x_3 < 31 \Rightarrow x_2 = 17 \;\; x_3 = 21 \quad x_2 = 18 \;\; x_3 = 20$

$\Rightarrow$ 2 варианта $\{16, 17, 21, 31\}$ или $\{16, 18, 20, 31\}$

оба они подходят

Ответ: $\{16; 17; 21; 31\}$, $\{16; 18; 20; 31\}$

N3

$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0$ - уравнение окружности

$a^2(x-3)^2-9a^2+a^2y^2-2a^3y+4ay+a^4+4=0$

$a^2(x-3)^2+(ay-a^2+2)^2-9a^2+4a^2=0 \Leftrightarrow a^2(x-3)^2+(ay-a^2+2)^2=5a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2(x-3)^2+a^2\left(y-a+\frac{2}{a}\right)^2=5a^2$

$a\neq0$

~~⇒ это окружность с центром в точке $(3; a-\frac{2}{a})$ и радиусом $\sqrt{5}a$~~

~~⇒ координаты B: $(3; a-\frac{2}{a})$~~ $(x-3)^2+\left(y-a+\frac{2}{a}\right)^2=5 \Rightarrow$ это окружность

с центром B: $(3; a-\frac{2}{a})$ и радиусом $\sqrt{5}$ если $a\neq0$

если $a=0$, то уравнение примет вид $4=0 \Rightarrow a\neq0$

Пусть $a-\frac{2}{a}>1 \Rightarrow \left(1-\frac{2}{a}\right)(a+1)>0 \Rightarrow$ ~~$a<-1 \vee a>2$~~

$(a-2)(a+1)>0$ если $a>0 \Rightarrow a<-1 \vee a>2 \Rightarrow a>2$

$(a-2)(a+1)<0$ если $a<0 \Rightarrow a\in(-1;2) \Rightarrow a\in(-1;0)$

Если $a-\frac{2}{a}<1 \Rightarrow \left(1-\frac{2}{a}\right)(a+1)<0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}(a-2)(a+1)<0 & a>0 \Rightarrow a\in(0;2)\\ (a-2)(a+1)>0 & a<0 \Rightarrow a\in(-\infty;-1)\end{array}\right.$

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$ (для точки A)

$(x-y-5a)(x+y-a)+2y^2+x^2+2xy=0$

$(x-y-5a)(x+y-a)+(x+y)^2+y^2=0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007147**

ID профиля: **185105**

Вариант 15

N4 $\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$ $a=x^2y^2$ $b=x^2+y^2$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 3b-a=3 \\ b^2-3a=31 \end{cases}$ $3b-a=3 \Rightarrow a=3(b-1)$

$b^2-3a=b^2-9(b-1) \Rightarrow b^2-9(b-1)=31 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2-9b-22=0 \Leftrightarrow (b+2)(b-11)=0 \Leftrightarrow b=-2 \quad b=11$

1) $b=-2 \Rightarrow a=-9 \Rightarrow -9=x^2y^2 \quad -2=x^2+y^2 \quad x^2y^2\geqslant 0>-9 \Rightarrow \varnothing$

2) $b=11 \Rightarrow a=30 \Rightarrow 30=x^2y^2 \quad 11=x^2+y^2 \Rightarrow (x^2+y^2)^2=121$

$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=(x^2-y^2)^2 \Rightarrow (x^2-y^2)^2=121-4\cdot 30=1$

$(x^2-y^2)^2=1 \quad (x^2+y^2)^2=121 \Rightarrow$ 4 случая

1) $x^2-y^2=1 \quad x^2+y^2=11 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6} \quad y=\pm\sqrt{5}$

2) $x^2-y^2=-1 \quad x^2+y^2=11 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5} \quad y=\pm\sqrt{6}$

3) $x^2-y^2=1 \quad x^2+y^2=-11 \Rightarrow x^2=-5 \quad x^2\geqslant 0 \Rightarrow \varnothing$

4) $x^2-y^2=-1 \quad x^2+y^2=-11 \Rightarrow x^2=-6 \quad x^2\geqslant 0 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $(-\sqrt{6};\sqrt{5})$, $(\sqrt{6};-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{6};\sqrt{5})$, $(-\sqrt{6};-\sqrt{5})$, $(\sqrt{5};\sqrt{6})$, $(-\sqrt{5};\sqrt{6})$, $(\sqrt{5};-\sqrt{6})$, $(-\sqrt{5};-\sqrt{6})$

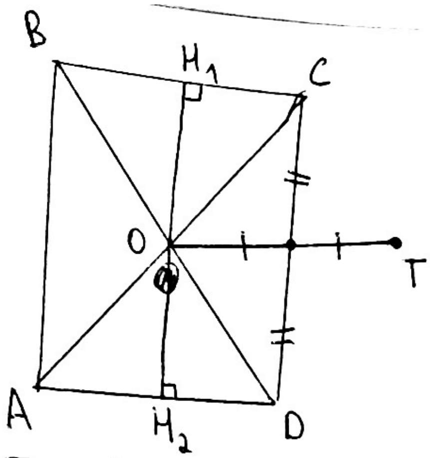
N5 Пусть он выбрал 2 дубля. Всего дублей 20 ⇒ кол-во способов $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ т.к порядок не важен. На дублях числа не пересекутся.

Пусть он выбрал 1 дубль. Выбрать 1 – 20 способов. Далее можно выбрать любую карточку кроме такой-же 19 с такой же цифрой и 19 других дублей. Карточек с данной цифрой 20 т.к к ~~одной~~ первой цифре можно подобрать 20 других цифр. ⇒ в данном случае способов

$20 \cdot (20 \cdot 20 - 1 - 19 - 19) = 20 \cdot 361$ здесь порядок ~~не~~ важен т.к первым мы выбираем дубль. ⇒ всего $190 + 20 \cdot 361 = 39 \cdot 190 = 7410$

Ответ: 7410 способов

N6



$DOCT$ - параллелограмм т.к диагонали точкой пересечения делятся пополам, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCT = \angle ODT$

$\angle BCO = \angle ADO = 60^\circ \Rightarrow \angle ADT = \angle BCT$

$CT = OD = AD$ т.к ΔAOD - правильный

$BC = OC = DT$ т.к ΔBOC - правильный

$\Rightarrow \Delta ADT = \Delta TCB$ по 2 сторонам и углу $\Rightarrow$

$\Rightarrow AT = BT$ $\quad \angle OCT = \angle OCD + \angle TCD = \angle OCD + \angle ODC = 180^\circ - \angle COD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

т.к $\angle BOC = 60^\circ \Rightarrow \angle COD = 120^\circ$. $\Rightarrow \angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ = \angle BOA = 180^\circ - \angle BOC$

$\Rightarrow \Delta BOA = \Delta BCT$ по 2 сторонам и углу $\Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \Delta ABT$ - правильный

$BC = 4 \quad AD = 5 \quad ABCD$ - равнобедренная трапеция т.к $\angle DBC = \angle ADB = \angle CAD = \angle BCA$ то есть ~~стороны~~ $AD \parallel BC$ и 2 треугольника на которые делят диагонали трапецию равнобедренные $\Rightarrow AB = CD$. Опустим из O 2 перпендикуляра OH_1 и OH_2

$OH_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$ т.к это высота в правильном треугольнике $OH_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$

h - высота трапеции $h = OH_1 + OH_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(AD+BC) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h = \frac{9}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

$$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2\cos\angle AOB \cdot BO \cdot AO = AD^2 + BC^2 - 2\cos 120^\circ \cdot AD \cdot BC = 4^2 + 5^2 + 4 \cdot 5 = 61$$

$\Rightarrow AB = \sqrt{61}$ $\quad S_{ABT} = \frac{\sqrt{3} AB}{4}$ т.к ABT - правильный $\Rightarrow S_{ABT} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{61}}{4}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{61} \cdot 4}{4 \cdot 81 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{61}}{81}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{61}}{81}$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$3x+3y-xy=3$

$x^2+y^2-xy=31$

$\cancel{x^2+y^2}$

$(x+y)=\frac{3+xy}{3}$

$\frac{3+xy}{3}\cdot 31=x^3+y^3$

$x^4-3x^2+y^4-3y^2=28$

$x^2(x^2-3)+y^2(y^2-3)=28$

x^2-x+1

$D=-3$

$xy=a$

$x+y=b$

$x^2y^2=a$

$x^2+y^2=b$

$3b-a=3$

$b^2-3a=31$

$b^2-9(b-1)=31$

$\sqrt{61}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2$

$\left(\frac{9-\sqrt{3}}{2}\right)^2+(0,5)^2$

$\frac{\cancel{84}\ 243}{4}+\frac{1}{4}$

$\frac{244}{4}=61$

$20\cdot 19+20\cdot(20\cdot 20-20-19)$

39 39 19

351

390

7410

20^2 $\cancel{49}$

k

$(40-1)(20-1)$

$800-\cancel{40}-20+1$

39

19

1

743

$20\cdot 20$

$20\cdot$

k

k

$800-60+2+1$

$(20\cdot 20-20)\cdot 20$

$x^4+y^4-x^2y^2-31=0$

$x^2+x\cdot y+y^2-31=0$

$D=y^2-4y^2+4\cdot 31$

$124-3y^2$

$x=\frac{-y\pm\sqrt{124-3y^2}}{2}$

$3(x+y)=xy+3$

$a=3(b-1)$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$