Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

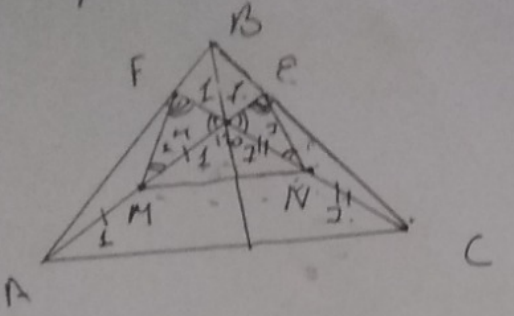
Шифр: **211007131**

ID профиля: **376234**

Вариант 15

Черновик.

FM || EN



∠ABC.

S ABC

R.

AE = 9 CF = 15.

теор. cos.

$1 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot \cos 120 = MN^2$.

$- \cos 60$.

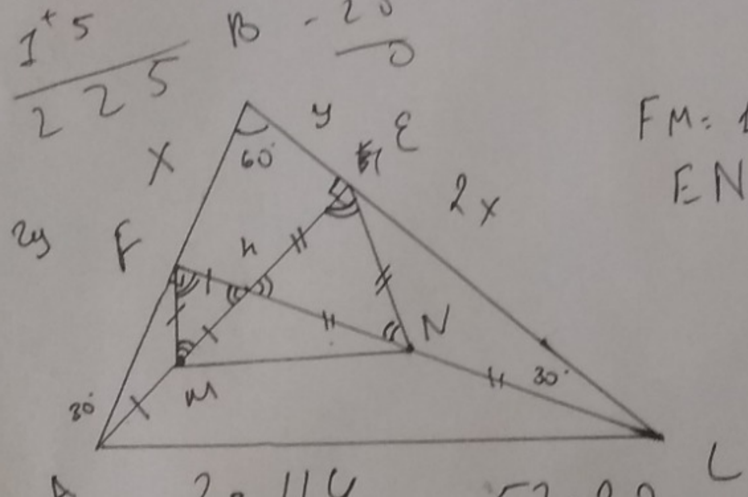
$80 + 7 = MN^2$

$\sqrt{57} = MN$

$\frac{abc}{4R} = S$.

75 × 15 = 75, 225

225 | 5, −20, 25, −25, 0; 45



FM = 1

EN = 7.

15^2

15 × 15 = 75, 225

225 | 5, −20, 25; 45.

5

$4x^2 + x^2 = 15^2$.

$5x^2 = 225$

$x^2 = 45$

$x = 3\sqrt{5}$.

$2x = 6\sqrt{5}$.

2 · 114

57 · 2 · 2.

228 | 2, −2, 2

$5y^2 = 81$.

$y^2 = \frac{81}{5}$.

57 × 4 = 228

$AC^2 = 4y^2 + 4x^2 - 2y \cdot 2x. = \frac{81 \cdot 4}{5} + 4 \cdot 45 -$

3,6 | 9, 0,4

57 × 5 = 285

211007131 (U376234 M1276340)

Черновик.

$5a^2 - 6ax - \cancel{4ay} + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

$(2a+x)^2 = 4a^2 + 4ax + x^2$.

$y^2 - 2y(2a+x) + (2a+x)^2$

$(y - 2a - x)^2$

$9a^2 - 10ax + x^2$

$(x - 5a)^2 + 24a^2 + (y - 2a - x)^2 = 0$.

$a = 0$. $y = 0$.

$x = 0$

$x_1 y_1 > 1$

$1 < x_1 y_1$

$x_2 y_2 < 1$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^3y + 4ay + a^4 + 4 = 0$.

$a - 1$.

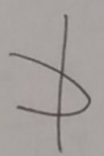
$a - \frac{2}{a}$.

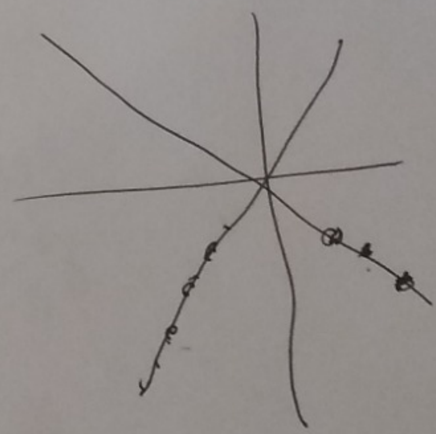
$a^2y^2 + 2ay(2 - a^2) + (2 - a^2)^2$

$(ay + 2 - a^2)^2 + a^2x^2 - 6a^2x + \cancel{a^4} + \cancel{4} - \cancel{4} + 4a^2 - \cancel{a^4} = 0$

$(a \cdot x)^2 - 2(ax)3a + 9a^2$.

$(ax - 3a)^2$.





$5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$.

$y^2 + 2xy - 4ay$

$y^2 + 2y(x - 2a) + (x - 2a)^2 = (y + x - 2a)^2$.

$(y + x - 2a)^2 + 5a^2 - 6ax + 2x^2 - (x - 2a)^2 = 0$.

$5a^2 - 6ax + 2x^2 - x^2 + 4ax - 4a^2 = 0$.

$a^2 + x^2 - 2ax$.

211007131 (U376234 M1276340)

Черновик.

$a_1 \quad a_2 \dots a_n$

$16a_n + Sum = 581.$

$31a_1 + Sum = 581.$

$32a_1 + a_2 + \dots + a_n = 581.$

$a_1 + a_2 + \dots + 17a_n = 581.$

$31a_1 - 16a_n = 0.$

$31a_1 = 16a_n.$

НОК $(a_n; a_1) =$

$a_1 = 16 \quad a_n = 31. \quad 31.$

16

$16 \times 32 = 502$

$16 \times 32 = 512$

$512 + 31 = 543$

$581 - 543 = 38$

$18 + 17 = 35$

$32 \times 32 = 1024$

$32 \times 16 = 512$

$31 \times 17 = 587$

$581 - 31 = 550$

$550 - 512 = 38$

$38 - 17 = 21$

$31 \times 17 = 527$

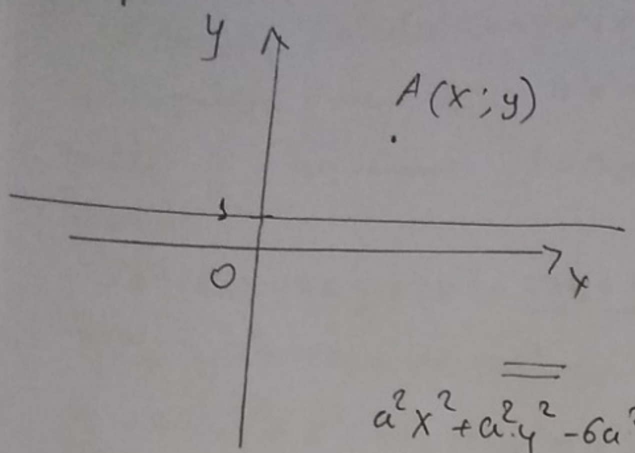
$527 + 16 = 543$

$581 - 543 = 38$

$38 - 18 = 20.$

Черновик.

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$



$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y$

$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0.$

$a^2y^2-2a^3y+4ay.$ $\cancel{a^2y-2a(ay}$

$a^2y^2-2a^3y+a^4.$

$a^2y^2-2ay(a^2-2)$

$a^2y^2-2ay(a^2-2)+(a^2-2)^2.$

$(ay-a^2+2)^2$

$+(a^2-2)^2.$

$+9a^2$

$a^2x^2-6a^2x+9a^2.$

$(ax-3a)^2$

$(ax-3a)^2+(ay+2-a^2)^2=(a^2-2)^2+9a^2-a^4-4.$

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0.$

a^2

$\cancel{(x+y)^2}$

$-8a^2$

$x^2-8a^2+2xy.$

$y^2-4ay+4a^2.$

$(y-2a)^2.$

$x^2-6ax+9a^2.$

$(x-3a)^2.$

Чистовик

③

3. Дано:

$A(x;y)$ $5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$.

ω с центром в точке B : $a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0$.

Найти: a при которых A и B лежат по разн. стороны от прямой $y=1$.

Решение:

$5a^2-6ax-\underline{4ay}+2x^2+\underline{2xy}+\underline{y^2}=0$.

$y^2+2y(x-2a)+(x-2a)^2-(x-2a)^2+5a^2-6ax+2x^2=0$.

$(y+x-2a)^2-x^2+4ax-4a^2+5a^2-6ax+2x^2=0$.

$(y+x-2a)^2+a^2-2ax+x^2=0$ $\quad$ $\underset{\geq 0}{(y+x-2a)^2}+\underset{\geq 0}{(a-x)^2}=0$.

$\begin{cases} y+x-2a=0 \\ x=a \end{cases}$ $\begin{cases} y-a=0 \\ x=a \end{cases}$ $\begin{cases} y=a \\ x=a \end{cases}$ коорд. $A(a;a)$.

$a^2x^2+\underline{a^2y^2}-6a^2x-\underline{2a^3y}+\underline{4ay}+a^4+4=0$.

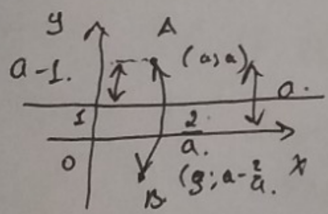
$a^2y^2+2ay(2-a^2)+(2-a^2)^2-(2-a^2)^2+a^2x^2-6a^2x+a^4+4=0$.

$(ay-a^2+2)^2+a^2x^2-6a^2x+\cancel{a^4}+\cancel{4}-\cancel{4}+4a^2-\cancel{a^4}=0$.

$(ay-a^2+2)^2+(ax-3a)^2=5a^2$.

координаты точки $B\left(\frac{3a}{a};\frac{a^2-2}{a}\right)=\left(3;a-\frac{2}{a}\right)$.

Чтобы A и B были по разным сторонам от $y=1$.

1) 

$a>0$.

$a-1<\frac{2}{a}$.

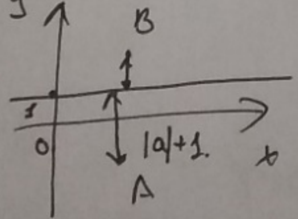
$a^2-a-2<0$. $\quad a\neq 0$.

$D=1+8=9$

$a=\frac{1-3}{2}=-1$ $\quad$ $a=\frac{1+3}{2}=2$.

$a\in(-1;2)$

$a\in(1;2)$

2) 

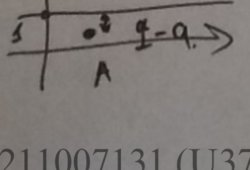
$a<0$

$|a|+1<-\frac{2}{a}$. $\quad a<0$.

$-a+1+\frac{2}{a}<0$. $\quad a^2-a-2>0$ $\quad a\in(-\infty,-1)\cup(2;+\infty)$

$-a^2+a+2<0$.

$a\in(-\infty;-1)$

3) 

x

$1-a<-\frac{2}{a}$.

$a<1$ $\quad a\in\varnothing$.

$a>0$.

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(1;2)$.

Чистовик

2. Дано: $a_1; a_2; a_3 \dots; a_n \in N$.

$32a_1 + a_2 + \dots + a_n = 581$.

$a_1 + a_2 + \dots + 17a_n = 581$.

a_1 - самое мал. ч.

a_n - сам. большое число.

Все a_i попарно различ.

Найти: $a_1; a_2; \dots a_n$.

Решение:

$$32a_1 + \dots + a_n = 581$$
$$-\ a_1 + \dots + 17a_n = 581$$

$31a_1 - 16a_n = 0$.

$31a_1 = 16a_n$.

т.к a_1 и $a_n \in N$.

НОД$(31; 16) = 1$.

$\begin{cases} a_1 = 16 \cdot p & \text{где } p \in N. \\ a_n = 31 \cdot p \end{cases}$

Рассмотрим $p = 2$:

$a_1 = 32 \quad a_n = 62$

$32 \cdot a_1 + \dots + a_n = 581$.

$1024 + \overset{a_2+}{\dots} + 62 \neq 581$

$1024 + a_2 + \dots + 62 > 581$.

и чем больше p тем больше $32a_1 + a_2 + \dots a_n$

Значит $p < 2$. $(p > 0.)$

Рассмотрим $p = 1$.

$a = 16 \quad a_n = 31$.

$32 \cdot 16 + \dots + 31 = 581$.

$512 + a_2 + \dots + a_{n-1} + 31 = 581$

$a_2 + \dots + a_{n-1} = 38$.

$a_2 > a_1 \quad a_2 < a_n$
$a_3 > a_1 \quad \vdots$
$\vdots$
$a_{n-1} > a_1 \quad a_{n-1} < a_n$.

$a_2; a_3 \dots a_{n-1} \in (16; 31)$

Пусть $a_2 = 17$. $\quad a_3 + \dots a_{n-1} = 21$.

т.к ~~...~~ $2 \cdot 16 > 21$.

т.о. значит осталось еще одно $a_i = 21$.

1послед: 16 17 21 31.

Пусть $a_2 = 18 \quad a_3 + a_{n-1} = 20$. аналогично

$a_3 = 20$.

2послед: 16 18 20 31.

Получаем 38 надо разбить на два числа (на 3 не получиться т.к $16 \cdot 3 > 38$.) (сам мал. в послед.)

такие что $x < y \quad x + y = 38 \quad x > 16 \quad y > 16 \quad x < 31 \quad y < 31$.

под такие ограничения подходят $x = 17 \quad y = 21$

$x = 18 \quad y = 20$

($x = 19 \quad y = 19$ не подходит т.к $x \neq y$)

Выходит всего существует 2 различ. послед. удовлетворяющих всем условиям.

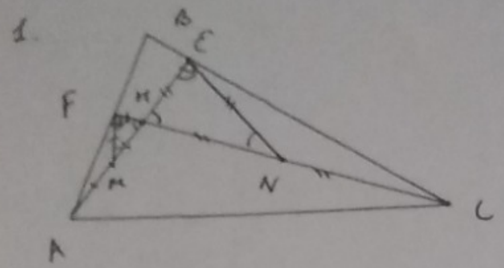
Ответ: 1послед: 16 17 21 31 $\qquad 32 \cdot 16 + 17 + 21 + 31 = 581 \quad 16 + 17 + 21 + 31 \cdot 17 = 581$.

2послед: 16 18 20 31. $\qquad 32 \cdot 16 + 18 + 20 + 31 = 581 \quad 16 + 18 + 20 + 31 \cdot 17 = 581$

1

Чистовик

1.



Дано: $\triangle ABC$

CF; AE - высоты

$HM = MA \quad HN = NC$

$FM = 1 \quad EN = 7$

$FM \parallel EN$

Найти: $\angle ABC$; $S_{\triangle ABC}$

R - радиус опис. окр.

Решение:

1) FM - в прямоугол $\triangle AFH$ явл. медианой ($AM = MH$) $\Rightarrow$ $FM = AM = MH = 1$

аналогично EN - мед в прямоугол $\triangle HEC$ т. е $HN = NC = EN = 7$.

2) $\angle MFH = \angle FHM$ ($\triangle MFH$ - р/б $FM = MH$) $\quad \angle EHN = \angle HEN$ ($\triangle HNE$ - р/б $HN = NE$) $\quad \angle MFH = \angle ENH$ накрест леж при $MF \parallel EN$ и секущей FN

$\angle FHM = \angle EHN$ - верт $\quad \angle HEN = \angle HMF$ накрест леж при $FM \parallel EN$ и секущей EM

Значит: $\angle MFH = \angle FHM = \angle HMF = \angle EHN = \angle ENH = \angle HEN$ $\Rightarrow$

$\triangle FHM$ и $\triangle EHN$ - равностор. $\angle FHM = \angle EHC = 60$ $\quad FH = FM = 1 \quad EH = HN = 7$

в $\triangle HEC$ прямоугол. $\angle ECH = 90 - \angle EHC = 30$ ($\angle EHC = 60$) $\quad$ в прямоугол. $\triangle FHA$ $\angle FAH = 90 - \angle FHA = 30$ ($\angle FHA = 60$)

в прямоугол $\triangle FEC$ $\quad \angle BCF = 30 \Rightarrow \angle ABC = 60$

$\Downarrow$ $2FB = BC$ (кусоб) $= 2X$. $\quad FB = X$.

по т. Пифагора:

$FC^2 = FB^2 + BC^2$

$(NC + NH + FH)^2 = 15^2 = 5X^2$

$X^2 = 45$

$X = 3\sqrt{5}$

$BC = 2X = 6\sqrt{5}$

Тогда площадь $\triangle ABC = \dfrac{AE \cdot BC}{2} = \dfrac{9 \cdot 6\sqrt{5}}{2} = 9 \cdot 3\sqrt{5} = 27\sqrt{5}$

($AE = AM + MH + HE$)

аналогично BC находим AB

в $\triangle AFH$ по теореме Пифагора.

$AF^2 = AH^2 - FH^2$

$AF^2 = 3 \quad AF = \sqrt{3}$

$AB^2 + BE^2 = AE^2$ из $\triangle ABE$.

$5BE^2 = 81$. $\quad BE^2 = \dfrac{81}{5} \quad BE = \dfrac{9}{\sqrt{5}} = \dfrac{9\sqrt{5}}{5} = 1{,}8\sqrt{5}$

$AB = 2BE = 3{,}6\sqrt{5}$

в $\triangle FCA$ по т. Пифагора $AC^2 = FC^2 + FA^2 \quad AC^2 = 225 + 3 = 228$.

$AC = 2\sqrt{57}$.

в $\triangle ABC$:

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = \dfrac{2\sqrt{57} \cdot 3{,}6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{4 \cdot R} = \dfrac{27\sqrt{5}}{1}$

$R = \dfrac{2\sqrt{57} \cdot 3{,}6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}}{27\sqrt{5} \cdot 4} = 0{,}4\sqrt{5} \cdot \sqrt{57} = 0{,}4\sqrt{285}$

Ответ: $\angle ABC = 60$; $S_{\triangle ABC} = 27\sqrt{5}$; $R = 0{,}4\sqrt{285}$.

211007131 (U376234 M1276340)

Часть 2

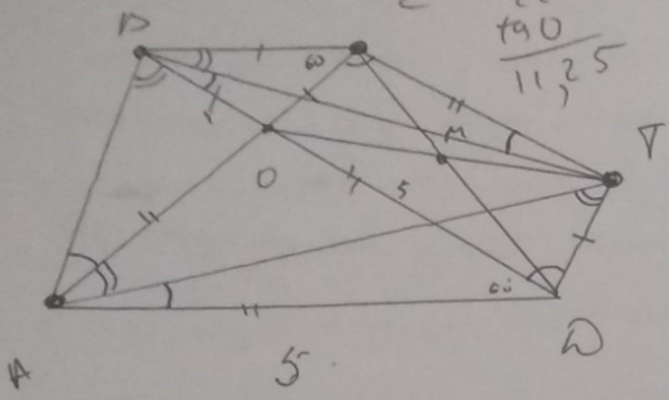
Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007131**

ID профиля: **376234**

Вариант 15

Черновик.



$4,5 \times 2,5$: 225, 90, 11,25

52 + 81 = 133

5 ; 9

45 + 25 = 70, + 81

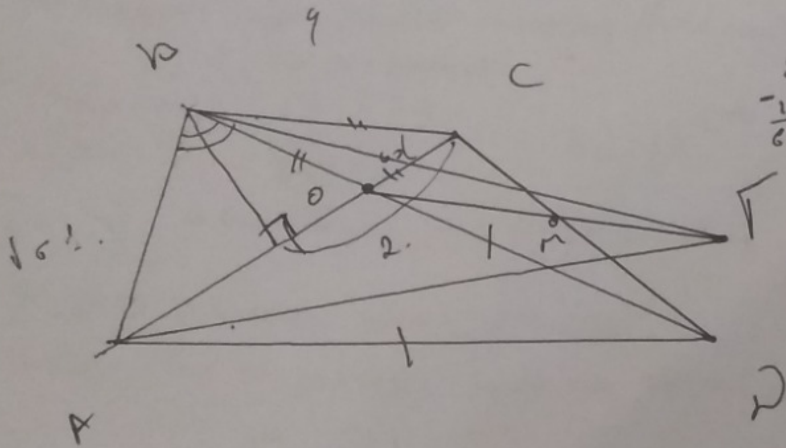
$28 = 81 + x^2 -$

$x^2 = 81 + 25 ~~+~~ 45$

$\sqrt{151}$

16+4=20

$y^2 = 81 + 16 + 36$.



81 − 10 = 61

45 − 20 = 20

2,43 : 3 = 0,81.

12,15 : 5 = 2,43

75×75: 375, 525, 5625

$30 \times 30 = 900$

5

16 + 25 + 20

61

$60,75 : 5 = 12,15$

$16 + 25 + 20 = \sqrt{61}$.

41

$50 \times 50 = 2500$

80
70
60
3600.
4900
8100
6400.

8'

45×45: 225, 180, 20,25

$4,5 \times 4,5$: 225, 180, 20,25

75×25: 45, 50

$4,5 \times 2,5$: 5

(2)

Чистовик.

5. Дано: 20^2 различ. карточек

на каждой стороне (красная // синяя) написано число от 1 до 20

2 одинак. числа с обеих сторон = дубль.

Сколько способов вытащить 1 дубль и ещё какую-нибудь карточку без ~~~~ чисел на предыдущей карточке (никакое число не встр. одновременно на обеих карточках).

Решение: всего 20^2 различ. карточек => в наборе все возможные пары чисел на 1 карточке (красная ст. 20 вар × синяя ст. 20 вар $= 20^2$)

Тогда всего 20 дублей в наборе.

Сколькими способами можно выбрать дубль:

$$\frac{20\text{ вар}}{\text{к. дубля}} \cdot \frac{\overset{\text{син. ст.}}{19} \cdot \overset{\text{красн. ст.}}{19}}{\text{другая к.}} = 20 \cdot 19^2$$

и сколькими остальную карточку.

↑

на дубле записано лишь 1 число.

Значит, его не должно быть на второй карточке => 19 вар (кр. ст.) · 19 вар (син. ст.)

Так как порядок вынимания карточек не важен то полученный результат нужно разделить на 2!

$$\frac{20 \cdot 19^2}{2!} = 19^2 \cdot 10 = 3610 \text{ вариантов}$$

Ответ: 3610.

1

Чистовик

4. $\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$ пусть $x^2+y^2=a \geq 0$ *

$0 \leq x^2y^2 = b \geq 0$

$a^2=(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4=$

$\begin{cases} 3a-b=3 \\ a^2-2x^2y^2-x^2y^2=31 \end{cases}$ $\begin{cases} 3a-b=3 \\ a^2-3b=31 \end{cases}$ $\begin{cases} 3a-3=b \\ a^2-3(3a-3)-31=0 \end{cases}$

$a^2-9a+9-31=0$ $D=81+88=169=13^2$

$a^2-9a-22=0$

$a_1=\frac{9+13}{2}=11$ $a_2=\frac{9-13}{2}=-2$ <0

$b=30$ $b=-9$ <0 не удв. услов *

1) $\begin{cases} x^2+y^2=11 \\ x^2y^2=30 \end{cases}$

$\cancel{x^2+2xy+y^2=11+60}$

$\cancel{(x+y)^2=71}$

пусть $x^2=f$ $y^2=l$

$\begin{cases} l+f=11 \\ f\cdot l=30 \end{cases}$ $l=11-f$

$11f-f^2-30=0$

$f^2-11f+30=0$ по т. Виета

$\begin{cases} f=6 \\ l=5 \end{cases}$ $\begin{cases} f=5 \\ l=6 \end{cases}$ $f_1=6$ $f_2=5$. $f_1+f_2=11$

$f_1\cdot f_2=+30$

$\begin{cases} x^2=6 \\ y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=5 \\ y^2=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt6 \\ y=\sqrt5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\sqrt6 \\ y=\sqrt5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\sqrt6 \\ y=-\sqrt5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt6 \\ y=-\sqrt5 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\sqrt6 \\ x=\sqrt5 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\sqrt6 \\ x=\sqrt5 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\sqrt6 \\ x=-\sqrt5 \end{cases}$ $\begin{cases} y=+\sqrt6 \\ x=-\sqrt5 \end{cases}$

Ответ: $(\sqrt6;\sqrt5)$; $(-\sqrt6;\sqrt5)$; $(-\sqrt6;-\sqrt5)$; $(\sqrt6;-\sqrt5)$; $(\sqrt5;\sqrt6)$, $(-\sqrt5;\sqrt6)$, $(-\sqrt5;-\sqrt6)$, $(\sqrt5;-\sqrt6)$

211007131 (U376234 M1276341)

Черновик.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-2x^2y^2=31 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$

$(x^2+y^2) = a$

$(xy)^2 = b$

$$\begin{cases} 3a-b=3 \\ a^2+2x^2y^2-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a-b=3 \\ a^2+b=31 \end{cases}$$

$b = 3a-3$

$a^2+3a-3-31=0$

$a^2+3a-34=0$

$D = 9+136 =$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 4 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 145 & 5 \\ -10 & 29 \\ \hline 45 & \\ -45 & \end{array}$$

$4 \cdot 18$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 4 \\ \hline 88 \\ +81 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

Черновик.

1 до 20.   20 20.

1 1
2 2
3 3

ду   дублев: 20 дублев

x   x
дубль.

20 способов   19.   19.

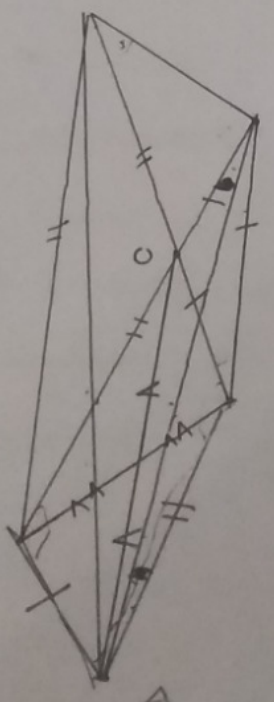
20 − 1

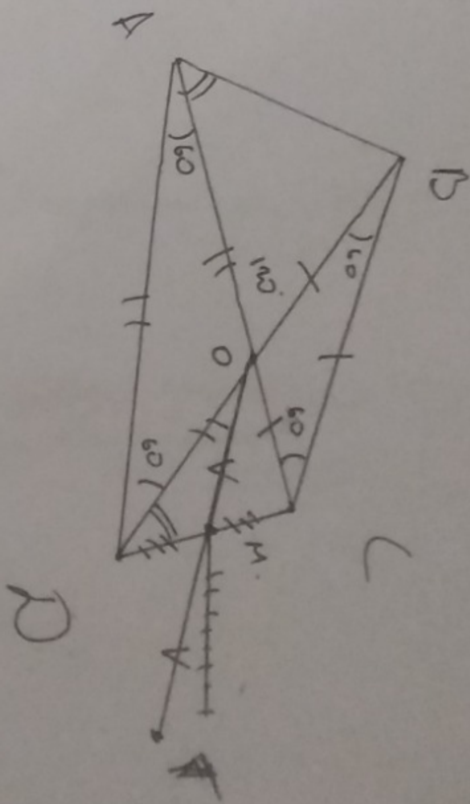
1.2   13
2.1   31
~~2.2~~   ~~33~~
$\boxed{3.1}$ ~~23~~
    ~~32~~

2.1.1   3.2.7

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ +19\ \ \\ \hline 361 \end{array}$$

$$361 \,|\, 19 = 19$$





~~Чистовик~~ Черновик.

5. Дано: 20^2 различ. карточек.

на каждой из сторон (красн // синяя) написано по 1

число от 1 до 20. 2 одинак. числа на 1 карточке = дубль

Сколькими способами можно вытащить 1 дубль и еще какую-нибудь карточку чтобы у них не было одинак. чисел (т.е на один. кар. нет одинак. чисел).

Решение:

всего 20^2 различ. карточек => в наборе все возможные пары чисел на 1 карточке (красн ст. 20 вар × син. сторона 20 вар $= 20^2$)

Значит всего 20 дублей

одна из карточек точно явл. дублем.

$$\underbrace{20\text{вар.}}_{\text{карточка дубль}} \cdot \underbrace{\overset{\text{син стр}}{19\text{вар}} \mid \overset{\text{красн. ст.}}{19\text{вар.}}}_{\text{еще какая-то карточка}} = 20 \cdot (19 \cdot 19)$$

на дубле написано какое-то число X. на другой карточке его быть не должно т.е 19 вар. с красн. ст.

и 19 вар. с син. стороны.

~~Однако~~ порядок вынимания карточек ~~не~~ имеет значения => не надо ~~разделить~~ делить результат на 2! (сколькими способами можно вытащить).

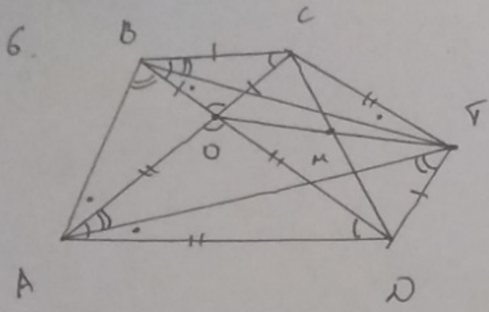
$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 19}{\cancel{}} = 19 \cdot 19 \cdot 20 = 3610 \cdot 2 = 7220$$

~~Ответ~~ Ответ: 7220.

211007131 (U376234 M1276341)

Чистовик

6.



Дано: ABCD – 4х угольник.

$\triangle BOC$ $\triangle AOD$ – правильн.

пусть: $CM = MD$ (M – середина CD).

O сим. T относ. M. ⇒ $OM = MT$

Док-ть: а) ABT – прав. $\triangle$.

~~б) известно BC = 4, AD = 5 Найти: $S_{\triangle ABT} / S_{ABCD}$~~

Решение:

1) в $\triangle AOD$: $AO = OD = AD$

$\angle OAD = \angle AOD = \angle ODA = 60°$

в $\triangle BOC$: $\angle BCO = \angle COB = \angle OBC = 60°$

$BC = CO = OB$.

2) OCTD – пар-м: $CM = MD$, $OM = TM$

диагонали дел. точкой пересеч. пополам.

т.е $CT = OD$, $CO = TD$. $CO \parallel TD$

$\angle OCT = \angle TDO$. $CT \parallel OD$

т.е т.к $\angle DAD = \angle BCO$ и эти углы накрест лежащ при $BC \parallel AD$ ⇒ $BC \parallel AD$

3) $\triangle BCT = \triangle ATD$: $BC = TD$ $CT = AD$ $\angle BCT = \angle TDA$ ($\angle BCO + \angle OCT = \angle BCT$; $\angle BDA + \angle ODT = \angle TDA$)

Значит $BT = TA$. $\angle TAD = \angle CTB$ $\angle ATD = \angle CBT$.

$\angle OAT = \angle ATD$ накр. л. при $CO \parallel TD$ и секущей TA. $\angle TBO = \angle CTB$ как накр. л. при $CT \parallel BD$ и секущей BT

4) т.к $\angle CBT = \angle CAT$ ⇒ вокруг точек B; C; T; A можно описать окр.

Тогда $\angle BAC = \angle CTB$ опир на $\cup BC$ и явл. вписан. (лежать на одн. окр)

аналогично т.к $\angle TBD = \angle TAD$ ⇒ можно описать вокруг точек T, B, A, D окр.

⇒ $\angle ABD = \angle ATD$

5) $\angle BBT + \angle TBD = 60°$; т.к $\angle CBT = \angle DBA$ ⇒ $\angle TBA = 60°$

аналогично $\angle BAT = 60°$

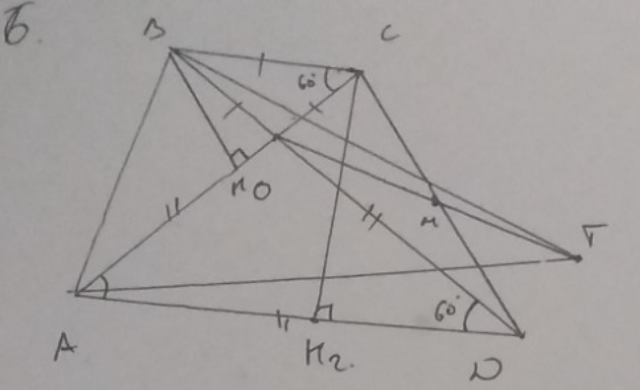
Значит $\triangle BTA$ – р/б ($BT = TA$), и $\angle TBA = \angle TAB = 60°$

⇒ $\triangle BTA$ – равносторонний т.е правильный, чтд.

Чистовик

(4)

Б.



Дано: Все что было дано, доказано или найдено в №6. под а.

$BC = 4 \quad AD = 5$.

Найти: $\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение:

1) в $\triangle BDA$ по т. кос:

$BA^2 = BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\angle BDA$.

$BA^2 = 81 + 25 - 9 \cdot 5 = 81 - 20 = 61$.

$BA = \sqrt{61} = BT = TA$.

2) по т. кос. в $\triangle ACD$: $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos\angle CAD$

$CD^2 = 81 + 25 - 9 \cdot 5 = 61$.

$CD = \sqrt{61}$.

3) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$

$S_{ABC} = BH \cdot AC \cdot \frac{1}{2}$.

(высота в $\triangle ABC$)

$S_{ABC} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 9}{2} = 9\sqrt{3}$.

в прямоуг. $\triangle HBC$ $\angle BCH = 60°$ => $\angle HBC = 30°$ => $BC = 2HC$.

$HC = \frac{BC}{2} = 2$.

по т. П. в $\triangle BHC$

$BH^2 + HC^2 = BC^2$.

$BH^2 = 16 - 4 = 12$. $BC = 2\sqrt{3}$.

$S_{ACD} = \cancel{B}H_2 \cdot AD \cdot \frac{1}{2}$

(высота в $\triangle ACD$)

в прямоуг. $\triangle ACH_2$: $\angle CAH_2 = 60 \Rightarrow \angle ACH_2 = 30°$

$AH_2 = \frac{1}{2} AC = 4{,}5$.

по т. П. $CH_2^2 = 81 - (4{,}5)^2 = 60{,}75$

$CH_2 = \sqrt{60{,}75} = 5 \cdot 9 \cdot 0{,}1\sqrt{3} = 4{,}5\sqrt{3}$

$S_{ACD} = \dfrac{4{,}5\sqrt{3} \cdot 5}{2} = 11{,}25\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = 20{,}25\sqrt{3}$.

$S_{ABT} = \dfrac{\sqrt{61} \cdot \sqrt{61} \cdot \sin 60°}{2} = \dfrac{61 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{61\sqrt{3}}{2 \cdot 11{,}25\sqrt{3}} = \dfrac{61}{22{,}5}$

Ответ: $\dfrac{61}{22{,}5}$

211007131 (U376234 M1276341)