Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

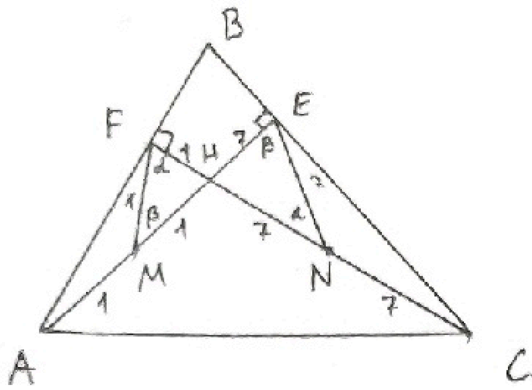
Шифр: **211007093**

ID профиля: **818435**

Вариант 15

Чистовик

1.



Заметим, что FM – медиана в прямоугольном $\triangle AFH \Rightarrow FM = MH = AM = 1$. Также, EN – медиана в прямоугольном $\triangle CEH \Rightarrow EN = HN = CN = 7$.

Заметим, что $\angle ENH = \angle HFM = \alpha$, т.к. они накрест лежащие углы.

Также, $\angle FMH = \angle HEN \overset{?}{=} \beta$, т.к. они накрест лежащие углы.

$\angle NEC = 90° - \beta$, а поскольку $\triangle ENC$ – р/б, $\angle NCE = 90° - \beta$, а $\angle ENC = 2\beta$

$\angle FMA = 90° - \alpha$, поскольку $\triangle FMA$ – р/б, $\angle MAF = 90° - \alpha$, а $\angle FMA = 2\alpha$

Из угла AMH $2\alpha + \beta = 180°$.

Из угла CNH $2\beta + \alpha = 180°$.

$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 360° \\ \alpha + 2\beta = 180° \end{cases}$ $\quad 3\alpha = 180°$ $\quad \alpha = 60°$

$\beta = 180° - 2\alpha \quad \beta = 180° - 120° = 60°$.

$\angle EHN = 180° - \alpha - \beta \Rightarrow \angle FHE = \alpha + \beta$ ($\angle FHE$ и $\angle EHN$ – смежные).

Из 4-угольника FBEH $\angle \overset{ABC}{\cancel{FBE}} = 360° - 90° - 90° - \cancel{180} \alpha - \beta = 180° - \alpha - \beta =$

$= 180° - 60° - 60° = 60°$.

~~FC = 7+7+1 = 15~~, AE =

$FH = 1$, т.к. $\triangle FMH$ – равносторонний, $EH = 7$, т.к. $\triangle EHN$ – равност.

$FC = 7 + 7 + 1 = 15$, $AE = 1 + 1 + 7 = 9$

$BC = \frac{FC}{\sin 60} = \frac{15}{\sin 60} \qquad AB = \frac{AE}{\sin 60} = \frac{9}{\sin 60}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin 60}{2} = \frac{15 \cdot 9 \cdot \sin 60}{2\sin^2 60} = \frac{135 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{135\sqrt{3}}{3} = 45\sqrt{3}$

$\cancel{R = \frac{abc}{45}}$ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 60} =$

$= \sqrt{\frac{225}{\sin^2 60} + \frac{81}{\sin^2 60} - \frac{15 \cdot 9 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{\sin^2 60}} = \sqrt{\frac{306 - 135}{\sin^2 60}} = \frac{\sqrt{171}}{\sin 60}$

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{15 \cdot 9 \cdot \sqrt{171}}{4 \cdot \frac{135}{2\sin 60} \cdot \sin^2 60} = \frac{\cancel{15 \cdot 9} \cdot \sqrt{171}}{\cancel{270}_{2} \cdot \sin^2 60} = \frac{\sqrt{171}}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{171} \cdot \frac{2}{3} = 2\sqrt{19}$

1

Ответ: $\angle ABC = 60°$, $S_{ABC} = 45\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{19}$

2. Упорядочим числа от наименьшего к наибольшему. Чистовик

$a_1, a_2, \dots a_n$

$$\begin{cases} 32a_1 + a_2 + \dots + a_n = 581 \\ a_1 + a_2 + \dots + 17a_n = 581 \end{cases} \quad 31a_1 - 16a_n = 0 \quad 16a_n = 31a_1 \quad a_n = \frac{31}{16}a_1$$

$a_1 \vdots 16$

$\exists a_1 = 16 \Rightarrow a_n = 31$

Назовём сумму чисел между a_1 и a_n X.

$$\begin{cases} 32 \cdot 16 + x + 31 = 581 \\ 16 + x + 31 \cdot 17 = 581 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 550 - 512 \\ x = 54 - 16 \end{cases} \quad x = 38$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 31 \\ 17 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 217 \\ 31 \end{array} \\ \hline 527 \end{array}$$

$38 = 18 + 20 = 17 + 21$, в остальных разложениях есть числа ≤ 16, или числа совпадают. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 16 17 21 31

16 18 20 31

$\exists a_1 = 32$ $\quad 32 \cdot 32 = 1024 > 581$, при ещё больших a_1 $32a_1$ будет становиться ещё больше $\Rightarrow$ a_1 может быть равно только 16.

Ответ: 16, 17, 21, 31 или 16, 18, 20, 31.

3. $2x^2 + (2y - 6a)x + y^2 + 5a^2 - 4ay = 0$

$$x = \frac{6a - 2y \pm \sqrt{4y^2 - 24ay + 36a^2 - 8y^2 - 40a^2 + 32ay}}{4} =$$

$$= \frac{6a - 2y \pm \sqrt{-4y^2 + 8ay - 4a^2}}{4} = \frac{3a - y \pm \sqrt{-y^2 + 2ay - a^2}}{2} =$$

$$= \frac{3a - y \pm \sqrt{-(y-a)^2}}{2}$$

Заметим, что корень может быть вещественным только в том случае, когда $y = a$. Тогда $x = \frac{3a - a}{2} = a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка A имеет координаты $(a; a)$.

Чистовик

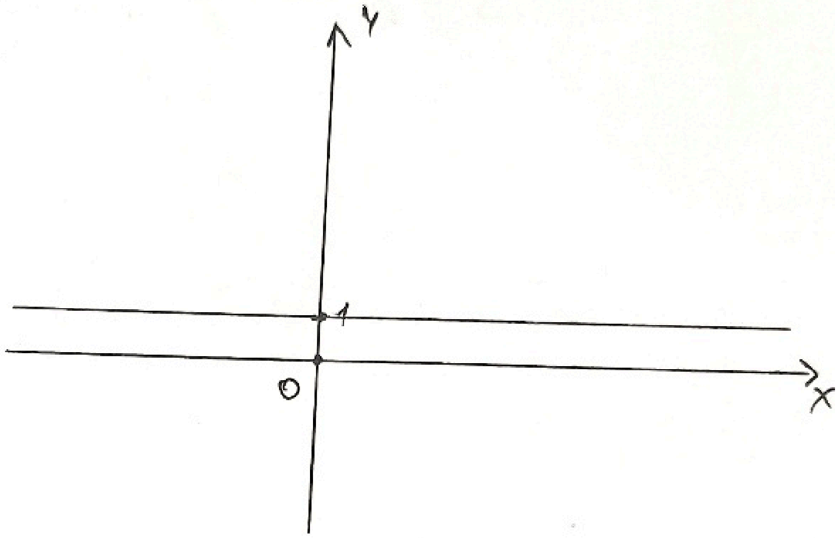
Найдём координаты точки B.

$a^2x^2-6a^2x+9a^2+a^2y^2+2ay(2-a^2)+4-4a^2+a^4=9a^2-4a^2$

$a^2(x-3)^2+(ay+2-a^2)^2=5a^2$

$(x-3)^2+\left(y-\frac{a^2-2}{a}\right)^2=5$ $\Rightarrow a\neq 0$

$B\left(3;\ \frac{a^2-2}{a}\right)$



Нам нужно, чтобы либо

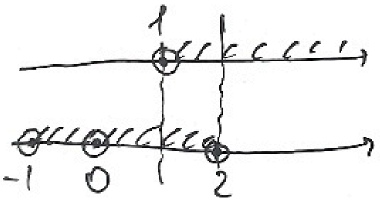
а) $\begin{cases} a>1 \\ \frac{a^2-2}{a}<1 \end{cases}$

либо б) $\begin{cases} a<1 \\ \frac{a^2-2}{a}>1 \end{cases}$

а) $a^2-2<a$ $\quad a^2-a-2<0$ $\quad (a+1)(a-2)<0$ $\quad a\in(-1;0)\cup(0;2)$

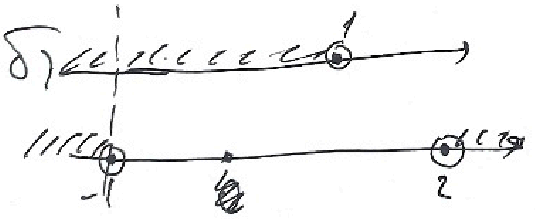
б) $a^2-2>a$ $\quad a^2-a-2>0$ $\quad (a+1)(a-2)>0$ $\quad a\in(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$

а)



$a\in(1;2)$

б)



$a\in(-\infty;-1)$

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(1;2)$

211007093 (U818435 M1274878)

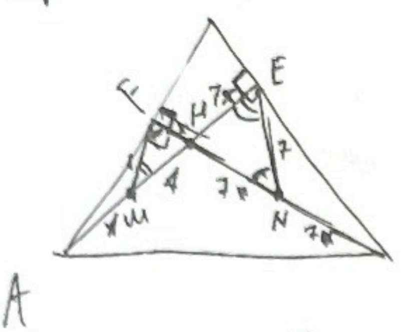
1. Черновик

$FM=1$ $EN=7$ $FM \parallel EN$

$\angle ABC - ?$ ✓

$S_{ABC} - ?$

$R - ?$



$\Delta FMH \sim \Delta NEH$ с коэф. 7

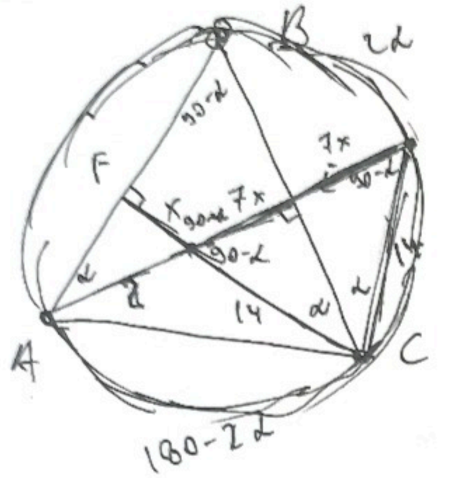
~~S~~ $= \frac{4S}{abc}$

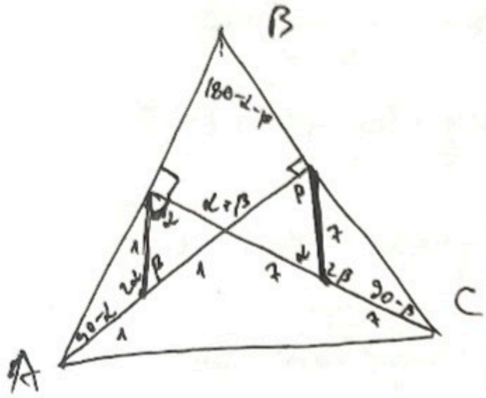
$R = \frac{4S}{abc}$

ΔHEC и ΔAFH - прям. $\Rightarrow$

$\Rightarrow EN = HN = NC$, $FM = MH = AM$

медианы из прям. угла





$2\alpha + \beta = 180°$

$\alpha + 2\beta = 180°$

$3\alpha = 180°$ $\alpha = 60°$

$\beta = 60°$

$\angle ABC = 180° - \alpha - \beta = 60°$

2. $a_1 \ldots a_n$ $= 581$ Упорядочим от ~~само~~ наименьшего до наибольшего.

$32a_1 + \ldots + a_n = 581$

$a_1 + \ldots + 17a_n = 581$

$31a_1 = 16a_n$ $a_n = \frac{31}{16}a_1$ $a_1 \vdots 16$

~~$a_1 \neq 0$ $a_2 + \ldots + a_n = 581$ $a_2 + \ldots + 17a_n > 581$~~

1) $a_1 = 16$ $a_n = 31$

$16 + \ldots + 31$

x - Σ чисел между наиб. и наим.

$512 + x + 31 = 581$

$32 \cdot 16 = 512$

~~$x = 16$~~ ~~16 18 31~~

$16 + x + 527 = 581$

$x = 38$

$X = 38$

$581 - 543 = 38$

$31 \cdot 17 = 527$

$38 = 18 + 20 = 17 + 21$

~~17 18~~

16 18 20 31

16 17 21 31

2) $a_1 = 32$ $a_n = 62$

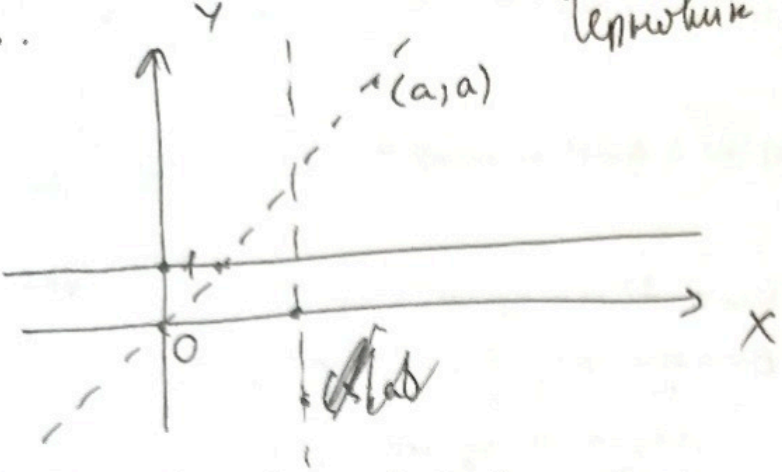
$32^2 > 581$

1024

211007093 (U818435 M1274878)

3.

Черновик



У них д.б. реш. 4, но она один

$5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^3y + 4ay + a^4 + 4 = 0$

$2x^2 + (2y - 6a)x + y^2 + 5a^2 - 4ay = 0$

$$x = \frac{6a - 2y \pm \sqrt{4y^2 - 24ay + 36a^2 - 8y^2 - 40a^2 + 32ay}}{4} =$$

$$= \frac{6a - 2y \pm \sqrt{-4y^2 + 8ay - 4a^2}}{4} = \frac{3a - y \pm \sqrt{-y^2 + 2ay - a^2}}{2} = \frac{3a - y \pm \sqrt{-(y-a)^2}}{2}$$

$y = a$ $\quad$ $x = \frac{3a - a}{2} = a$

$+4ay$

$a^2x^2 - 6a^2x + \underbrace{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}_{4} + 4 = 0$

$a^2(y-a)^2$

$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2$

$a^2(x-3)^2$

$a^2(x-3)^2 + a^2(y-a)^2 = 9a^2 - 4$

$(x-3)^2 + (y-a)^2 = \frac{9a^2 - 4}{a^2}$

$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 + a^2y^2 - 2a^3y + a^4 + 4 - 9a^2 = 0$

$a^2(x-3)^2 + a^2(y-a)^2 = 9a^2 - 4$

$(x-3)^2 + (y-a)^2 = \frac{9a^2 - 4}{a^2}$

$\Downarrow$

$B(3; a)$

$A(a, a)$

211007093 (U818435 M1274878)

$a^2y^2+(4a-2a^3)y$ Черновик

$a^2y^2+\cancel{a(4-2a^3)y}$
$2ay(2-a^2)y + (2-a^2)^2 = 4-4a^2+a^4 =$

$=(ay+2-a^2)^2$

$a^2x^2-6a^2x+9a^2=0$

$a^2x^2-6a^2x+9a^2+a^2y^2+2ay(2-a^2)+4-4a^2+a^4= 9a^2-4a^2$

$a^2(x-3)^2+(ay+2-a^2)^2 = 5a^2$

$(x-3)^2+\left(y-\frac{a^2-2}{a}\right)^2=5$

$\frac{a^2-2}{a}<1$

$B\left(3;\frac{a^2-2}{a}\right)$

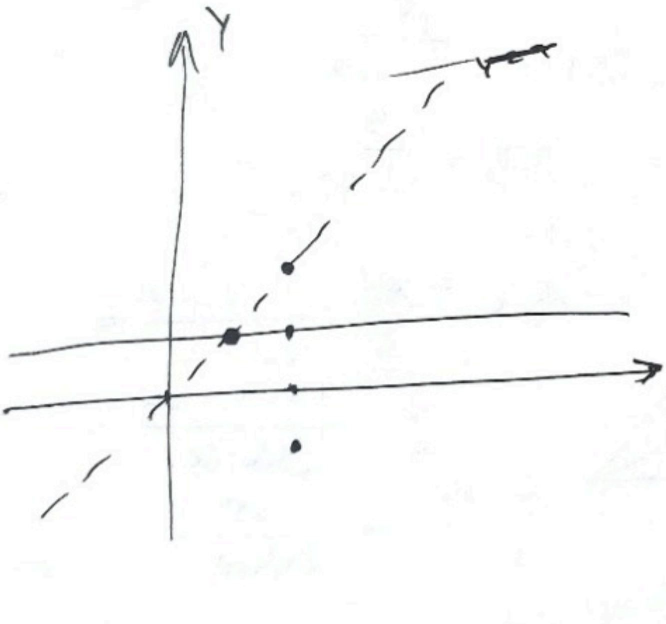
$a^2-2<a$

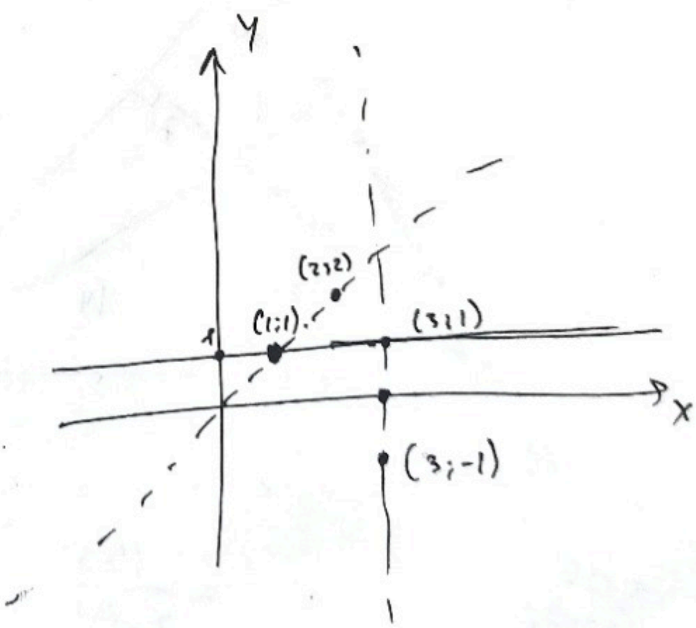
$A(a;a)$

$a^2+a-2<0$

$(a-1)(a+2)<0$

$a\neq 0$





$a=1: A(1;1)\quad B(3;-1)$

$a=2: A(2;2)\quad B(3;1)$

$a=3: A(3;3)\quad B(3;\frac{7}{3})$

15 9 6

Монотонность $\frac{a^2-2}{a}$.　　　　　Черновик

$a = -2 : -1$

$a = -1 : 1$

$a = -\frac{1}{2} : \frac{\frac{1}{4}-2}{-\frac{1}{2}} = 4 - \frac{1}{2} = 3.5$

$$\frac{a^2-2}{a} < \frac{(a+1)^2-2}{a+1}$$

$$\frac{a^2-2}{a} < \frac{a^2+2a-1}{a+1} \qquad a \neq -1 \neq 0 \qquad a = 1 : -1$$

$$\cancel{a^3+a^2-2a-2 < a^3+2a^2-a}$$

$$\cancel{a^2+a+2>0}$$

$$\cancel{a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}}$$

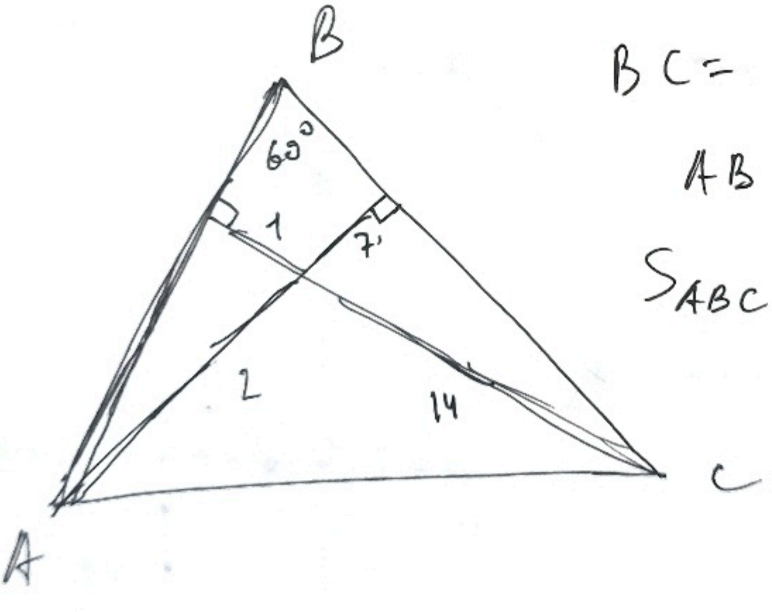
$$(a+1)(a^2-2) < a^3+2a^2-a$$

$$\cancel{a^3}+a^2-2a-2 < \cancel{a^3}+2a^2-a$$

$$a^2+a+2>0$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

1.



$$BC = \frac{15}{\sin 60}$$

$$AB = \frac{9}{\sin 60}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{135 \sin 60}{2\sin^2 60} = \frac{135}{2\sin 60} =$$

$$= \frac{135}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{135}{\sqrt{3}}$$

$\frac{306}{135}$ 171

$$AC = \sqrt{\frac{225}{\sin^2 60} + \frac{81}{\sin^2 60} - \frac{270}{\sin^2 60} \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{36}{\sin^2 60}} = \frac{6}{\sin 60}$$

$\frac{171}{3} \cdot 4 = 57 \cdot 4$

Черновик

$$abc = \frac{15 \cdot 9 \cdot 6}{\sin^3 60} = \frac{810}{\sin^3 60}$$

$$4S = \frac{540}{\sin 60}$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{810 \cdot \sin 60}{540 \cdot \sin^3 60} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007093**

ID профиля: **818435**

Вариант 15

Чистовик

4. $\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$ Пусть $x^2+y^2=m$, $m\geq0$
$x^2y^2=n$, $n\geq0$

$\begin{cases} 3m-n=3 \\ m^2-3n=31 \end{cases}$ $\begin{cases} 9m-3n=9 \\ m^2-3n=31 \end{cases}$ $m^2-9m-22=0$

$$m=\frac{9\pm\sqrt{81+88}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{9\pm13}{2}$$

$\left[\begin{array}{l} m=11 \\ m=-2<0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ не подходит $\Rightarrow$ $m=11$

$99-3n=9$ $n=\frac{90}{3}=30$

$\begin{cases} x^2+y^2=11 \\ x^2y^2=30 \end{cases}$ - числа $x^2=5$ $y^2=6$ и $x^2=6$ $y^2=5$ подходят.

По теореме Виета эти числа - единственные решения системы.

Ответ: $\begin{cases} x=\sqrt5 \\ y=\sqrt6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt5 \\ y=\sqrt6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\sqrt5 \\ y=-\sqrt6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt5 \\ y=-\sqrt6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\sqrt6 \\ y=\sqrt5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt6 \\ y=\sqrt5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\sqrt6 \\ y=-\sqrt5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt6 \\ y=-\sqrt5 \end{cases}$

5. Докажем, что в 400 карточках фокусника перебраны все возможные комбинации чисел и цветов.

Различных натуральных чисел от 1 до 20 – 20.

Каждое число может стоять с каждым числом на одной карточке, то есть каждое число образовывает 20 различных пар.

$\underbrace{20+20+\dots+20}_{20}=20\cdot20=400$. – здесь посчитаны все дубли по одному разу, а все ~~пары~~ карточки с различающимися числами – по 2 раза, как и должно быть (т.к. например карточки 19-20 и 20-19 – разные карточки).

Всего дублей здесь 20 штук. То есть вариантов выбрать дубль – 20.
С каждым определённым числом есть всего $19\cdot2+1=39$ карточек. Нам нужно выбрать любую карту, кроме этих 39. Это можно сделать $400-39=361$ способом.

Чистовик

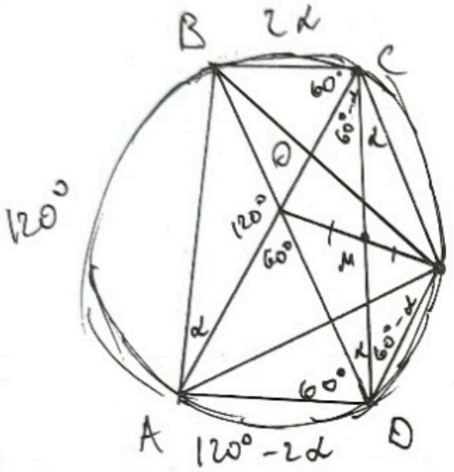
Итого способов выбрать нужную пару карт – $\frac{20\cdot 361}{2}$.

Мы делим на 2 потому что варианты выбрать 20-20 и ~~20~~ 19-18, и 19-18 и 20-20 – одинаковые варианты, и они посчитаны 2 раза.

$\frac{20\cdot 361}{2} = 10\cdot 361 = 3610$

Ответ: 3610 способов.

6. а)



$\triangle ABO = \triangle DCO$ ($BO=OC$, $AO=OD$, $\angle AOB = \angle COD$)

$\Rightarrow AB = CD$, $\angle BAO = \angle CDO = \alpha$

$OCTD$ – параллелограм ($CM=MD$, $OM=MT$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CMT = \triangle DMO$. $\Rightarrow \angle TCM = \angle ODM = \alpha$

Из $\triangle COD$ $\angle OCD = 180° - 120° - \alpha = 60° - \alpha$

$ABCD$ вписан в окружность, т.к. $\angle BCD + \angle BAD = 60° + 60° - \alpha + \alpha + 60° = 180°$.

$\triangle COM = \triangle DTM \Rightarrow \angle OCM = \angle TDM = 60° - \alpha$

$\angle CTD = 180° - 60° + \alpha - \alpha = 120°$ (из $\triangle CTD$).

Точка T лежит на описанной окружности ABCD, т.к. $\angle CTD$ опирается на $\smile DAC$, $\angle CTD = 120°$, $\smile DAC = 2\alpha + 120° + 120° - 2\alpha = 240°$.

и $\smile DAC = 2\angle CTD$.

$\angle BDT$ оп. на $\smile BCT$. $\angle BDT = 60° - \alpha + \alpha = 60° \Rightarrow \smile BCT = 120°$.

$\angle BAT$. опир. на $\smile BCT$ = $\angle BAT = \frac{120°}{2} = 60°$.

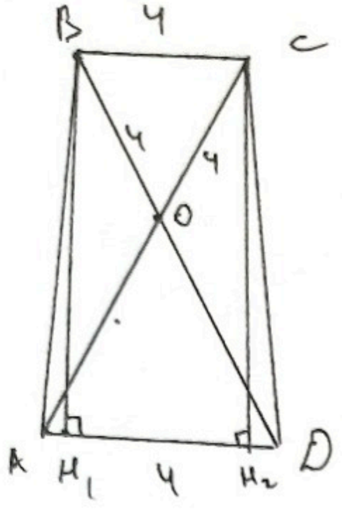
$\angle ACT = 60° - \alpha + \alpha = 60°$, он опир. на $\smile ADT$. $\smile ADT = 60° \cdot 2 = 120°$.

$\angle ABT$ опир. на $\smile ADT \Rightarrow \angle ABT = \frac{\smile ADT}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$.

В $\triangle BAT$ 2 угла по $60°$ $\Rightarrow \triangle BAT$ – равносторонний (правильный)

Чистовик.

6б.



$$S_{ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60}{2}$$

$$AB = \sqrt{BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos 60} = \sqrt{(4+5)^2 + 5^2 - \cancel{2} \cdot (4+5) \cdot 5 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{81 + 25 - 45} = \sqrt{61}$$

$$S_{ABT} = \frac{\sqrt{61}^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{61\sqrt{3}}{4}$$

ABCD – р/б трапеция ($BC \neq AD$, $BC \parallel AD$, $AB = CD$). =>

$$=> S_{ABCD} = \frac{(BC + AD) \cdot BH_1}{2}$$

$H_1H_2 = BC = 4$ $\quad AH_1 = DH_2 = \frac{AD - H_1H_2}{2} = \frac{5-4}{2} = 0,5$

$DH_1 = 5 - 0,5 = \cancel{0,5}\ 4,5$

$$BH_1 = \sqrt{BD^2 - DH_1^2} = \sqrt{81 - \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{243}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 9}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(5+4) \cdot \sqrt{3} \cdot 9}{2 \cdot 2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{81\sqrt{3}} = \frac{61}{81}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61}{81}$

211007093 (U818435 M1274879)

1. Черновик

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$x^2=m$

$y^2=n$

$\sigma_1=m+n \quad \sigma_2=mn$

$$\begin{cases} 3m+3n-mn=3 \\ m^2+n^2-mn=31 \end{cases}$$

$\cancel{m^2-3m+n^2-3n=28}$

$m(3-n)=3-3n$

$m=\dfrac{3-3n}{3-n}$

$$\begin{cases} 3\sigma_1=3+\sigma_2 \\ \sigma_1^2-3\sigma_2=28 \end{cases} \quad \sigma_2=3\sigma_1-3$$

$\sigma_1^2-9\sigma_1+9=28$

$\sigma_1^2-9\sigma_1-19=0$

$\sigma_1=\dfrac{9\pm\sqrt{81+76}}{2}=\dfrac{9\pm\sqrt{157}}{2}$

$$\frac{9-18n+9n^2}{9-6n+n^2}+n^2-\frac{3n-3n^2}{3-n}=31$$

$\cancel{9-18n+9n^2-9n+9n^2+3n^2-9n^2}$

$9-18n+9n^2-9n+9n^2+3n^2-3n^3+9n^2-6n^3+n^4=31\cdot9-31\cdot6n+31n^2$

$n^4-9n^3+30n^2-27n+9=31\cdot9-31\cdot6n+31n^2$

$n^4-9n^3-n^2-213n-270=0$

5. 900 — 20 ~~карт~~ дублей

20 вариантов выбрать дубль

Остаётся 19 карточек с этим же числом. => 380 карточек без этого числа

$\dfrac{20\cdot19}{2}=190$?

$\boxed{\dfrac{20}{20}}$

1. Верный ответ

$AC=\dfrac{21}{\sin\alpha}$ $R=\dfrac{21\cdot15-9\sin\alpha\cdot2}{135\cdot4\cdot\sin^2\alpha}=\dfrac{21\cdot4}{2\cdot3}=14$!

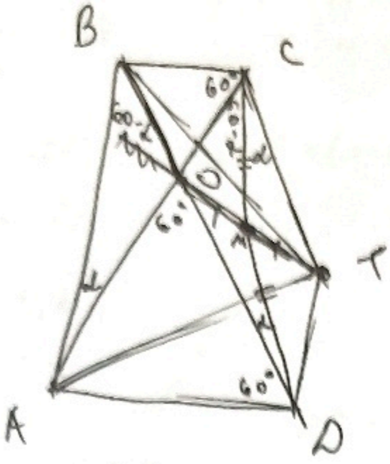
$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2\ldots}$

211007093 (U818435 M1274879)

6.

Черновик

а)



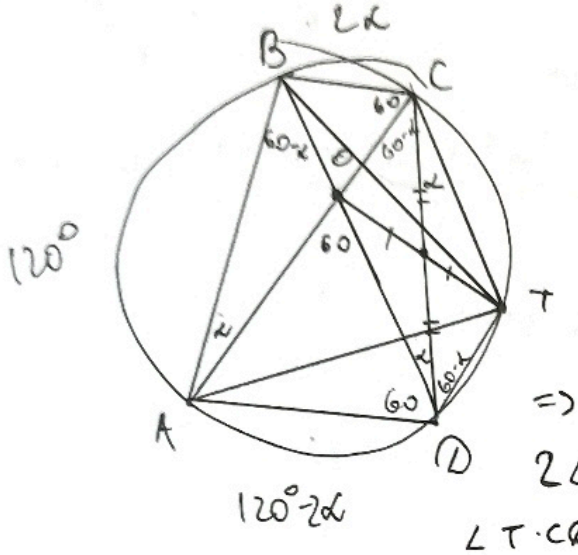
$\triangle ABO = \triangle DCO \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = CD$

$OCTD$ — параллелограм $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CMT = \triangle DMO \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MCT = \angle MDO = \alpha$



(!) T леж. на окр.

$\overset{\frown}{DAC} = 240^\circ$, $\angle CTD = 120^\circ \Rightarrow$

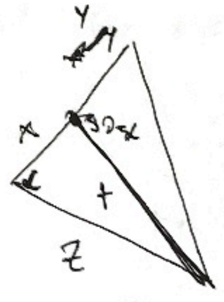
$\Rightarrow$ точка T лежит на оп. окр., т.к. $2\angle CTD = \overset{\frown}{DAC}$.

$\angle TCD = \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{TD} = 2\alpha \Rightarrow \angle TBD = \alpha \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 306 \\ +135 \\ \hline 441 \end{array}$$

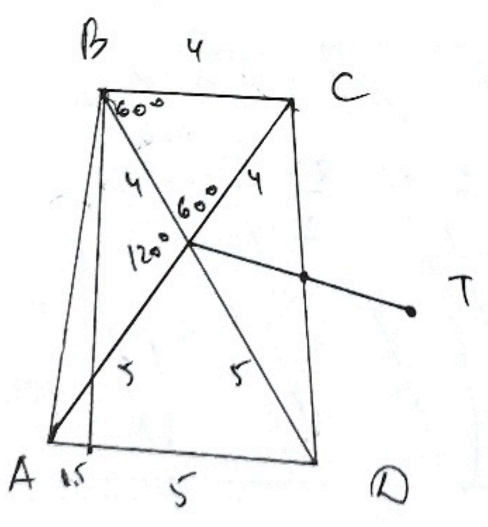
$\Rightarrow \angle ABT = 60^\circ - \alpha + \alpha = 60^\circ$

$\angle TDB = 60^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BCT} = 120^\circ \Rightarrow \angle BAT = 60^\circ$



В $\triangle BAT$ 2 угла $60^\circ \Rightarrow \triangle BAT$ — равност.

б)



$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$$

$\cos 120 = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$AB = \sqrt{16+25-40\cos 120} = \sqrt{41+20\sqrt{3}} = \sqrt{41-2\sqrt{300}}$

$S_{ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60}{2} = \frac{(41-2\sqrt{300})\sqrt{3}}{4} = \frac{41\sqrt{3}-60}{4}$

Черновик

$h=\sqrt{41-2\sqrt{300}-\frac{1}{4}}$

4. $\begin{cases}3x^2+3y^2-x^2y^2=3\\ x^4+y^4-x^2y^2=31\end{cases}$ $\quad$ $x^2+y^2=m \geq 0$

$x^2y^2=n \geq 0$

$\begin{cases}3m-n=3\\ m^2-3n=31\end{cases}$ $\quad n=3m-3$

$m^2-9m+9-31=0 \quad m^2-9m-22=0$

$m=\frac{9\pm\sqrt{81+88}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{9\pm13}{2}$

$\left[\begin{array}{l}m=11\\ m=-2\end{array}\right.$ $\quad m=11$

$n=33-3=30$

$\begin{cases}x^2+y^2=11\\ x^2y^2=30\end{cases}$ $\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=5\\ y^2=6\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=6\\ y^2=5\end{cases}\end{array}\right.$

5. $20+19+\ldots+1=210$ $\quad$ $20\cdot$

$210\cdot2-20=400$ [illegible]

20 дублей

$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \ldots\ \frac{1}{20}$ $\quad \times 2$

39

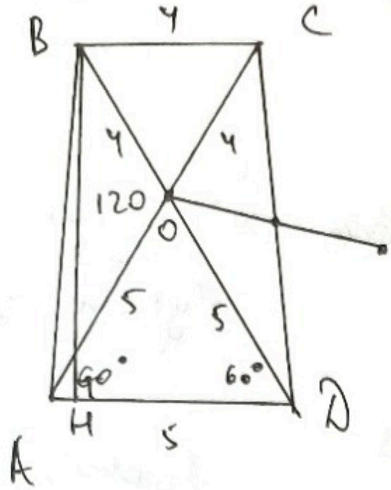
Всего карточек с опр. числом: 39 $\quad \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ldots\ \frac{1}{20}-19\times2=38+\frac{1}{1}$

$\frac{20\cdot(400-39)}{2}=10\cdot361=3610$

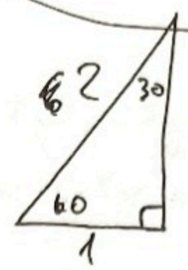
211007093 (U818435 M1274879)

6.б)

~~Черновик~~



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$



$\cancel{3 = 4 + 1 \; 2 \cdot 2} \cdot 1 \cdot$

$$S_{ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60}{2}$$

$$3 = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 5 - 2 = 3$$

$$AB = \sqrt{81 + 25 - 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{106 - 45} = \sqrt{61}$$

$\cos 30 \ne \cos 60$

$$AB = \sqrt{16 + 25 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$BH = \sqrt{81 - 4{,}5^2} = \sqrt{81 - \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{243}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 9}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(BC + AD) BH}{2} = \frac{9 \cdot \sqrt{3} \cdot 9}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABT} = \frac{61\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{81\sqrt{3}} = \frac{61\sqrt{3}}{81\sqrt{3}} = \frac{61}{81}$$

211007093 (U818435 M1274879)