Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

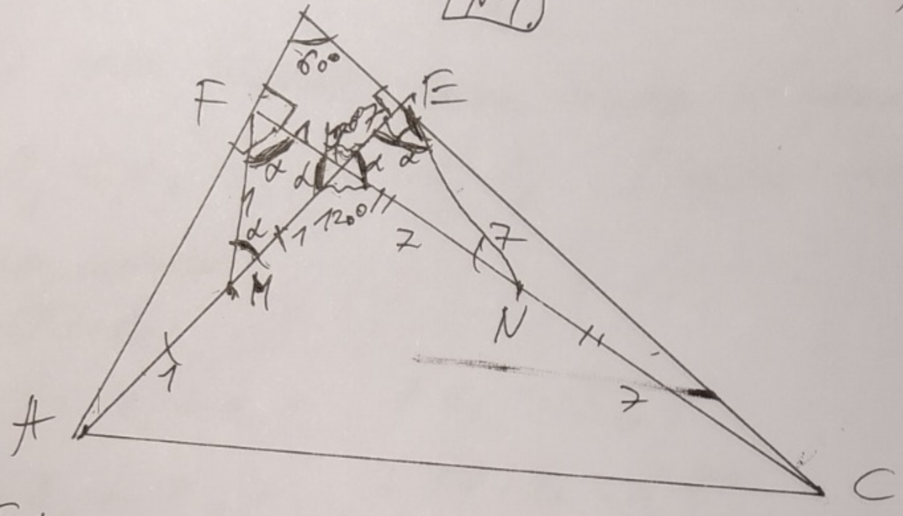
Шифр: **211006942**

ID профиля: **192942**

Вариант 15

Чистовик (Вариант 15) Стр. 1

№1



EN – медиана $\triangle HEC$, $\angle HEC = 90° \Rightarrow EN = HN = NC = 7$.
Аналог. $FH = \cancel{HA} = MH = MA = 1$. $FM \parallel EN \Rightarrow ME$ – секущая $\Rightarrow \angle FME = \angle MEN$ (накр. леж. ~~вертик.~~); $HN = NE \Rightarrow \angle EHN = \angle HEN$ (св-во равноб. треуг.); $\angle FHM = \angle EHN$ (вертик.); $FM = MH \Rightarrow \cancel{\angle MFH} = \angle MHF \Rightarrow \angle MFH = \angle FHM = \angle HMF = \alpha$

$\alpha + \alpha + \alpha = 180°$ (Σ углов $\triangle MFH$) $\Rightarrow \alpha = 60°$

$\angle FHE = 180° - \alpha = 120°$ (смежные) $\Rightarrow \angle FBE + 90° + 90° + 120° = 360°$ (Σ углов $HFBE$) $\Rightarrow \boxed{\angle FBE = 60° = \angle ABC}$

$\angle AHC = 180° - \alpha = 120°$.

Т. cos для $\triangle AHC$: $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2 - 2AH \cdot HC \cos 120°} = \sqrt{4 + 196 + 2 \cdot 2 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2}} = 2\sqrt{50+7} = 2\sqrt{57}$

По т. sin рад. окр. около $\triangle ABC$ $\boxed{R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2\sqrt{57}}{2\sin 60°} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{19}}$

$\triangle MFH$ равност. (все углы по $\alpha = 60°$), аналогично $\triangle HEN$ равност. $\Rightarrow FH = 1$; $HE = 7$. Для $\triangle AEB$ $AB = \frac{AE}{\sin\angle ABE} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot 6$

$\boxed{S_{ABC} = \frac{FC \cdot AB}{2} = \frac{15 \cdot \frac{18}{\sqrt{3}}}{2} = 45\sqrt{3}}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 45\sqrt{3}$; $R = 2\sqrt{19}$

211006942 (U1?2942 M127?767)

Чистовик

№2

На доске написан набор чисел (в каком-то порядке):

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ (строго больше, т.к. числа различны.

Тогда:

(1) $32 \cdot a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 581$

(2) $a_1 + a_2 + \ldots + 17 \cdot a_n = 581$

(2)−(1): $17a_n + (a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_1 - 32a_1 - (a_2 + \ldots + a_{n-1}) - a_n = 0$

(3) $\boxed{16a_n = 31a_1}$

НОД$(31;16) = 1 \overset{16a_n \vdots 31}{\Rightarrow} \boxed{a_n \vdots 31}$; $a_n = 31k$

(2): $581 = a_1 + a_2 + \ldots + 17a_n \geq 17a_n = 17 \cdot 31k = 527k$

~~527~~ Если $k \geq 2$, то $581 \geq 527 \cdot 2$ — неверно $\Rightarrow$

$\Rightarrow k \leq 1$, но $k > 0$ ($a_n > 0$) $\Rightarrow k = 1 \Rightarrow \boxed{a_n = 31}$

откуда из (3) получим $\boxed{a_1 = 16}$

(2): $16 + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + 17 \cdot 31 = 581$

$a_2 + \ldots + a_{n-1} = 38$

Заметим, что $16 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-1} \Rightarrow$ каждое ч. среди $a_2; a_3 \ldots; a_{n-1}$ ≥ 16,

Но тогда если среди чисел $a_2; a_3 \ldots; a_{n-1}$ есть хотя бы 3, то $38 = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \geq 48$ — неверно $\Rightarrow$ в этой сумме есть только ~~[illegible]~~ два или одно ч. ~~a_2~~, (если 0 чисел, то сумма 0)

~~$a_2 = 22$, набор 16; 22; 31 подходит~~ [2 вар.! подходят]

~~Ответ: {16; 22; 31}~~ Если одно ч., то $a_2 = 38 > 31 = a_n$ — противоп. $\Rightarrow$ 2 ч. Перебрав всех вар-в чисел от 17 до 37 получаем: [illegible] первое [illegible] четвёртое 31, второе и третье {17; 21} или {18; 20}

211006942 (U192942 M1273767)

Чистовик

№3

Стр. 3

Окружность с ~~центром~~ В $f(x;y) = a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^3y + 4ay +$
$+ a^4 + 4 = 0$ (Заметим, что $a \neq 0$, иначе $4 = 0 \Rightarrow$ нет решений $\Rightarrow$ не окружн.)

$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 = (a(x-3))^2$

$a^2y^2 - 2ay(a^2-2) + (a^2-2)^2 = (ay-(a^2-2))^2$

$0 = f(x;y) = (a(x-3))^2 + (ay-(a^2-2))^2 - 9a^2 -$
$- (a^2-2)^2 + a^4 + 4 = (a(x-3))^2 + (ay-(a^2-2))^2 -$
$- 5a^2$

$(a(x-3))^2 + (ay-(a^2-2))^2 = 5a^2$

$(x-3)^2 + (y-(a-\frac{2}{a}))^2 = 5$ — окружность

Откуда получаем, $\boxed{\text{что коорд. } B - (3; a-\tfrac{2}{a})}$

Уравн. для точки A:

$f(y) = y^2 + 2(x-2a)y + (2x^2 - 6ax + 5a^2) = 0$

Дискриминант/4 $\frac{D}{4} = (x-2a)^2 - (2x^2-6ax+5a^2) =$
$= -x^2 + 2ax - a^2 = -(x-a)^2$, но для точки A
$\frac{D}{4} \geq 0$ (чтобы существ.) $\Rightarrow x = a$

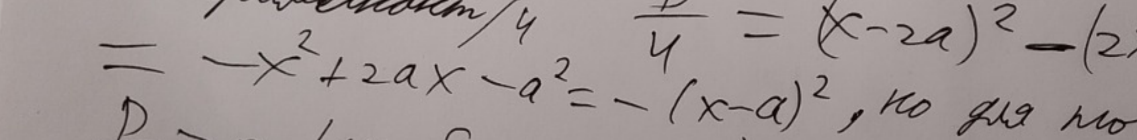
$y = -(x-2a) = -(a-2a) = a$

Откуда $\boxed{\text{координаты } A - (a;a)}$

Если т. A и B по разные стороны от $y=1$, то

I случай: $y_A > 1$; $y_B < 1 \Rightarrow a > 1$ и $\boxed{a - \frac{2}{a} < 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{a^2-a-2}{a} < 0$. ~~Применим метод интервалов:~~

$f(a) = a^2 - a - 2 = (a-2)(a-(-1))$. Применим метод интервалов:



(При $a = 3$ $\frac{9-3-2}{3} > 0$) $\Rightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$ Продолж. на стр. 4!!!

211006942 (U192942 M1273767)

Чистовик

стр. 4

N3 (продолж.)

Тогда $\begin{cases} a>1 \\ a\in(-\infty;-1)\cup(0;2) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a\in(1;2)}$

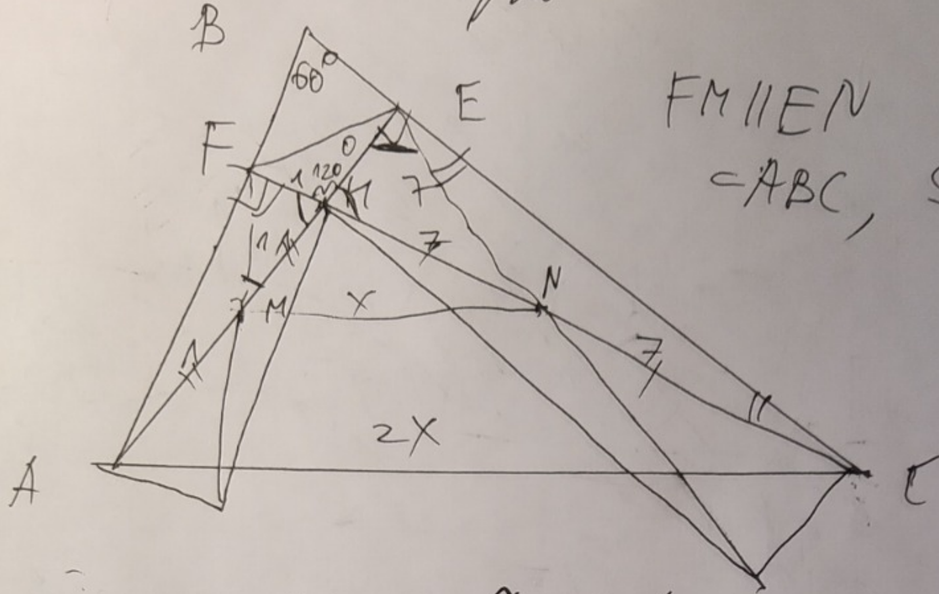
II случай: $y_A<1;\ y_B>1 \Rightarrow a<1;\ a-\frac{2}{a}>1$

Аналогично получим $\begin{cases} a<1 \\ a\in(-1;0)\cup(2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{a\in(-1;0)}$

$\boxed{\text{Ответ: } a\in(-1;0)\cup(1;2)}$

Черновик



$FM \parallel EN$

$\angle ABC$, S_{ABC}, R_{ABC}

$\cancel{a_1 \le a_2 \le}$ $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

$32a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 581$

$a_1 + a_2 + \ldots + 17a_n = 587$

$16a_n - 31a_1 = 0$

$16a_n = 31a_1$ $a_n \vdots 31$

$581 = a_1 + a_2 + \ldots + 17a_n \ge 17a_n = k \cdot 17 \cdot 31 \Rightarrow k = 1$

$$\begin{array}{r} \times\ 31 \\ 17 \\ \hline 217 \\ +\ 31 \\ \hline 527 \end{array}$$

$a_n = 31$

$a_1 = 16$

$32 \cdot 16 + 31 = 512 + 31$

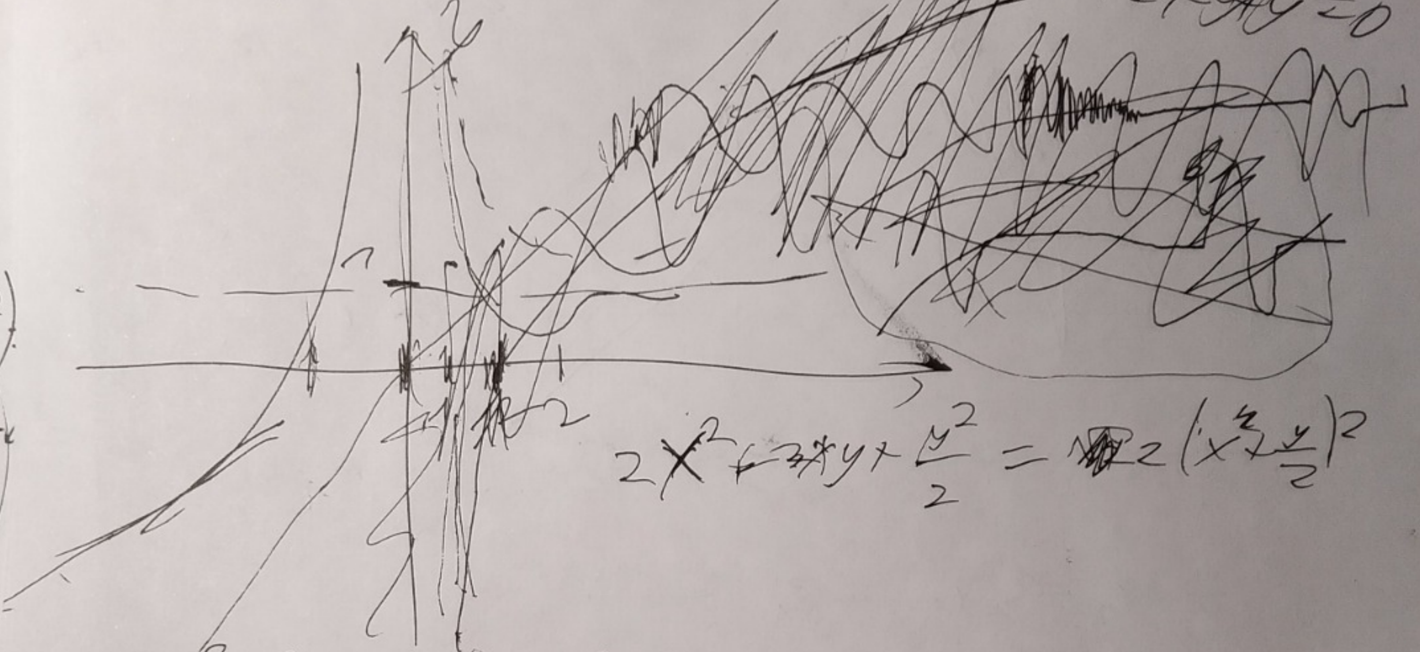
$= 543$

$$\begin{array}{r} 581 \\ -\ 543 \\ \hline 38 \end{array}$$

211006942 (U192942 M1273767)

Черновик

$A(x;y)$: $5a^2-6ax-4ay+x^2+2xy+ay^2=0$



$$2x^2+3xy+\frac{y^2}{2}=2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0$$

$$a^2x^2-6a^2x+9a^2=(a\cdot(x-3))^2$$

$$a^2y^2-2a^3y+4ay=\cancel{a^2(y^2+2)}$$

$$a^2y^2-2ay\cdot(a^2+2)+(a^2+2)^2$$

$$a^2x^2-6a^2x+9a^2+a^2y^2-2ay(a^2+2)+(a^2+2)^2-$$

$$-9a^2-(a^2+2)^2+a^4+4=(a(x-3))^2+(ay-(a^2+2))^2-$$

$$-13a^2=0$$

$$(x-3)^2+\left(y-\left(a+\frac{2}{a}\right)\right)^2-13=0$$

$$(x-3)^2+\left(y-\left(a+\frac{2}{a}\right)\right)^2=13$$

$$B\left(3;\ a+\frac{2}{a}\right)$$

211006942 (U192942 M1273767)

Черновик

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$(x^2-6ax+9a^2)+y^2+2xy+x^2-4ay-4a^2$

$y^2+2(x-2a)y+(2x^2-6ax+5a^2)=0$

$\frac{D}{4}=(x-2a)^2-(2x^2-6ax+5a^2)=-x^2+2ax-a^2=$

$=-(x-a)^2\geq 0 \Rightarrow x=a$

$y=x-2a=-a$

$(a;-a)$

9

$$\begin{array}{r} 587 \\ -527 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ -16 \\ \hline 38 \end{array}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006942**

ID профиля: **192942**

Вариант 15

Чистовик Вариант 15 Стр. 1

№ 4

Сделаем замену: $x^2+y^2=a$; $x^2y^2=b$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=a^2-2b$

$$\begin{cases} (1)\ 3a-b=3 \\ (2)\ a^2-3b=37 \end{cases}$$

(2) − (1)×3:

$a^2-9a=22$

$a^2-9a-22=0$

$a=\dfrac{9\pm\sqrt{81+4\cdot 22}}{2}=\dfrac{9\pm\sqrt{169}}{2}=\dfrac{9\pm 13}{2}$

$a=x^2+y^2\geq 0 \Rightarrow \boxed{a=\dfrac{9+13}{2}=11}$

(1): $3\cdot 11-b=3 \Rightarrow \boxed{b=30}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=11 \\ x^2y^2=30 \end{cases} \quad c=x^2;\ d=y^2$$

$$\begin{cases} c+d=11 \\ cd=30 \end{cases} \Rightarrow c\cdot(11-c)=30 \Rightarrow c^2-11c+30=0$$

$c=\cancel{\dfrac{6\pm\sqrt{6^2-33}}{1}=6\pm\sqrt{3}}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-4\cdot 30}}{2}=5$ или 6

~~$d=12-c=6\mp\sqrt{3}$~~ $d=11-c=6$ или 5 соотв.

~~I. $x^2=6+\sqrt{3}$ $y^2=6-\sqrt{3}$ или II $x^2=6-\sqrt{3}$ $y^2=6+\sqrt{3}$~~

~~Решения: $(\sqrt{6+\sqrt{3}};\sqrt{6-\sqrt{3}})$; $(\sqrt{6+\sqrt{3}}; -\sqrt{6-\sqrt{3}})$; $(-\sqrt{6+\sqrt{3}};\sqrt{6-\sqrt{3}})$; $(-\sqrt{6+\sqrt{3}};-\sqrt{6-\sqrt{3}})$~~

~~Решения: такие же, как в I, но x и y меняются местами~~

При подстановке из решений в c и d получим верное утвержд. из c и d в a и b верно из a и b в исходные уравн. верные (при подстановке все корни подходят)

~~Ответ: см. решения~~

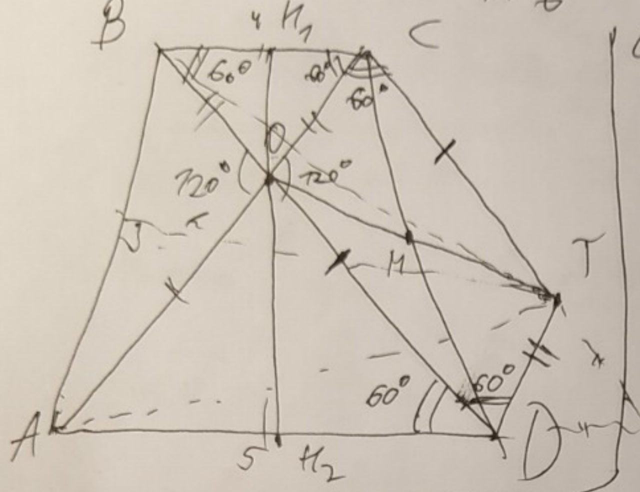
См. продолжение на стр. 5!!!

211006942 (U192942 M1273768)

Ч11-211

Чистовик

N 6



а) M – середина CD.

$OM=MT$, $CM=MD \Rightarrow OCTD$ – параллелограмм. $\Rightarrow OD= ~~CD~~ CT$, $OC=TD$

Также $\angle COD=180° - 60$, т.к. $\triangle BOC$ правильный $-\angle BOC=180°-60°=120$

~~$\angle C$~~ $\angle TDO=$ ~~60~~ $180°-\angle COD$ (CODT парал.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TDO=60°$. Аналог. $\angle OCT=60°$.

$\angle ODA=60°$, т.к. $\triangle AOD$ правильный. $\Rightarrow \angle ADT=60°+60°=$
$=120°$.

$\angle BOA=\angle ADT=120°$; $BO=TD$; $AD=OA \Rightarrow \triangle AOB=$
$=\triangle ADT$ (СУС) $\Rightarrow AT=AB$

Аналогично $BT=AB \Rightarrow AB=BT=AT \Rightarrow \triangle ABT$ правильный (признак прав. треуг.), ч.т.д.

б) $\angle BDA=\angle DBC=60° \Rightarrow BC \parallel AD$ (BD – секущ.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow ABCD$ трапец. или параллел.

Опустим высоты OH_1 и OH_2 на BC и AD. $BO=OC$; $AO=OD \Rightarrow$
OH_1 и OH_2 – биссек. $\angle BOC$ и $\angle AOD$, но $\angle BOC=\angle AOD \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle H_1OC=\angle AOH_2 \Rightarrow H_1, O, H_2$ на одной прямой.

$OH_1=$ ~~2~~ $\cdot OC \cdot \sin 60°=$ ~~$\frac{\sqrt3}{2} \cdot 4=\sqrt3 \cdot 2$~~ $=\frac{\sqrt3}{2} \cdot 4=\sqrt3 \cdot 2$

$OH_2=OD \cdot \sin 60°=\frac{\sqrt3 \cdot 5}{2}$

$H_2H_1=OH_1+OH_2=\frac{\sqrt3 \cdot 9}{2}$

Из 1) следует, что $\boxed{S_{ABCD}=}\ \frac{BC+AD}{2} \cdot H_2H_1=\frac{4+5}{2} \cdot \frac{\sqrt3 \cdot 9}{2}=$
$=\frac{81\sqrt3}{4}$

$\boxed{\text{продолж. на стр. 3}}$!!!

211006942 (U192942 M1273768)

№6 (продол.)

По т. cos для $\triangle BOA$:

$$BA = \sqrt{BO^2 + OA^2 - 2BO \cdot OA \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{16 + 25 + 20} = \sqrt{61}$$

Высота из T в ~~$\triangle BTA$~~ $\triangle BTA$ $h = BT \cdot \sin 60^\circ =$ ($BT = BA$)

$$= \sqrt{61} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{61} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$S_{BTA} = \frac{h \cdot BA}{2} = \frac{61 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61 \cdot \sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot 81 \cdot \sqrt{3}} = \frac{61}{81}$$

Ответ: $\frac{61}{81} = \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Чистовик Стр. 4

№5

Найдём кол-во возможных различных карточек: ~~...~~ красных

$20 \cdot 19$ — не дубли, $20 \cdot 1$ — дубли $\Rightarrow$ всего $20 \cdot 19 +$ синих $+ 20 = 20^2$ различных возможных карточек $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у фокусника есть все возможные различные карточки.

Кол-во способов взять дубль — 20. Кол-во способов взять карточку, в к-й нет одного из чисел (к-е в дубле): $\underset{\text{не дублей}}{19 \cdot 18} + \underset{\text{дублей}}{19} = 19^2$

Тогда $20 \cdot 19^2$ — кол-во способовов вытянуть дубль и не дубль ~~с различн. цифр.~~, на к-х нет одинак. чисел + + 2 × кол-во способов вытянуть 2 дубля (цифры не совпад.) (с двумя дублями фокусы посчитали способом, а с не дублём один раз (по дублю))

Кол-во способов вытянуть 2 дубля: $\frac{20 \cdot 19}{2}$

Тогда ответ на задачу: $S = 20 \cdot 19^2 - \frac{20 \cdot 19}{2} =$

$= \cancel{20 \cdot 19} \cdot 20 \cdot 19 \left(19 - \frac{1}{2}\right) = 20 \cdot 19 \cdot \frac{37}{2} =$

$= 7030$

Ответ: 7030

№4 (продолж.)

I случай: $x^2=5$; $y^2=6$

Решения: $(\sqrt{5};\sqrt{6})$; $(\sqrt{5};-\sqrt{6})$; $(-\sqrt{5};\sqrt{6})$; $(-\sqrt{5};-\sqrt{6})$

Ответ: см. решения

II случай: $x^2=6$; $y^2=5$

~~Т~~ Те же решения, но x и y меняются местами

Черновик

$3x^2+3y^2-x^2y^2=3$

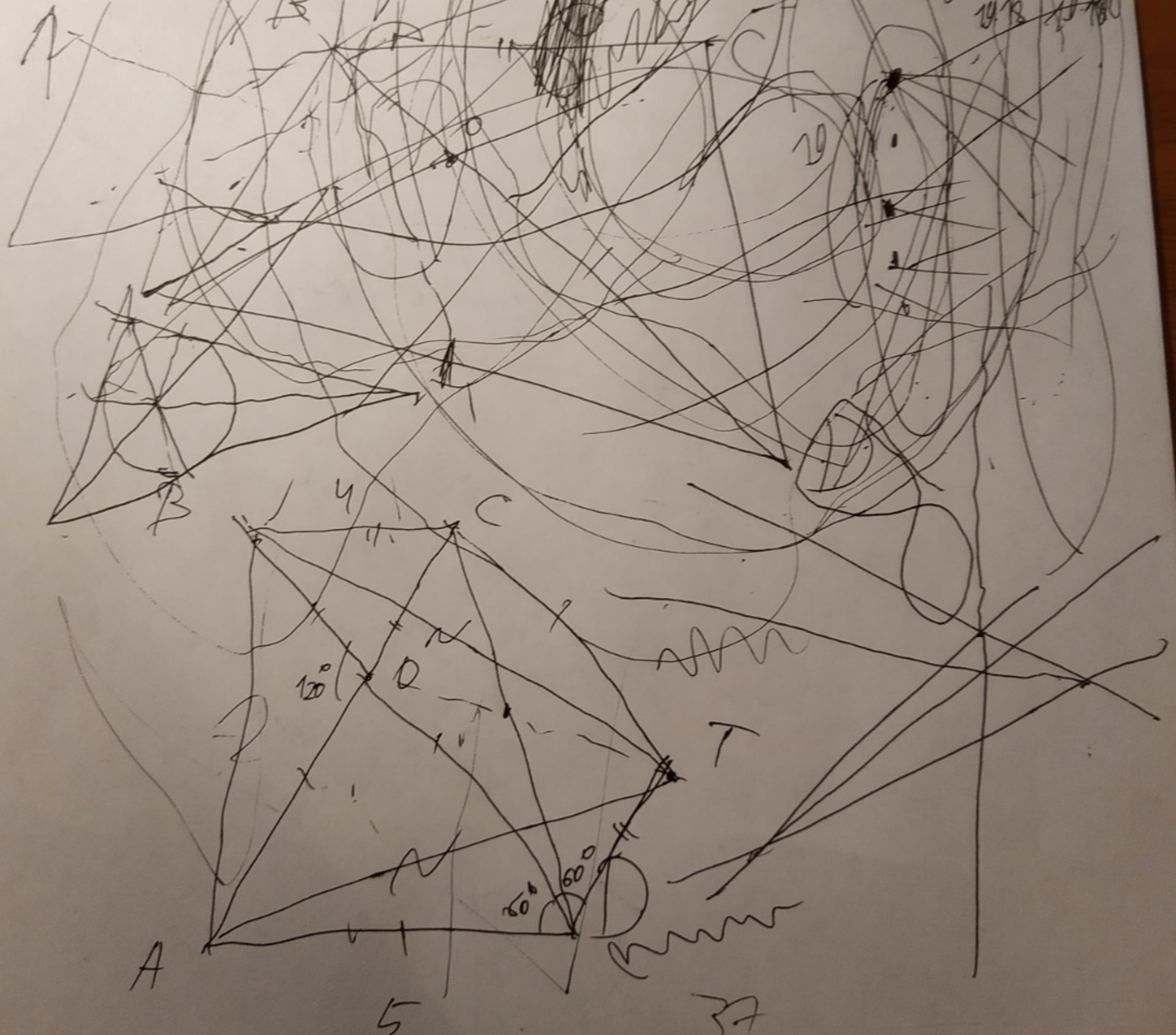
$x^4+y^4-x^2y^2=37$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$3a-b=3$

$a^2-b=37$



37×19

333

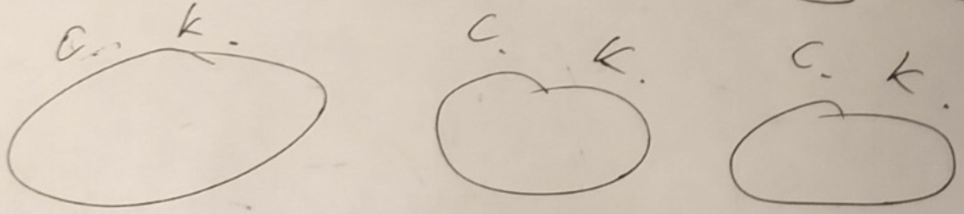
$+\,37$

703

Черновик

20^2

К С С К К К С



-400 Кол-во способов сделать карт. два разных ч.: $20\cdot 19$

Одинак. ч.: 20

$\boxed{20^2}$

$$\frac{(20\cdot 19)(20\cdot 19-1)}{2}$$ — нет дубля

$$\frac{20^2\cdot(20^2-1)}{2}$$ — ~~может быть дубль~~

$$\frac{20\cdot 19\cdot 37}{2} = 10\cdot 19\cdot 37$$

7030

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 37 \\ \hline 133 \\ +\ 57 \\ \hline 703 \end{array}$$

211006942 (U192942 M1273768)