Часть 1

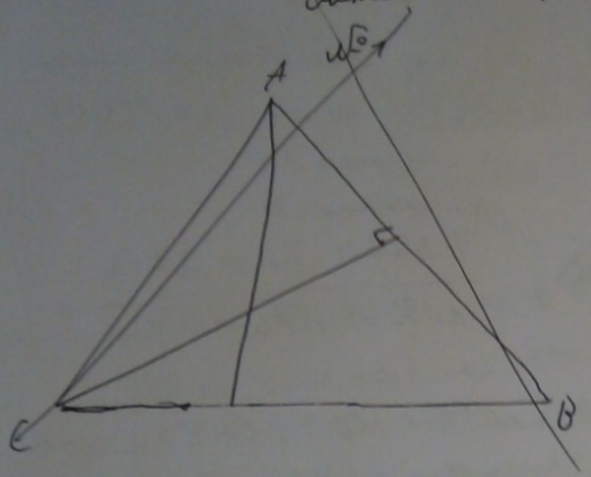
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006817**

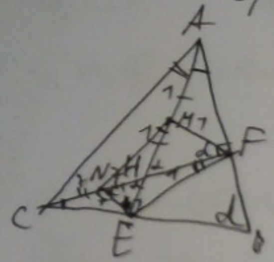
ID профиля: **813343**

Вариант 15

Чистовик Черновик



Черновик



№1

Дано:
$\triangle ABC$ – остр.
CF и AE – высоты
$H \in CF \cap AE$
M – середина AH
N – середина CH
$MF = 1,\ EN = 7,\ MF \parallel EN$

S_{ABC} – ? R – ?
$\angle ABC$ – ?

$581 = 31a_1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n \cdot a_1 + 31 a_1 + \ldots$

$a_1(n+31) \leq 581$

$581 \,|\, 31$ ... 18

$a_1 = 18,\ n = 31$

$\alpha = 180 - 2\alpha$ $\quad \alpha = 60^\circ$

$AH = 2 \quad HF = 1$

$\cancel{AE = 3} \quad CF = 15 \quad AE = 9$

$BC = \frac{CF}{\sin\alpha} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{9 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

$CE = CH \cdot \sin\alpha = 7\sqrt{3}$

$AC^2 = AE^2 + CE^2 = 81 + 49 \cdot 3 = 81 + 147 = 228 = 4 \cdot 57 = (2\sqrt{57})^2$

$R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{57}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{\frac{57}{3}} = 4\sqrt{19}$

$33 \cdot 33$, $33 \cdot 34$

$3n \leq 1100$

$61 \cdot 61 = 3600 + 120 + 1$
$= 3721$

$32^2 \ 33^2 \quad n \geq 33$

$32 \cdot 33 =$ $\quad$ no

$4401 \,|\, 6$

$n \leq 32$ $\quad 29 \cdot 29$

$\cancel{67 \cdot 63} = 69(70 - 1)(70 - 1) = 4900 -$

$4401 - 3600 = 801 =$

№2

$1089 + 4648 = 5737$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

$a_2 - a_1 \geq 1$
$a_3 - a_2 \geq 1$
$\ldots$
$a_n - a_{n-1} \geq 1$

$a_n - a_1 \geq n$

$581 \geq \frac{n(n+1)}{2} + 16n$

$a_n \geq n$

$33 \cdot 33$: 99, 99, 1089

$1162 \cdot 4 = 4648$

$32 a_1 \geq 32$
$a_2 \geq 2$
$a_3 \geq 3$
$a_n \geq n$

$581 \geq 32a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq \frac{(1+n)n}{2} + 31$

$1162 \geq n^2 + n + 62$

$n^2 + n - 1100 \leq 0$

$32a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 581$ $\quad 31a_1 = 16a_n$

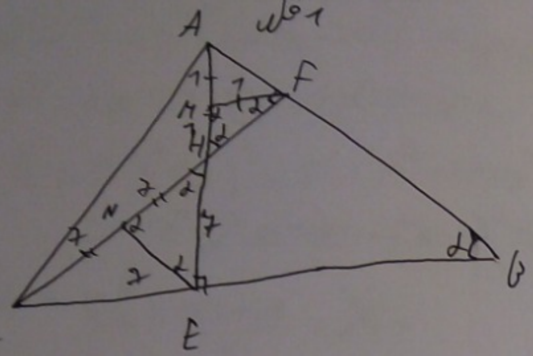
$a_1 + a_2 + \ldots + 17a_n = 581$

$n^2 + 33n - 1162 \leq 0$ $\quad D = 1 + 4400 = 4401$

211006817 (U813343 M1275356)

Чистовик

№1



Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный

AE и CF – высота, $H \in AE \cup CF$

M – середина AH

N – середина CH

$EN \parallel FM$, $FM = 1$, $EN = 7$

$\angle ABC$ – ?, S_{ABC} – ?, R – ?

Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 90^\circ - \cancel{\angle CFB}\ \angle FCB = \angle CHE = \alpha = \angle MHF$.

$7 = EN = \frac{1}{2} CH = CN = HN$ (т.к. в прямоугольном $\triangle CHE$ медиана равна половине гипотенузы). Аналогично $MH = AM = MF = 1$.

$\angle HFM = \angle FMH = \alpha$ ($\triangle HMF$ – равнобедренный). Аналогично $\angle NEH = \angle NHE = \alpha$.

$\angle ENH = \angle MFH = \alpha$, т.к. $MF \parallel NE$. В треугольнике NHE все углы равны $\alpha \Rightarrow \alpha = 60^\circ = \angle ABC$, и $\cancel{\triangle NEH}$ $\triangle NEH$ – равносторонний $\Rightarrow NH = EN = HE = 7$.

Аналогично $\angle NEH = \angle HMF = \alpha$ ($MF \parallel NE$), и $\triangle MFH$ – равносторонний $\Rightarrow$ $MF = MH = HF = 1$.

$CF = CH + HF = 7 \cdot 2 + 1 = 15$, $AE = AH + HE = 1 \cdot 2 + 7 = 9$

$BC = \frac{CF}{\sin\alpha} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10\sqrt{3}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 9}{2} = 45\sqrt{3}$

$CE = CH \cdot \sin\alpha = 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{81 + 147} = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}$

$R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{57}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{57}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{19}$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{\triangle ABC} = 45\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{19}$

Черновик

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$ $(x_B-1)(x_A-1)<0$

$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2$

$5a^2-2a(3x+2y)+2x^2+2xy+y^2=0$

$\frac{D}{4}=(3x+2y)^2-5(2x^2+2xy+y^2)=9x^2+4y^2+12xy-10x^2-5y^2-10xy=$

$=-x^2-y^2+2xy=-(x-y)^2\geq0$ $x=y$ $D=0$ $16^2=256$ 512

$a=\frac{-b}{2a}=\frac{3x+2y}{5}=x_1$ $\frac{n(n+1)}{2}+$

$x^2+y^2-6x-2ay+\frac{4y}{a}+a^2+\frac{4}{a^2}=0$ $x_0=3$ $\frac{n(n+1)}{2}\leq 31\cdot 32\cdot 581$

$x^2-6x+9+y^2-2ay+\frac{4}{a}+(a+\frac{2}{a})^2+a^2+\frac{4}{a^2}-(a+\frac{2}{a})^2\geq0$ $x_a=a$

$(x-3)^2+(y-(a+\frac{2}{a}))^2=(a+\frac{2}{a})^2-a^2-\frac{4}{a^2}=a^2+\frac{4}{a^2}+4=4$

$(x-3)^2+(y-(a+\frac{2}{a}))^2=2^2$

$a<1$ $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ $a_1\geq 32$ $16\cdot32=512$

$a_1<a_2<\ldots<a_n$ $581=7\cdot83$ $\boxed{31a_1=16a_n}$

$32a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=581=a_1+a_2+\ldots+17a_n$ $a_n=\frac{31}{16}a_1$

$32\cdot31$ $a_1=16$

$a_2-a_1\geq1$ $a_n\leq$ $S+31a_1=581=S+16a_n$

$a_3-a_2\geq1$

$581=S+16a_n\leq\frac{n(n+1)}{2}+15a_n$ $a_1\geq16$ $S\geq\frac{n(n+1)}{2}+a_1\cdot n$

$a_n-a_1\geq1$ $S\geq 16+17+\ldots+a_n$

$S\leq$ $a_n-a_1\geq n$ $a_1\geq16$ $a_2\geq17$

$n\leq a_n-a_1=\frac{31}{16}a_1-a_1=\frac{15}{16}a_1\leq a_1$ $a_n\geq15+n$ $a_n>n$ $32+33+34+35$

$n(n+1)\leq 140$ $a_n=16k$

$581=32a_1+a_2+\ldots+a_n=31\cdot a_1+S$

$581=31a_1+S\geq 31\cdot16+\frac{n(n+1)}{2}$ $31\cdot32$

$31\cdot581$ $581:16=36$ $n^2+n-140\leq0$

$n(n+1)\leq140$ $n\leq11$

211006817 (U813343 M1275356)

Чистовик

№2

Пусть $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ — все написанные числа, причём, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Тогда $32 \cdot a_1 + a_2 + \dots + a_n = 581 = a_1 + a_2 + \dots + 17 a_n$

$31 a_1 = 16 a_n$, т.к. НОД$(31; 16) = 1$, то $a_1 \vdots 16$, т.е. $a_1 = 16R$ $(R \in N)$.
$a_n \vdots 31$

Если $R \geq 2$, то $a_1 \geq 32$ и $32 \cdot a_1 > 581 \Rightarrow 32 \cdot a_1 + a_2 + \dots + a_n > 581$ — равенство невозможно.

Поэтому $R = 1$, и $a_1 = 16$. ~~Тогда $32 \cdot a_1 + a_2 + \dots + a_n = 581$~~

$a_n \vdots 31 \Rightarrow a_n = 31 \cdot m$ $(m \in N)$. Если $m \geq 2$, то $a_n \geq 62$:

$581 = 32 \cdot a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \geq 512 + 62 + a_2 + \dots + a_{n-1} \Rightarrow a_2 + \dots + a_{n-1} \leq 7$, но т.к. $a_2 > a_1 > 16$, неравенство невозможно (Если чисел всего 2 — a_1 и a_n, то равенство тоже не выполняется при $m \in N$, т.к. $m = \frac{581 - 32 \cdot a_1}{31} = \frac{69}{31} \notin N$).

Значит $m = 1$, и $a_n = 31$. Тогда $a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 581 - 512 - 31 = 38$.

Если $n = 3$, то $a_2 = 38$, но $a_2 < a_n = 31$.

Если $n = 4$, то $a_2 + a_3 = 38$, если $a_2 \geq 19$, то $a_3 \geq 20$ и $a_2 + a_3 \geq 39$. Значит $16 < a_2 < 19$ или $17 \leq a_2 \leq 18$. Если $a_2 = 17$, то $a_3 = 21 \Rightarrow \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n\} = \{16; 17; 21; 31\}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что это решение удовлетворяет условию. Если же $a_2 = 18$, то $a_3 = a_2$ и решение $\{a_1; a_2; a_3; a_4\} = \{18; 18; 20; 31\}$ также удовлетворяет условию.

Если $n \geq 5$, то $a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \geq 38$, т.к. $a_2 \geq 17$, $a_3 \geq 18$ и $a_4 \geq 19$, то равенство невозможно.

Т.к. рассмотрены все случаи, решений больше нет

Ответ: $\{16; 17; 21; 31\}$ или $\{16; 18; 20; 31\}$.

211006817 (U813343 M1275356)

~~Чистовик~~ Черновик

Чистовик

№ 3

1) $5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$ $(x;y)$ – координаты точки A

$5a^2-2a(3x+2y)+(2x^2+2xy+y^2)=0$

$\frac{D}{4}=(3x+2y)^2-5(2x^2+2xy+y^2)=-x^2+2xy-y^2=-(x-y)^2\geq 0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$

$a=\frac{3x+2y\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{5}=\frac{3x+2y}{5}=\frac{3x+2x}{5}=x$ – абсцисса точки A

2) $a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0$ (Если $a=0$, то графиком этой функции не будет являтся окружность $\Rightarrow a\neq 0$)

$x^2+y^2-6x-2ay+\frac{4y}{a}+a^2+\frac{4}{a^2}=0$

$x^2-6x+9+y^2-\cancel{2ay}\,2y\left(\frac{2}{a}-a\right)+\left(\frac{2}{a}-a\right)^2+a^2+\frac{4}{a^2}-\left(\frac{2}{a}-a\right)^2-9=0$

$(x-3)^2+\left(y-\left(\frac{2}{a}-a\right)\right)^2=\left(\frac{2}{a}-a\right)^2+9-a^2-\frac{4}{a^2}$

$(x-3)^2+\left(y-\left(\frac{2}{a}-a\right)\right)^2=5 \Rightarrow$ абсцисса точки B – $x=3$. Значит точка B лежит по правую сторону от прямой $y=1 \Rightarrow a$ (абсцисса точки A) <1, но т.к. $a\neq 0 \Rightarrow a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$

Ответ: $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006817**

ID профиля: **813343**

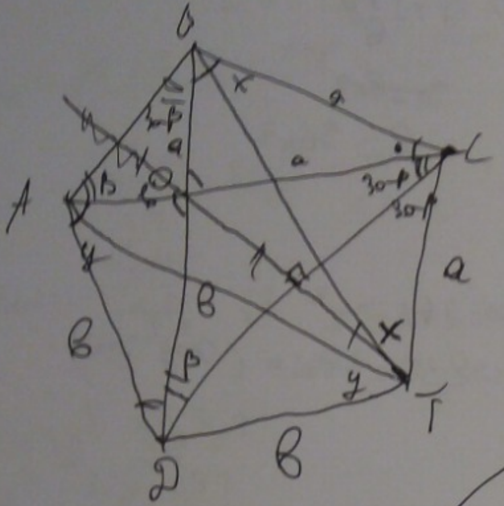
Вариант 15

№7 Черновик

$25 + 6 + 20 = 61$ 1

$\angle BCT = 120 - 2\beta$

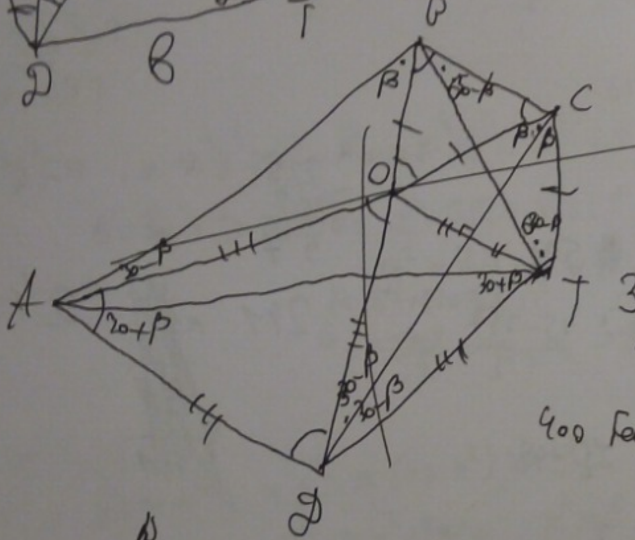
$\angle CTO = \dfrac{180 - (120 - 2\beta)}{2} = 30 + \beta$



$\beta = 60 - \beta$ $\beta = 25°$

$\beta = 30°$

$60 - \beta$



$18 + 75 - 30 = 3$

(030)

$3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 - 5 \cdot 6 = 3$

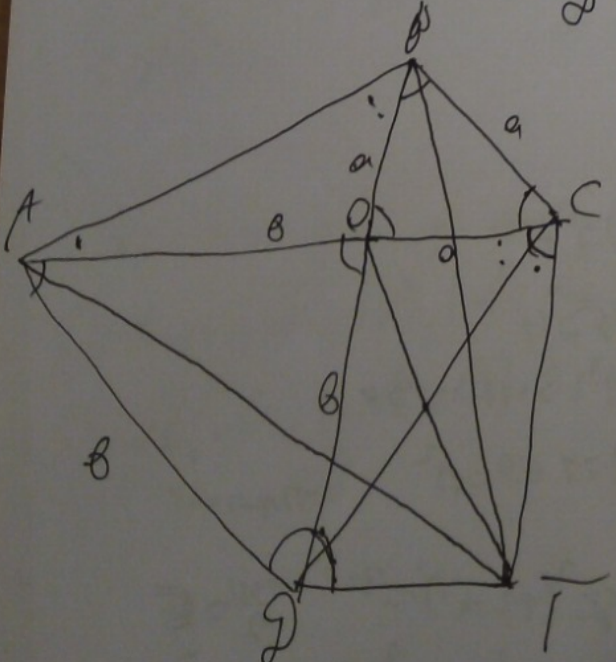
$36 + 25 - 5 \cdot 6 = 31$

400 бегунов $61 - 30 = 31$

(020)

20

20



2 задача — 2019

OCDT — параллелограмм

1 задача

$\{1; 2; 3; \ldots; 20\}$ $20^2 - 1 = 399$

$\{1; 2; 3; \ldots; 20\}$ $399 - 38 = 361$

$361 \cdot 20 + 20 \cdot 25 =$

$(1;1)$ — болтун $= 20 \cdot 380 = 7200$

$(1;2)$ $(2;1)$ $(1;3)$ $(3;1)$ … $(1;20)$ $(20;1)$

$19 \cdot 2 = 38$

Чистовик

№5

Фокуснику обязательно нужно вытянуть дубль. Поэтому, пусть первую карточку, для определённости, не нарушая общности, он вытянул 1–1. Тогда он не может вытянуть вторую карточку, только, если на ней 1-2, 1-3, ... 1-20, 2-1, 3-1 ..., 20-1 (1-2 и 2-1 – это разные карточки, т.к. числа на них будут разных цветов). Таких „запретных" карточек $19 \cdot 2 = 38$. Значит возможных карточек – $20^2 - 1 - 38 = 361$ для каждого дубля на первой карточке, а т.к. всего дублей 20, то возможных вариантов: $20 \cdot 361 = 7220$. ~~(варианты не будут повторяться, т.к.~~

Но если в одном варианте будет 2 дубля, то такой вариант повторяется дважды. Всего различных вариантов с обоими дублями – $20 \cdot 19 = 380$. Т.к. они засчитывались дважды в изначальные 7220 вариантов, то следует вычесть половину вариантов с обоими дублями из общей суммы, т.е. окончательное количество:

$7220 - \frac{380}{2} = 7220 - 190 = 7030$ вариантов

Ответ: 7030 вариантов (способов)

Чистовик

№6

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOD}{2} = \frac{(AO+OC)(BO+OD)}{2} \cdot \sin\angle AOD = \frac{9 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{AKD}} = \frac{61\sqrt{3}}{4} : \frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{61}{81}$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61}{81}$

№4

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$, а $x^2y^2=b$. Тогда $x^4+y^4=a^2-2b$:

$$\begin{cases} 3a-b=3 \\ a^2-3b=31 \end{cases}$$

$b=3a-3 \Rightarrow a^2-3b= a^2-3(3a-3)=31$

$a^2-9a-22=0$

$D=81+88=169=13^2$

$a_1=\frac{13+9}{2}=11$, $a_2=\frac{-13+9}{2}=-2<0$ (но $x^2+y^2\geq0$)

$b=3a-3=3\cdot11-3=30$

$$\begin{cases} x^2+y^2=11 \\ x^2y^2=30 \end{cases}$$

$y^2=11-x^2 \Rightarrow x^2y^2=x^2(11-x^2)=30$

$x^4-11x^2+30=0$, $x^2=t \Rightarrow t^2-11t+30$

$D=121-120=1$

$t_1=\frac{11+1}{2}=6$, $t_2=\frac{11-1}{2}=5$

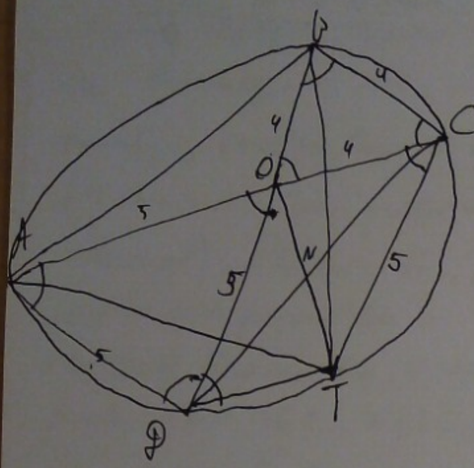
При $x^2=5$ $y^2=6$, а при $x^2=6$ $y^2=5$. Возможны пары: $(\pm\sqrt{5};\pm\sqrt{6})$ и $(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{5})$

Ответ: $(\sqrt{5};\sqrt{6})$, $(-\sqrt{5};\sqrt{6})$, $(\sqrt{5};-\sqrt{6})$, $(-\sqrt{5};-\sqrt{6})$, $(\sqrt{6};-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{6};\sqrt{5})$, $(\sqrt{6};-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{6};-\sqrt{5})$.

2

Чистовик

№6



Дано:

ABCD — четырёхугольник

$O \in AC \cap BD$

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — равносторонние

N — середина DC.

$T \in ON$, $TN = ON$ $(O \neq T)$, $BC=4$, $AD=4$

Док-ть: $\triangle ABT$ — равносторонний

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?

Решение:

Т.к. $ON = NT$ и $DN = NC$, то DOCT — параллелограмм.

$\angle BOC = 60^\circ \Rightarrow \angle COD = 120^\circ = \angle CTD$, и $\angle OCD = \angle ODT = 180^\circ - \angle DOC = 60^\circ$

$\angle BCT + \angle BDT = \angle BCO + \angle OCT + \angle CDT = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ BCTD — вписанный четырёхугольник (окружность также проходит через точку A, т.к.

$\angle BCO = 60^\circ = \angle ADB$ — вписанные углы).

$\angle CBT = \angle CDT$ (вписанные углы, опирающиеся на хорду CT) $= \angle ACD$ $(OC \parallel DT) =$

$= \angle ABD$ (опирающиеся на хорду AD).

$\cancel{60^\circ}$ $\angle CBT + \angle DBT = \angle ABD + \angle DBT$

$\angle OBC = \angle DBC = ABT = 60^\circ$. Аналогично доказывается, что $\angle BAT = 60^\circ$.

Откуда следует, что $\triangle ABT$ — равносторонний.

$AD = OD = CT$ (ODTC — параллелограмм) $= 5$.

В $\triangle BCT$ — $BC = 4$, $CT = 5$, $\angle BCT = 120^\circ \Rightarrow$ (по теореме косинусов) 1

$\Rightarrow BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos\angle BCT = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 16 + 25 + 20 = 61$

$S_{ABT} = BT^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{61\sqrt{3}}{4}$

Черновик

№4

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$a^2=(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$, b

$3t-b=3$ $\quad 3t=b+3$

$t^2-3b=31$ $\quad b=3t-3$

$t^2-3(3t-3)=31$

$t^2-9t-40=0$ $\quad D=81+160=241=21^2$

$t_1=\frac{9+21}{2}=15$ $\quad t_2=\frac{9-21}{2}=-6<0$ $(x^2+y^2\geq 0)$

$x^2+y^2=15$

$x^2y^2=3\cdot 15-3=42$

$x^2(15-x^2)=42$

$x^4-15x^2+42=0$

$D=225-168=57$

$x^2=\frac{15+\sqrt{57}}{2}$ $\quad y^2=\frac{15-\sqrt{57}}{2}$

$\begin{array}{r} -225 \\ 168 \\ \hline 57 \end{array}$

241 $\quad$ 241

$x^2y^2=\frac{225-57}{4}=\frac{168}{4}=42$

$x^2+y^2=15$

$x^4+y^4=73=(x^2+y^2)^2-2$

$225-3\cdot 42=31$

$225=31+126=157$

$x^2+y^2=11$

$t^2-9t+9-31=0$

$x^2y^2=3\cdot 11-3=30$

$t^2-9t-22$ $\quad D=81+88=169=13^2$ $\quad 121-120=1$

$\frac{9+13}{2}=11$

$(\sqrt{6};\sqrt{5})(-\sqrt{6};-\sqrt{5})$

$(-\sqrt{5};\sqrt{6})(-\sqrt{6};-\sqrt{5})$

$x^2(11-x^2)=30$ $\quad \frac{11+1}{2}=6$

$x^4-11x^2+30=0$ $\quad \frac{11-1}{2}=5$

211006817 (U813343 M1275357)