Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006738**

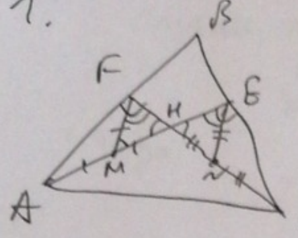
ID профиля: **368501**

Вариант 15

Чистовик

1

1.



FM и NE — медианы в прямоугольных треугольниках

$\Leftarrow$

$FM = AM = MH = 1$

$EN = CN = NH = 7$. $\Rightarrow \angle MFH = \angle MHF = \angle EHN = \angle NEH$.

Т.к. $FM \parallel EN$, $\angle NEH = \angle FMH$

$\Leftarrow$

$\angle FMH = \angle MHF = \angle HFM = 60°$; т.е. равносторонний треугольник $HF = 1$ $HE = 7$.

С другой стороны, $\angle MHF = 180° - \angle FHE = \angle ABC$ (FBEH — вписанный)

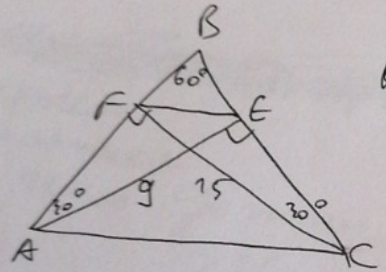
$\Leftarrow$

$\angle ABC = 60°$.

$\Downarrow$

$AE = 9$

$CF = 15$.



$\angle BCF = 30°$

$\angle BAE = 30° \Rightarrow BF = \frac{BC}{2} = 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\Leftarrow$

$BC = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$

$BE = \frac{AB}{2} = 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\Leftarrow$

$AB = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$.

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 45\sqrt{3}$

По теореме косинусов $AC^2 = (6\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 108 + 300 - 180 = 228$.

$AC = 2\sqrt{57}$. $\Leftarrow$

По теореме синусов $R = \frac{2\sqrt{57}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{19}$.

Ответ: $\angle ABC = 60°$

$S_{ABC} = 45\sqrt{3}$

$R = 2\sqrt{19}$.

211006738 (U368501 M1276686)

Чистовик

2.

2

Пусть a — наименьшее число
b — наибольшее число.
x — сумма остальных чисел.

Тогда

$$32a + x + b = 581.$$
$$a + x + 17b = 581 \Big| \Rightarrow 31a = 16b.$$

a и b — натуральные числа, поэтому $a = 16n$, $b = 31n$.

I $n=1$

$\boxed{a=16, \; b=31}$

Тогда
$x = 581 - 31 - 512 = 38,$

II $n \geq 2$.
Тогда $32a \geq 512n \geq 1024 > 581$, что невозможно, т.к. все числа натуральные.

причем оставшиеся числа должны быть >16 и <31. И давать в сумме 38. $\Rightarrow$ $17 + 21$, $18 + 20$

$19 + 19$ не подходит, т.к. все числа различны.

Ответ: 16, 17, 21, 31 и 16, 18, 20, 31.

211006738 (U368501 M1276686)

Чистовик

(3)

3. Уравнение A:

$$y^2 + 2(x-2a)y + 2x^2 + 5a^2 - 6ax = 0.$$

половинный дискриминант:

$$D_1 = x^2 - 4ax + 4a^2 - 2x^2 - 5a^2 + 6ax =$$

$$= -(x-a)^2 \leq 0,$$ ~~[illegible]~~

в A $x = a \Rightarrow y^2 - 2ay + a^2 = 0$

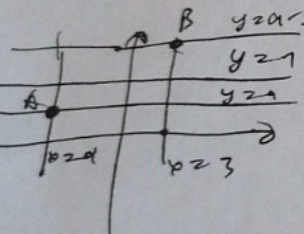
$(y-a)^2 = 0 \Rightarrow y = a \Rightarrow A(a;a)$.

Уравнение B:

выделим полные квадраты и разделим на a^2.

$$\left(y + \left(\frac{2}{a} - a\right)\right)^2 + (x-3)^2 = 5. \Rightarrow B\left(3; a - \frac{2}{a}\right).$$

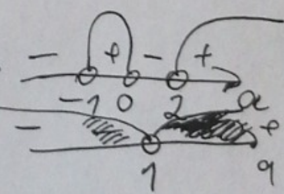
I. $a < 1$.



A лежит ниже $y = 1 \Rightarrow$ B должно лежать выше $y = 1$.

$$\begin{cases} a < 1 \\ a - \frac{2}{a} > 1. \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2 - a - 2}{a} > 0.$$

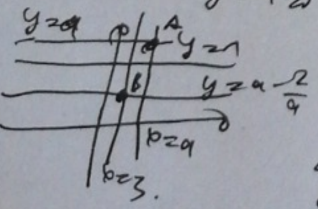
$$\frac{(a-2)(a+1)}{a} > 0$$



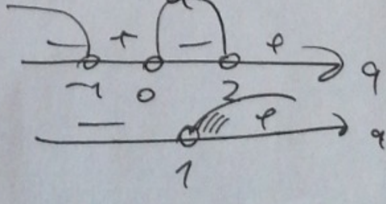
$a \in (-1, 0)$.

II. $a > 1$

A лежит выше $y = 1 \Rightarrow$ B должно лежать ниже $y = 1$



$$\begin{cases} a > 1 \\ a - \frac{2}{a} < 1. \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2 - a - 2}{a} < 0 \Rightarrow \frac{(a-2)(a+1)}{a} < 0$$



$a \in (1, 2)$

Ответ: $a \in (-1, 0) \cup (1, 2)$.

211006738 (U368501 M1276686)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006738**

ID профиля: **368501**

Вариант 15

Чистовик

4. $\begin{cases} 3x^2+3y^2 - x^2y^2 = 3 \\ x^4+y^4 - x^2y^2 = 31. \end{cases}$

Пусть $u = x^2+y^2 \quad v = x^2y^2.$

$\Downarrow$

$\begin{cases} 3u - v = 3. \ |\cdot 3 \\ u^2 - 3v = 31 \end{cases} \Big| - \Rightarrow u^2 - 9u - 22 = 0$

$\left[\begin{array}{l} u = 11 \overset{\Rightarrow v = 30}{\Rightarrow} \begin{cases} x^2+y^2 = 11 \\ x^2y^2 = 30. \end{cases} \\ u = -2 \end{array}\right.$

$x^2+y^2 = -2 \ \varnothing$

$\Downarrow$

По обратной теореме Виета x^2, y^2 — корни

Ответ:

$(-\sqrt{5}; \sqrt{6}); (-\sqrt{5}, -\sqrt{6});$
$(\sqrt{5}, \sqrt{6}); (\sqrt{5}, -\sqrt{6});$
$(\sqrt{6}; \sqrt{5}); (\sqrt{6}; -\sqrt{5});$
$(-\sqrt{6}; \sqrt{5}); (-\sqrt{6}, -\sqrt{5}).$

$\Leftarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 5 \\ y^2 = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 6 \\ y^2 = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftarrow t^2 - 11t + 30 = 0$

211006738 (U368501 M1276687)

Чистовик. (2)

5. Количество карточек с дублем — 20 (20 чисел, на дубле с обеих сторон одно число).

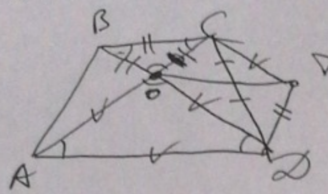
При выборе другой карточки
Нам подходят только те карточки,
На которых нет чисел у дубля
19 чисел с одной стороны, 19 — с другой
19 · 19 = 361 вариант выбрать другую карточку.
По правилу произведения общее число способов — выбрать такую пару
20 · 361 = 7220 способов.

Ответ: 7220 способов.

211006738 (U368501 M1276687)

6. Чистовик

3



1) Из равенства $\triangle BDA = \triangle CAD$ (по II признаку) и $\angle CBD = \angle CDA$ ⇒ ABCD — равнобедренная трапеция.

По признаку параллелограмма (диагонали деляться точкой пересечения пополам).

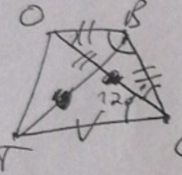
OCTD — параллелограмм

⇓

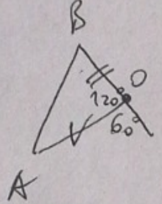
$TD \parallel AC$

$CT \parallel BD$.

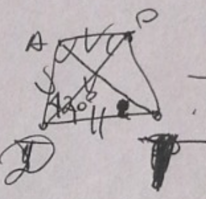
⇓



,



,



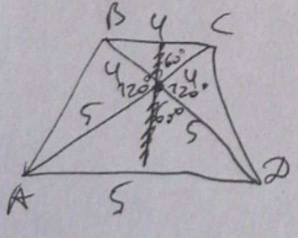
— AT лежит в треугольнике со сторонами, обозначенными как ∥ и V напротив угла в 120°.

Из рисунков видно, что $\triangle TBC = \triangle ABO = \triangle ATD$ (по I признаку)

⇓

$AT = BT = AB$ ⇒ $\triangle ABT$ — равносторонний

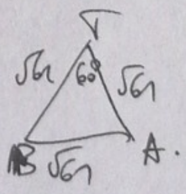
2)



$$S_{ABCD} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}.$$

По теореме косинусов

$$AB = BT = CT = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{61}.$$



⇓

$$S_{ABT} = \frac{\sqrt{61} \cdot \sqrt{61} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{61\sqrt{3}}{4}. \Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{81}{61}.$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{81}{61}$.

211006738 (U368501 M1276687)