Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006143**

ID профиля: **183665**

Вариант 15

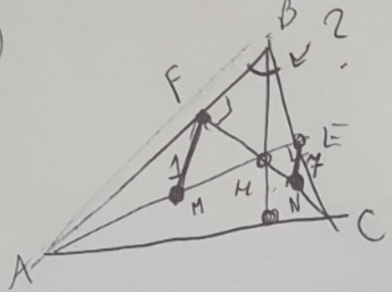
Черновик

№1

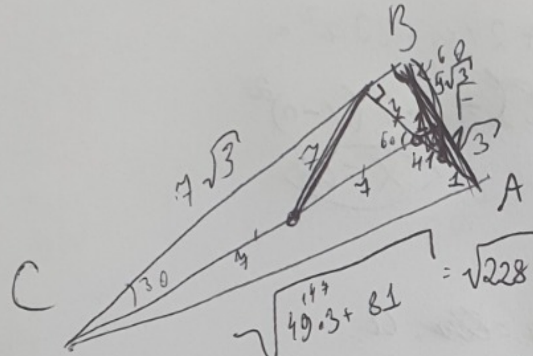
$\angle ABC = 60^\circ$

S_{ABC}.

$R = ?$



$7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\sqrt{49\cdot 3 + 81} = \sqrt{228} = 2\cdot\sqrt{57} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}$

$\frac{1}{2}\cdot\sin(\alpha)\cdot 6\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot 3 = \frac{63\sqrt{3}}{2}$

~~Дост.~~

$\frac{CA}{\sin(60)} = 2R$

$\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{19}$

№2

нат. $a, b \in N$

$31a + \Sigma = 581$

$16b + \Sigma = 581$

$31a = 16b = 496x$, $x \in N$

$a \,\vdots\, 16$

$b \,\vdots\, 31$

992
$\cdot 2$

$16\cdot 31 = 310 + 186 = 496.$

Если $x \geq 2$, то $31a > 581$ – неуд.

$a = 16$
$b = 31$

$\Sigma = 85$

$85 - 47 = 38.$

$17 + 18 = 35.$

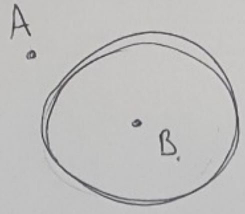
16, 17 + 21, 31

16, 18 + 20, 31.

№3.

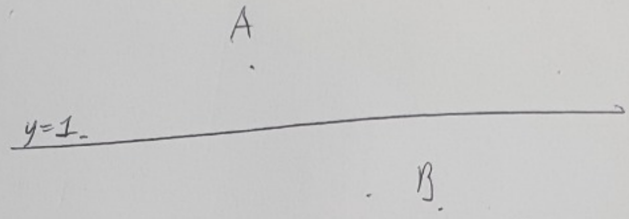
Черновик

$$5a^2-6ax_1-4ay_1+2x_1^2+2x_1y_1+y_1^2=0.$$



$$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0$$
— окружность.

Все значения a



$$2x^2+(2y-6a)x+y^2-4ay+5a^2$$

$$5a^2+(-6x-4y)a+2x^2+(x+y)^2=0$$

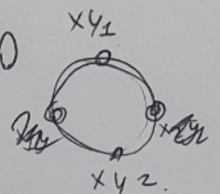
$$D=36x^2+48xy+16y^2-40x^2-20(x+y)^2$$

$$\frac{\pm\sqrt{D}}{10}$$

Если $y=0$, то $5a^2-6ax+2x^2=0$. Если $y\neq 0$.

$a=0$ $y=0$ - окруж.

$a=1$ $x^2+y^2-6x-2y+4y+5=0$



$$\cancel{x_1^2-6x_1+5=x_2^2-6x_2+5}$$

$$y_1^2+2y_1=y_2^2+2y_2$$

$$(y_1+2)y_1=(y_2+2)y_2.$$

$$a^2y_1^2-2a^3y_1+4ay_1=a^2y_2^2-2a^3y_2+4ay_2$$

$$a^2\cdot y_1\left(y_1-2a+\frac{4}{a}\right)=a^2\cdot y_2\left(y_2-2a+\frac{4}{a}\right)$$

$y_2=-y_1-2$ $\quad y_1=-y_2+2a-\frac{4}{a}$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=a-\frac{2}{a}$$

Черновик

№3

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$.

$y^2+(2x-4a)y+2x^2-6ax+5a^2=0$

$D=4x^2-16xa+16a^2-8x^2+24ax-20a^2=$

$-4x^2+8ax-4a^2=-4(x-a)^2$

$x=a$

$\frac{-2x+4a}{2}=2a-1a=a$.

При каких a

$a<1<a-\frac{2}{a}$

$-\frac{2}{a}>0 \Rightarrow a<0$

$a^2-2<a$

$a^2-a-2<0$

$-2<a<2$

$-2<a<0$

$a\in(-2;0)\cup(1,2)$

[illegible]

$a>0$

$a>1>a-\frac{2}{a}$

$a^2>a>a^2-2$

$a>1$

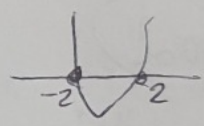
$\Downarrow$

$0>a^2-a-2$

$D=1+8=9$

$\frac{1\pm3}{2}$

2 и −2.



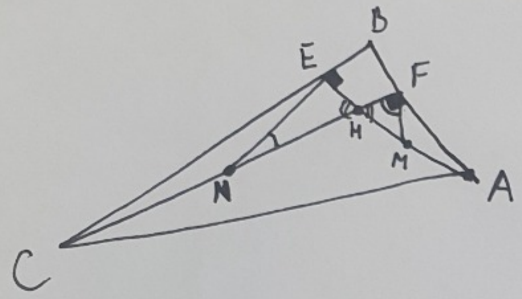
$-2<a<2$

$a>1$

$1<a<2$

Задача №1.

Чистовик.



Поскольку NE и FM – медианы в прямоугольных треугольниках ~~[illegible]~~ CEH и HFA соответственно, то $CN = NH = NE = 7$ и $HM = MA = FM = 1$.
Углы EHN и FHM равны, как вертикальные. Поскольку $NE \parallel FM$, то $\angle ENH = \angle HFM$, и следовательно $\triangle NEH \sim \triangle FMH$ и $\frac{NH}{HF} = \frac{EH}{HM} = \frac{EN}{FM} = \frac{7}{1}$, из чего получаем, что $EH = 7$ и $HF = 1$. Тогда $NE = EH = NH$, и значит $\triangle NEH$ – равносторонний, и $\angle CBA = 90° - \angle BCF = \angle EHN = 60°$.

$CE = CH \cdot \sin(60°) = 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

$FA = AH \cdot \sin(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$BF = \frac{CF}{tg(60°)} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

$BE = \frac{AE}{tg(60°)} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

$CA = \sqrt{CE^2 + EA^2} = \sqrt{(7\sqrt{3})^2 + 81} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{19}$

$CB = CE + EB = 10\sqrt{3}$

$BA = BF + FA = 6\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin(\angle CBA) \cdot CB \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 60 \cdot 3 = 45\sqrt{3}$.

По теореме синусов,

$\frac{CA}{\sin(\angle CBA)} = 2R \Rightarrow R = \frac{CA}{2\sin(\angle CBA)} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{19}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{19}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$

$S_{ABC} = 45\sqrt{3}$

$R = 2\sqrt{19}$

211006143 (U183665 M1276900)

Чистовик.

Задача №2.

Пусть C – сумма всех чисел на доске. $a, b, c, d \in \mathbb{N}$

Тогда $\begin{cases} 31a + C = 581 \\ 16b + C = 581. \end{cases}$

$31a = 16b$

$a \vdots 16$

$b \vdots 31.$

Пусть $31a = 16 \cdot 31 \cdot d.$

Заметим, что т.к. $a \in \mathbb{N}$ и $a \vdots 16$, то $d \in \mathbb{N}.$

Если $d \geq 2$, то $31a \geq 992$, что не может быть, т.к. $31a < 581.$

Следовательно, $d = 1$, $a = 16$, $b = 31$, $c = 85$, $C - a - b = 38.$

Очевидно, что представить 38 в виде суммы натуральных чисел ~~[illegible]~~ (каждое из которых больше 16 и меньше 31) можно лишь двумя способами: $17+21$ и $18+20$.

Ответ: На доске можно было написать 16, 17, 21, 31 или 16, 18, 20, 31.

Чистовик.

Задача №3.

1. Заметим, что $a \neq 0$, иначе уравнение окружности ~~~~ становится $4=0$ – неуд.
2. Рассмотрим уравнение точки A и выразим величину y_A через x_A и a.

$$y_A^2 + (2x_A - 4a)y_A + 2x_A^2 - 6ax_A + 5a^2 = 0$$

$$D = 4x_A^2 - 16x_A a + 16a^2 - 8x_A^2 + 24ax_A - 20a^2 = -4(x_A - a)^2.$$

Т.к. $D \geqslant 0$, то $(x_A - a)^2 = 0$ и $x_A = a$. Тогда

$$y_A = \frac{-2x_A + 4a \pm \sqrt{D}}{2} = -a + 2a = a.$$

3. Рассмотрим уравнение окружности. Найдем, чему равно $\frac{y_1 + y_2}{2}$ (см. рис. 2)

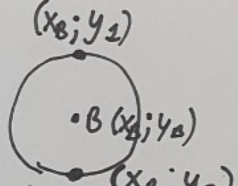


Рис. 2.

$$\begin{cases} a^2 x_B^2 + a^2 y_1^2 - 6a^2 x_B - 2a^3 y_1 + 4ay_1 + a^4 + 4 = 0 \\ a^2 x_B + a^2 y_2^2 - 6a^2 x_B - 2a^3 y_2 + 4ay_2 + a^4 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$a^2 y_1^2 - 2a^3 y_1 + 4ay_1 = a^2 y_2^2 - 2a^3 y_2 + 4ay_2$$

$y_1\left(y_1 - 2a + \frac{4}{a}\right) = \left(y_2 - 2a + \frac{4}{a}\right) \cdot y_2$. – Такое возможно лишь если $y_1 = -\left(y_2 - 2a + \frac{4}{a}\right)$.

$$y_B = \frac{y_1 + y_2}{2} = a - \frac{2}{a}.$$

4. Если $y_A < 1 < y_B$, т.е. $a < 1 < a - \frac{2}{a}$

$$\begin{cases} a < a - \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \\ \begin{cases} a < 0 \\ a < a - \frac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow a^2 - 2 < a \Rightarrow a^2 - a - 2 < 0 \Rightarrow -2 < a < 2. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$-2 < a < 0$

5. Если $y_B < 1 < y_A$, т.е. $a > 1 > a - \frac{2}{a}$

$$\begin{cases} a > 1 \\ \begin{cases} a > 1 \\ a > a - \frac{2}{a} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a > a^2 - 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 < 0 \Rightarrow -2 < a < 2$$

$\Downarrow$

$1 < a < 2.$

Ответ: $a \in (-2; 0) \cup (1, 2)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006143**

ID профиля: **183665**

Вариант 15

Чистовик 1

Задача 1.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$3x^2+3y^2-x^2y^2=3$

$3x^2+3y^2=3+x^2y^2$

$9x^4+18x^2y^2+9y^4=x^4y^4+6x^2y^2+9$

$9(x^4+y^4-x^2y^2)+27x^2y^2=x^4y^4+6x^2y^2+9$

$9\cdot31+27x^2y^2=x^4y^4+6x^2y^2+9$

$x^4y^4-21x^2y^2-9\cdot30=0$

$D=9\cdot49+4\cdot9\cdot30$

$D=39^2$

$x^2y^2=\frac{21\pm39}{2} \Rightarrow x^2y^2=30$, т.к. $x^2y^2\neq-9$, т.к. $x^2y^2\geqslant0$

$3x^2+3y^2-x^2y^2=3$

$3x^2+3y^2-30=3$

$x^2+y^2=11$

$y^2=11-x^2$

$x^2y^2=(11-x^2)x^2$

$30=(11-x^2)x^2$

$x^4-11x^2+30=0$

$D=121-120$

$x^2=\frac{11\pm1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=5 \\ y^2=11-x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=6 \\ y^2=11-x^2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=5 \\ y^2=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=6 \\ y^2=5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-6;-5)$; $(-6;5)$; $(-5;-6)$; $(-5;6)$; $(5;-6)$; $(5;6)$; $(6;-5)$; $(6;5)$.

1

Чистовик 2.

Задача 2.

Случай 1. Фокусник берет ровно один дубль.

Для этого нам нужно выбрать 3 различных числа - одно на карту-дубль, одно на красную сторону карты, не являющейся дублем, и одно на синюю сторону той же карты. Порядок имеет значение. ~~Значит~~, Таким образом у нас есть $20 \cdot 19 \cdot 18$ вариантов выбора карт.

Случай 2. Фокусник берет ровно два дубля.

Для этого нам нужно выбрать 2 числа - по одному на каждую карту. Порядок выбора значения не имеет. Значит, есть $\frac{20 \cdot 19}{2!}$ способов.

$$20 \cdot 19 \cdot 18 + \frac{20 \cdot 19}{2} = 6840 + 190 = 7030.$$

Ответ: 7030 способов.

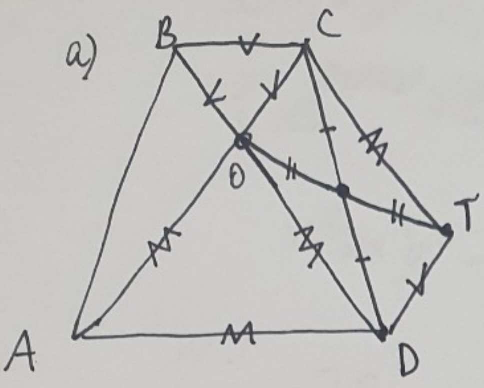
2

211006143 (U183665 M1276901)

Чистовик 3.

Задача №3.

а)



Заметим, что OCTD - параллелограмм (поскольку его диагонали делят друг друга пополам). Следовательно, $TD \parallel CO$, и $\angle OCT = \angle ODT = \angle BOC = 60°$. Следовательно, $\triangle BCA = \triangle BDT$ и $\triangle BDA = \triangle ACT$, поскольку $\angle BCA = \angle BDT = 60°$, $BC = TD$, $AC = BD$, $\angle ACT = \angle BDA = 60°$, $BD = AC$, $AD = CT$.

Из этого следует, что $AB = BT$ и $AB = AT$. - ■

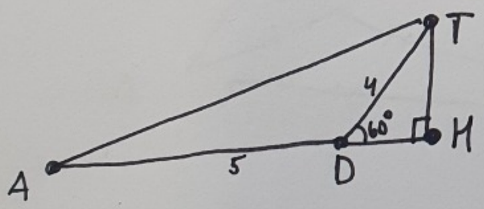
б)

$$S_{BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$$

$$S_{AOD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5^2 = \frac{25}{4}\sqrt{3}$$

$$S_{CTD} = S_{COD} = S_{BOA} = S_{ABC} - S_{BOC} = \frac{\frac{9}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4}{2} - 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$S_{BCT} = S_{ADT} = S_{ATH} - S_{DTH} = \frac{4 \cdot \sin(60) \cdot (5 + 4 \cdot \cos(60)) - 4 \cdot \sin(60) \cdot 4 \cdot \cos(60)}{2} =$$



$$= \frac{14\sqrt{3} - \cancel{\ } \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}!$$

$$S_{ABT} = S_{ABCTD} - \cancel{2} S_{BCT} - S_{ADT} = S_{BOC} + S_{AOD} + 3S_{COD} - 2S_{BCT}$$

$$= 4\sqrt{3} + \frac{25}{4}\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 15{,}25 \cdot \sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + 2S_{COD} = 4\sqrt{3} + \frac{25}{4}\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 20{,}25\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{15{,}25 \cdot \sqrt{3}}{20{,}25 \cdot \sqrt{3}} = \frac{61}{81}$$

Ответ: 61:81.

3

Черновик.

№1.

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-x^2y^2=3\\ x^4+y^4-x^2y^2=31\end{cases}$$

$x \geq y$

$3(y^2-1)+(3x^2-x^2y^2)=0$

$\cancel{x^4-x^2y^2=(x^2-xy)(x^2+xy)}$

$2\cdot 4^2$

$x^4+y^4-x^2y^2+1=32.$

$x^2(x^2-y^2)+y^4+1=32.$

$(x^2-xy)(x^2+xy)+y^4-1=30$

$x^2(1-y)(1+y)+(y^2-1)(y^2+1)$

$(1-y^2)(x^2-y^2-1)=30$

$30x^2+30y^2=x^4+y^4-1$

x^4-30x^2

$3+x^2y^2$

$9+6x^2y^2+x^4y^4=9x^4+9x^4+18x^2y^2$

$=9\cdot 31+27x^2y^2$

$9\cdot 30.$

$x^4y^4-21x^2y^2-\cancel{22}=0$

$9\cdot 49+4\cdot 9\cdot 30$

$\cancel{D=21^2+4\cdot 22.}$

$9\cdot 169$ 13^2

$D=39^2$

$\cancel{x^2y^2=22}$

$\frac{21\pm 39}{2}$

$\boxed{x^2y^2=60}$

$3x^2+3y^2=3$

$x^4+y^4=53.$

$x^2+y^2=21$

$x^2=21-y^2$

$(y^2-21)\cdot y^2=60$

17. 227.

$x^2=\frac{25}{3}-y^2$

$y^4-21y^2+60=0$

$D=3\cdot 49\cdot 3-3\cdot 80.$ 147

$\frac{21\pm\sqrt{67}}{2}$

$\left(\frac{25}{3}-y^2\right)\cdot y^2=22$

121-120

$3y^4-\frac{25}{3}y^2+66=0$

5шаб.

$625-66\cdot 12.$

211006143 (U183665 M1276901)

Черновик.

№1.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$x^4+y^4-3x^2-3y^2-28=0$

$x^4-3x^2+2{,}25+y^4-3y^2+2{,}25=28+4{,}5.$

№2. 20^2 $\boxed{К}$ $\boxed{С}$ $\boxed{Д}$ $\boxed{Д}$

$\frac{20\cdot19}{2!}=190$

$\boxed{Д}$ $\boxed{К}$ $\boxed{С}$

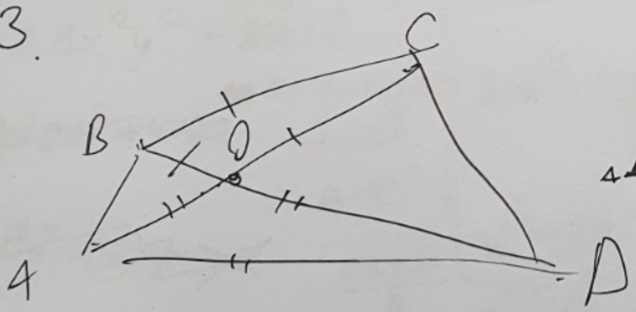
$20\cdot19\cdot18=6840$

$\frac{4\cdot2\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$S_{ABCTD}=S_{BOC}+S_{AOD}+2S_{ABO}+S_{ABO}$

$\frac{5\cdot2{,}5\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{4}$

№3.

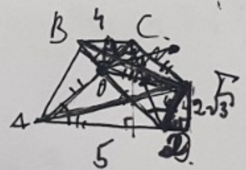


$\triangle ACB=\triangle DT$

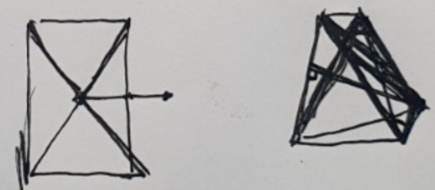
$AB=BT$

$\triangle CAD=\triangle ACT$

$CD=AT$



$\frac{\frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot4}{2}$

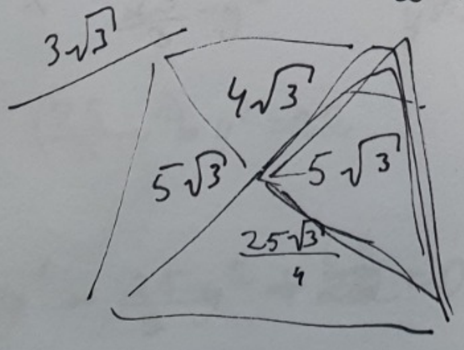


$S_{ABT}=S_{ABCTD}-2S_{ATM}$

$S_{ABCTD}-2\left(\frac{7\cdot2\sqrt{3}}{2}-\frac{2\cdot2\sqrt{3}}{2}\right)$

$10\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}$



$3\sqrt{3}$

$-18.$ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$

$\frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}\cdot4}{2}$

$36.$ 61

$9\cdot4+25$

$14\cdot4=56+25$

81

211006143 (U183665 M1276901)