Часть 1

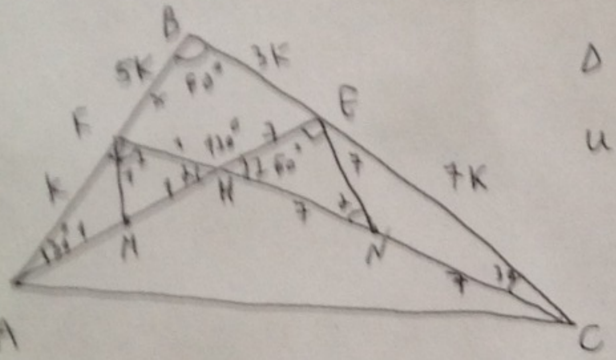
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006104**

ID профиля: **215575**

Вариант 15

Задача N 1



ΔHEC и ΔAFH – прямоугольные

и FM и EN – медианы $\Rightarrow$

$AM = MH = FM = 1$ и

$CN = NH = EN = 7$

$EN \parallel FM \Rightarrow \angle MFH = \angle HNF = 2$, тогда $\angle FHM =$

$= \angle MFH$ (в равн. ΔMFH) Значит ΔHNF – равносторонний

и аналогично ΔMFH тоже Значит $\angle FHA = \angle EHC = 60^\circ$

Тогда $\angle FAH = \angle ECH = 30^\circ$

Из четырехугольника $BFHE$ $\angle ABC = 180^\circ - \angle FHE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Пусть $AF = K$, тогда $EC = 7K$, так как $\Delta AFH \sim HEC$ с

коэф. $= 7$ (из ΔBFC)

Пусть $FB = x$, тогда $BC = 2x \Rightarrow BE = 2x - 7K$

$FB = 5K$

Аналогично $AB = 4x - 14K$ Значит $4x - 15K = x \Rightarrow x = 5K$

и $BE = 3K$

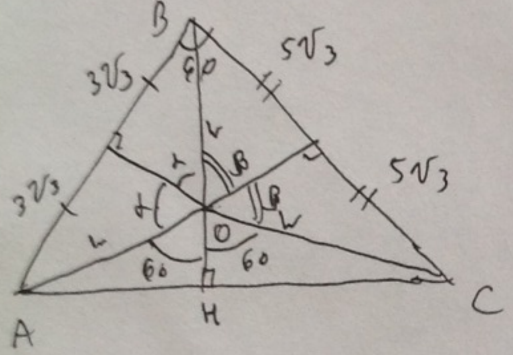
Из ΔAFH $K^2 + 1 = 2^2$ $K = \sqrt{3}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{6K \cdot FC}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 15}{2} = 45\sqrt{3}$

Из ΔAFC: $AC^2 = \sqrt{3}^2 + 15^2 = 228$ $AC = \sqrt{228} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{76}$

Найдем теперь радиус описанной окружности:

Проведем ср. перпенд. и найдем W



$\alpha + \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120$

Значит $\angle AOC = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta = 120^\circ$

Тогда $OH = \frac{W}{2}$ (из $\triangle AOH$ и $\triangle OHC$)

Из них же получаем $AH = HC = \frac{W\sqrt{3}}{2}$

Значит $AC = 2AH = W\sqrt{3}$

Так как $AC = \sqrt{76} \cdot \sqrt{3}$, то $W = \sqrt{76}$, что и нужно было найти

Ответ: $S_{ABC} = 45\sqrt{3}$ $W = \sqrt{76}$ $\angle ABC = 60^\circ$

Задача №2

Пусть наши числа это:

$x \; y \; z \; w \ldots a$, по условию

$x+y+z+w+\ldots+17a = 32x+y+z+w+\ldots+a = 581$

Тогда $16a-31x=0 \Rightarrow 16a=31x$

$a=\frac{31}{16}x$ 31 взаимно просто с 16, поэтому

$x=16, 32, 48 \ldots$

~~Если $x>32$~~

Если $x \geq 32$, то $32 \cdot 32 > 581$

Значит $x=16$ и $a=31$

$31 \cdot 17 = 527$ $581-527=54$

$54-x=54-16=38$

Значит сумма всех остальных чисел кроме 31 и 16 равна 38

$20+19=39>38$ числа должны быть >16, так как

$19+18=37<38$ оно минимальное.

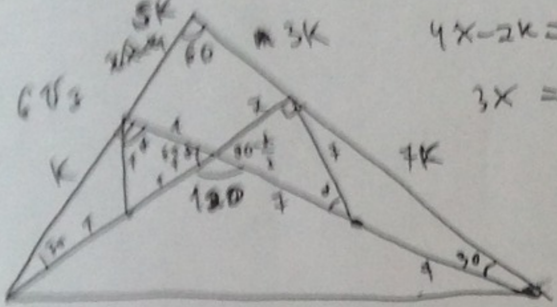
Значит всего 2 числа, так как сумма 3 чисел ≥ 16 будет >38.

Перебором найдем подходящие числа 20 и 18 или 21 и 17

Докажем, что других нет:

$18+19=37$, а $19+20=39$ Если взять число >21, то второе будет меньше 17 и следовательно и ≤ 16, но так нельзя. Если же макс. число будет <20, то второе макс. 18, но $18+19<38$

Ответ: 2 набора: 16, 17, 21, 31 или 16, 18, 20, 31

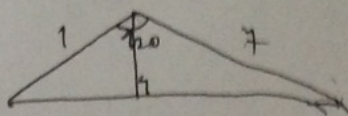


$4x-2k=7k+x$

$3x=9k$

$x=3k$

$k=\sqrt{3}$



$\frac{10\sqrt{3}\cdot 9}{2}$

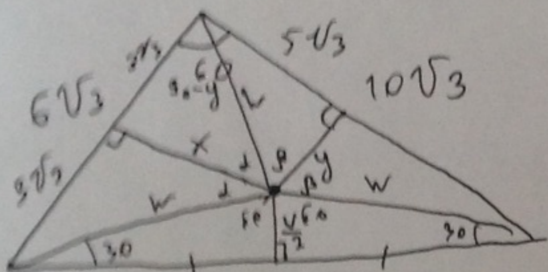
17 19

20 18

21 17

38

$\frac{6\sqrt{3}\cdot 15}{2}=45\sqrt{3}$



$\frac{w\sqrt{3}}{2}$

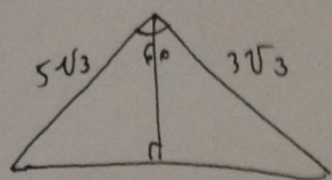
$27+x^2=w$

$75+y^2=w$

$y^2-x^2=47$

$y-x$

$w\sqrt{3}$



$49\cdot 3=$

$81+147=228 \quad :3=76$

$3+225=228$

$76\sqrt{3}$

$\sqrt{228}=\sqrt{76}\cdot\sqrt{3}$

$w=\sqrt{76}$

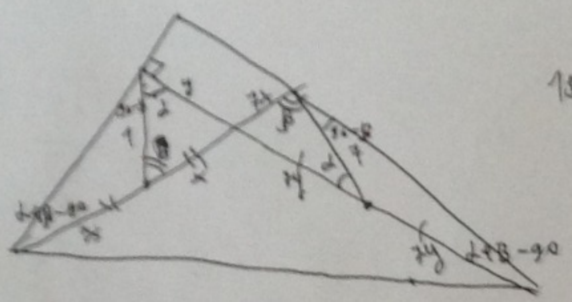
$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0 \quad y>1$

$5a^2-6ax-4a$

$x^2+(x+y)^2=0$

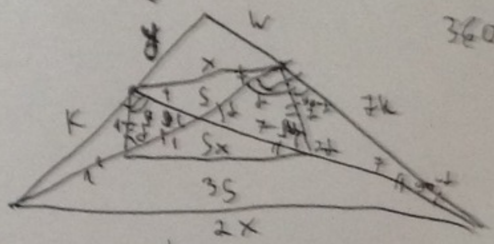
$x=0 \quad y=0$

$ax^2+by^2=c^2$



$180+\alpha+\beta+2\alpha+2\beta-180=3\alpha+3\beta=6\alpha$

$\frac{2x}{14y}=\frac{y}{7k}$ $\quad x=y$



$360-6\alpha=180-2\alpha$

$360-4\alpha=180$

$\alpha=45$

$k\cdot 15$

$5a^2+(-6x-4y)\cdot a+2x^2+2xy+y^2=0$

$5a^2+x^2+(x+y)^2=a\cdot(6x+4y)$

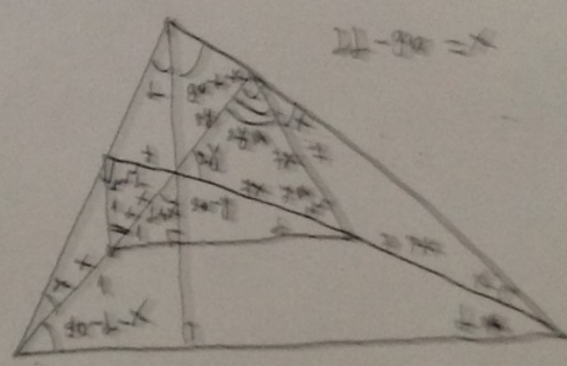
$(a^2x^2-4a^2x+4a^2)=(ax-2a)^2$ $\quad -4a^2$

$a^2\cdot(x-2)^2$

$a^4-4a^2+4=(a^2-2)^2$

$a^2\cdot(x-2)^2+(a^2-2)^2$ $\quad 21k+3w=5k+5y$ $\quad 90+x=180-2\alpha$ $\quad 2\alpha-90$

$2\alpha-90=x$



$a^2y^2-2a^2x-2a^3y+4ay$

$a\cdot(ay^2-2ax-2a^2y+4y)$

$a^2y^2-2a^3y$ $\quad 48k$

$90-x$ $\quad x=90-2\beta$

$(7k+w)\cdot 9=(k+y)\cdot 15$ $\quad \angle ABC=2\beta$

$63k+9w=15k+15y$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006104**

ID профиля: **215575**

Вариант 15

Чистовик 1

Задача 4

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases} \quad \Big| \cdot 3 \qquad \begin{cases} 9\cdot(x^2+y^2)-3x^2y^2=9 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=31 \end{cases}$$

Вычтем из второго первое:

$(x^2+y^2)\cdot(x^2+y^2-9)=22$

Пусть $x^2+y^2=a$, тогда $a^2-9a=22$

$a^2-9a-22=0$ $\quad D=81+88=169$

$a_{1,2}=\frac{9\pm13}{2}=\left[\begin{array}{l}11 \\ -2\end{array}\right.$ – не подходит, так как $x^2+y^2\geq0$

Значит $x^2+y^2=11$ $\qquad x^2y^2=30 \qquad x^4+y^4=30+31=61$

$3\cdot(x^2+y^2)-x^2y^2=3 \qquad 33-x^2y^2=3$

$y^2=11-x^2$

$x^4+y^4=x^4+121-22x^2+x^4=61$

$2x^4-22x^2=-60$

$x^4-11x^2+30=0$ $\quad$ Пусть $x^2=b$, тогда

$b^2-11b+30=0$ $\quad D=121-120=1$ $\quad b_{1,2}=\frac{11\pm1}{2}=\left[\begin{array}{l}6 \\ 5\end{array}\right.$

Значит $x^2=6$ или $x^2=5$

Если $x^2=6$ $\quad y^2=5$ $\quad x=\pm\sqrt6$ $\quad y=\pm\sqrt5$

Если $x^2=5$, $\quad y^2=6$ $\quad x=\pm\sqrt5$ $\quad y=\pm\sqrt6$

Ответ: $\sqrt6;\sqrt5$, $\sqrt6;-\sqrt5$, $-\sqrt6;\sqrt5$, $-\sqrt6;-\sqrt5$,

$\sqrt5;\sqrt6$, $\sqrt5;-\sqrt6$, $-\sqrt5;\sqrt6$, $-\sqrt5;-\sqrt6$.

Чистовик 2

Задача 5

Посчитаем для начала макс. кол-во различных таких карточек:

Оно равно $20 \cdot 20 = 20^2$ =) .

У нас в наборе есть все 20 дублей и все ост. возможные карточки.

Посчитаем кол-во способов для одного уже выбранного дубля:

Из оставш. 20^2-1 карточки нельзя брать 19 карточек, на которых есть наше число с дубля. Также пока что не будем брать другие дубли: их 19.

$20^2-1-38=\underline{20^2-39}$

$\underline{(20^2-39)\cdot 20}$ – кол-во способов с 1-м дублем и второй карточкой строго не дублем

Два дубля: $\frac{20\cdot 19}{2}=\underline{10\cdot 19}$ – способов

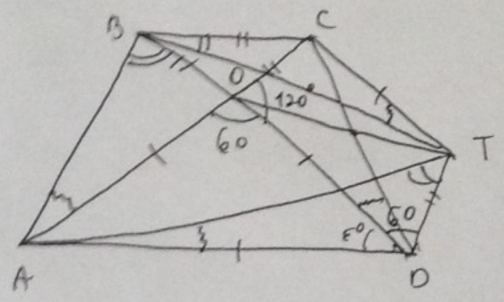
Сложим их: $(20^2-39)\cdot 20+10\cdot 19=10\cdot(20^2\cdot 2-78+19)=$

$=10\cdot(800-59)=10\cdot 741=7410$ – способов всего

Ответ: 7410 способов

Чистовик 3

Задача 6



$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – равност. $\Rightarrow$

$\angle ODA = \angle OBC = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$

$\triangle BDA = \triangle COD \Rightarrow ABCD$ – равноб. трапеция

T симметрична O отн. середины $CD \Rightarrow COTD$ – параллелограмм

$\angle COD = 120^\circ$ (смежный с $\angle AOD$) $\Rightarrow \angle CTD = 120^\circ$

$\triangle COD = \triangle CTD = \triangle ATD = \triangle ABO = \triangle BCT$ (по 2 сторонам и углу 120° между ними)

$\angle BAO = \angle ODC = \angle TAD$ и $\angle ABO = \angle TBC = \angle ATD$

$\angle CTB + \angle ATD = 60^\circ$ (из $\triangle$ (так как в этих треугольниках кроме этих 2 углов ещё угол 120°)

Но $\angle CTD = 120^\circ \Rightarrow \angle BTA = 60^\circ$

$\angle CAT = 60^\circ - \angle TAD$ (из $\triangle AOD$) $\Rightarrow \angle BAT = 60^\circ$

Значит $\triangle ABT$ – равносторонний

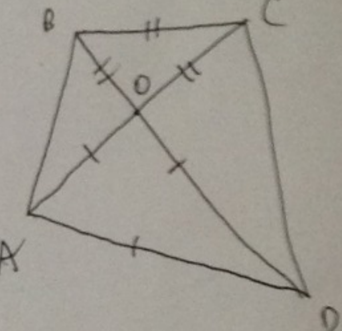
Черновик 1

$3x^2+3y^2-x^2y^2=3$

$x^4+y^4-x^2y^2=31$ $\qquad y^2\cdot(y^2-x^2)=31-x^4$

$y^2\cdot(3-x^2)=3-3x^3$

$x^2\cdot(x^2-3)+y^2\cdot(y^2-3)=28$ $\qquad y=\pm\sqrt{\dfrac{3-3x^3}{3-x^2}}$



$\dfrac{3-3x^3}{3-x^2}\cdot\left(\dfrac{3-3x^3-3x^2+x^4}{3-x^2}\right)=31-x^4$

$4\cdot 1$

$93-3x^4-31x^2+x^6=$ $\qquad 9\cdot 6$

$x^4+3x^2+3y^2-2x^2y^2+y^4=34$

$3-3x^2-3y^2=31-x^4-y^4$

$x^4+3x^2-34=y^2\cdot(2x^2-3-y^2)$

$3-3\cdot(x^2+y^2)=31-(x^2-y^2)(x^2+y^2)-2y^4$

$(x^2-y^2-3)\cdot(x^2+y^2)=28-2y^4$ $\qquad 20^2$

$x^4+x^2y^2-x^2y^2-y^4-3x^2-3y^2=28-2y^4$

$x^4+y^4-3x^2-3y^2=28$

20 $\qquad 20^2 - 2$ $\qquad 20^2-20$

$20\cdot 20=20^2$ $\qquad 20^2-19$

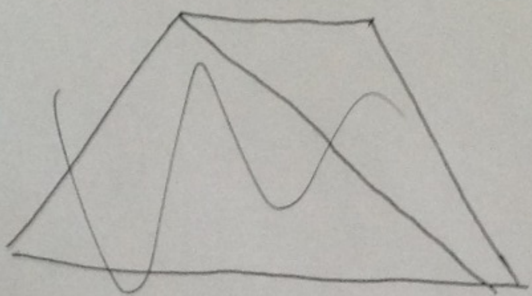
$\dfrac{20\cdot 19}{20^2-1}$

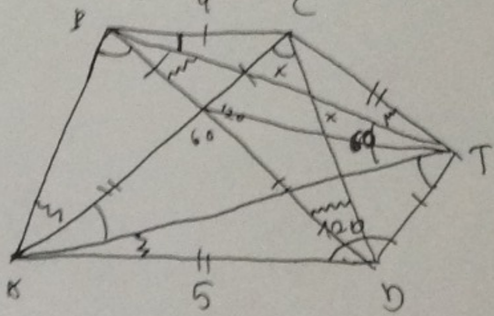
$20\cdot(20^2-20)$ $\qquad 20^2\cdot 19$

$20\cdot 20\cdot 19$

19A

Черновик 2





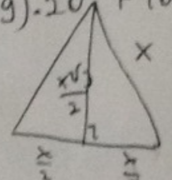
одновр. $x^2+y^2=-2$

$(20^2-39)\cdot 20+10\cdot 19$

$\frac{20\cdot 19}{2}$

$(20^2-39)\cdot 20+10\cdot 19$

20



$\frac{x\cdot x\sqrt{3}}{4}$

$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

$20^3-20\cdot 39+10\cdot 19$

$20^2-1-19-19=20^2-39$

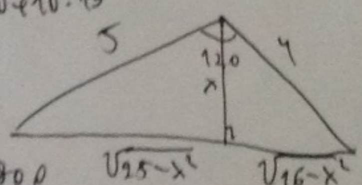
$361\cdot 20+10\cdot 19$

$20^3-10\cdot(78-19)$

$10\cdot($

20^3

$20^3-10\cdot 59$

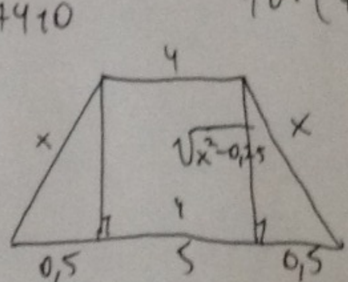


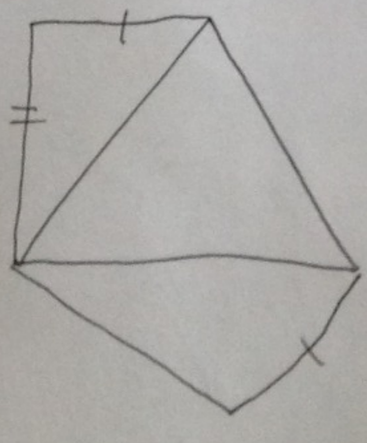
$20^2\cdot 2=800$

$10\cdot(800-59)=10\cdot 741=7410$

$10\cdot(722+19)=$

$=10\cdot(741)$





$4,5\cdot\sqrt{x^2-0,25}$

$4,5\cdot\sqrt{(x-0,5)\cdot(x+0,5)}$

$>4,5$ $>5,5$