Часть 1

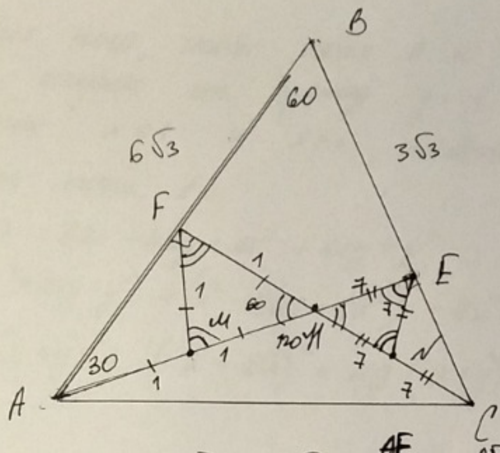
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005786**

ID профиля: **364242**

Вариант 15

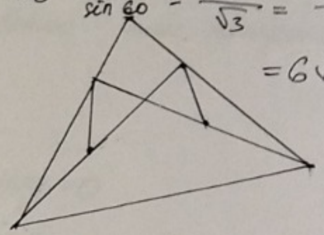
Черновик, Лист №2



$\sin 60 = \frac{AE}{AB}$

$AB = \frac{AE}{\sin 60} = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3}$

$= 6\sqrt{3}$

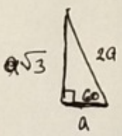


$AE = 9 \Rightarrow BE = \frac{AE}{\sqrt{3}} = \frac{AE\sqrt{3}}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 15 = 45\sqrt{3}$

По т. косинусов для $\triangle AHC$:

$AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2\, AH \cdot HC \cdot \cos 120°$ $(AH = 2;\ HC = 14)$



$\Rightarrow \cos 60° = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 120° = -\frac{1}{2}$; $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AC^2 = 4 + 196 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 14$

$AC^2 = 200 + 28 \Rightarrow 228$

$AC = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}$

$228 : 4 = 57$ (-228, 20, -28, 28) $57 : 3 = 19$ (-57, 3, 27, 27)

$2R = \frac{AC}{\sin 60}$

$2R = \frac{2\sqrt{57}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3 \cdot 19}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{19} \Rightarrow R = 2\sqrt{19}$

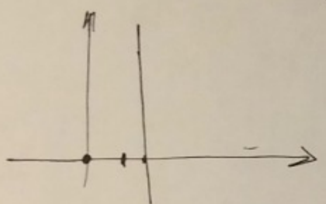
211005786 (U364242 M1274310)

№3 Черновик, лист №3

$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$ (A)

$(x^2+2xy+y^2)+x^2-6ax+9a^2-4a^2-4ay$

чтобы это было так, нужно, чтобы

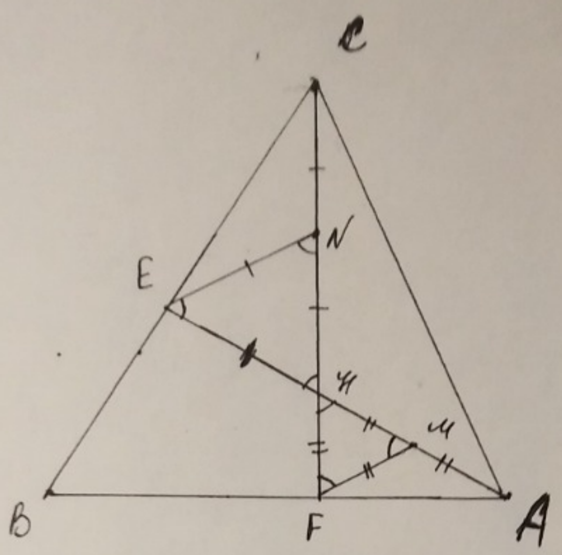


$(a^4-2a^3y+a^2y^2)$ 5

$a^2x^2-6a^2x+$

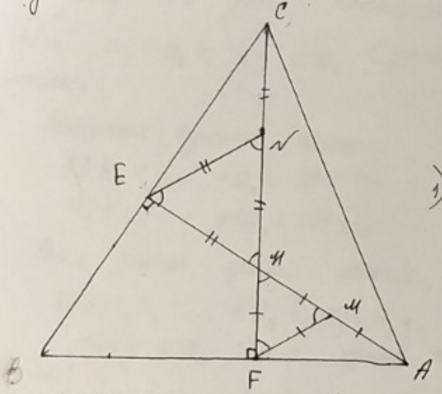
$y^2+2xy+2x^2-4ay$

Черновик, лист №4



Чистовик, лист №1

Задача №1



Дано: CF и AE – высоты, $HM = MA$, $CN = NH$, $FM = 1$, $EN = 7$, $FM \parallel EN$

Найти: $\angle ABC$, $S_{\Delta ABC}$ и R

Решение:

1) ΔCEH и ΔAHF – прямоугольн. MF и EN – медианы, проведённые к гипотенузам AH и CH, соответственно $\Rightarrow EN = CN = NH$ и $MF = HM = MA$ (по свойству медианы прямоуг. Δ, проведённой к гипотенузе)

2) $\angle EMF = \angle NEM$ ($EN \parallel FM$ (по условию); EM – секущая $\Rightarrow$ это н/л углы)

3) $\angle NEH = \angle NHE = \angle MHF$ (ΔENH – р/б и $\angle EHN = \angle MHF$, т.к они вертикальные)

4) $\angle MHF = \angle MFH = \angle HNE$ (ΔHMF – р/б и $\angle MFH = \angle HNE$, т.к они н/л при $EN \parallel FM$)

5) В ΔENH и ΔMFH все углы равны $\Rightarrow$ они р/с

6) В прямоуг. ΔCEH и ΔAHF – катет равен половине гипотенузы ($EH = \frac{1}{2} CH$ и $HF = \frac{1}{2} AH$) $\Rightarrow \angle ECH = \angle HAF = 30°$

7) $\angle ABC = 90° - \angle EAB = 90° - 30° = 60°$ (из прямоуг. ΔBEA)

8) $AB = \frac{AE}{\sin \angle ABC} = \frac{AE}{\sin 60°} = \frac{2FM + EH}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ (из прямоуг. ΔABE)

9) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CF = \frac{1}{2} AB \cdot (2EN + FM) = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 15 = 45\sqrt{3}$

10) $\angle CHA = 180° - \angle AHF = 180° - 60° = 120°$ (смежные) – $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

11) По т. косинусов для ΔCHA:
$AC^2 = CH^2 + AH^2 - 2AH \cdot CH \cdot \cos \angle CHA \Rightarrow AC = 2\sqrt{57}$

12) По т. синусов для ΔACB: $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R \Rightarrow \frac{2\sqrt{57}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1}{2} = R \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 2\sqrt{19}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{\Delta ABC} = 45\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{19}$

Чистовик, Лист №2

Задача №2

Пусть на доске написаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, причём $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ (знаки строгие, т.к. все числа различны)

1) Запишем суммы чисел:

$32a_1 + \ldots + a_n = 581$ (1)

$a_1 + \ldots + 17a_n = 581$ (2)

Если равны правые части, значит, равны и левые:

$32a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + 17a_n$

$31a_1 = 16a_n$ (т.к. сумма чисел между a_1 и a_n одна и та же)

НОД $(31; 16) = 1 \Rightarrow a_1 \vdots 16$ и $a_n \vdots 31$ $(a_1, a_n \in \mathbb{N})$

2) Сделаем оценку на максимально возможные a_1 и a_n:

$581 : 17 = 34$ (ост 3) $\Rightarrow a_n < 34$, и т.к. $a_n \vdots 31$, получим, что $a_n = 31$

$581 : 32 = 18$ (ост 5) $\Rightarrow a_1 < 18$, и т.к. $a_1 \vdots 16$, получим, что $a_1 = 16$

3) Найдём сумму остальных чисел на доске (например, из выражения (1))

$32 \cdot 16 + 31 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 581 \Rightarrow a_2 + \ldots + a_{n-1} = 38$

4) Заметим, что $a_2 \neq a_{n-1}$, т.к. тогда $a_2 = 38$, что противоречит $a_{n-1} < a_n$ ($a_2 < a_3$ в данном случае)

Значит, 38 - сумма хотя бы 2-ух чисел.

5) Покажем, что 38 - сумма 2-ух чисел, иначе хотя бы одно число < 13, что противоречит тому, что $a_1 = 16$ - минимальное число на доске

Отсюда $38 = a_2 + a_3$ и $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ $(16 < a_2 < a_3 < 31)$, тогда возможны 2 случая: $a_2 = 17, a_3 = 21$ и $a_2 = 18, a_3 = 20$

Они единственны, т.к при увеличении a_3, уменьшается a_2 $(16 < a_2)$, а при увеличении a_2, либо $a_2 = a_3$, либо $a_2 > a_3$, т.е. нарушается $a_2 < a_3$. Ответ: $(16; 17; 21; 31)$; $(16; 18; 20; 31)$

Задача №3 Чистовик, Лист №3

Для того, чтобы точка A и точка B лежали по разные стороны от прямой $y = 1$, они должны иметь абсциссы $x < 1$ и $x > 1$, соответственно, или наоборот

Для точки A:

$$5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 6ax + 9a^2) - 4a^2 - 4ay = 0$$

$$(x + y)^2 + (x - 3a)^2 = 4a(a + y)$$

Черновик, лист №1

№1

$a_1, a_2 \ldots a_n$

$32a_1 + \ldots + a_n = 581$

$a_1 + \ldots + 17a_n = 581$

$a_1, \ldots a_n \in \mathbb{N}$

при увелич. a_3, уменьш. a_1, при увел. a_1, нарушим.

$a_2 < a_3$

$32a_1 + \ldots + a_n = a_1 + \ldots + a_n \cdot 17$

$31a_1 = 16a_n$

НОД $(31; 16) = 1$

$a_n = 31$; $a_1 = 16$

$581 : 17 = 34$, ост. 3 ($581 - 51 = 71$; $71 - 68 = 3$)

Если $a_n \leq 34$

$a_n \leq 34$

$581 : 32 = 18$ ($581 - 32 = 261$; $261 - 256 = 5$)

$a_1 \leq 18$

581 | 3

$31 \cdot 17 = 527$

31×17: $217 + 31\_ = 527$

$581 - 527 = 54$

$54 - 16 = 38$

$38 = 20 + 18$

$38 = 17 + 21$

32×16

$2^5 \cdot 2^4 = 2^9 = 512$

$581 - 544 = 37$

$59 - 31 = 28$

$+32$

Все числа различны, поэтому, т.к. min 16, a max 31

Либо $a_2 = 18$, $a_3 = 20$; либо $a_2 = 17$, $a_3 = 21$.

16 +

$512 = 32 \cdot 16$

$512 + 31 = 543$

$581 - 543 = 38$

$38 : 3 \Rightarrow \approx 13$

13 +

21 + 1 +

13 +

13 + 13 + 12

14 + 14 + 10

211005786 (U364242 M1274310)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005786**

ID профиля: **364242**

Вариант 15

Черновик, 1

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$\cancel{3x^2+3y^2-4x}$ $\quad x^4+y^4-3x^2-3y^2=28$

$3x^2+3y^2-x^2y^2=3$

$\cancel{3x}$

$3(x^2-1)+3y^2-$

$3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \mid \cdot 3$

$9x^2+9y^2-3x^2y^2=9$

$y^4+x^2-x^2y^2=31$

$y^2+x^2+2x^2y^2-(9x^2+9y^2)=22$

$3x^2+3y^2-x^2y^2=3$

$3x^2+3y^2-x^2y^2=$

$x^2=a,\quad y^2=b$

$3a+3b-ab-3=0$

$\cancel{3}a^2+b^2-ab-31=0$

$x^4+y^4-3x^2-3y^2=28$

$$\begin{array}{r} \times\ 22 \\ 4 \\ \hline 88 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 81 \\ 88 \\ \hline 169 \end{array}$$

$9+13=22$

$25-55+30$

$36-66+30$

$25+36-30$

$25 \quad \cancel{275}$

$\cancel{625}$

$x^4+y^4+2x^2y^2-9(x^2+y^2)=22$

$(x^2+y^2)^2-9(x^2+y^2)=22$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2-9)=22$

211005786 (U364242 M1274311)

Черновик, 2

$(3x^2 + x^2y^2) - (3 - y^2)$

$x^2(3 - y^2) + 3(y^2 - 1) = 0$

$D = 0 - (3 - y^2) \cdot 3(y^2 - 1) \cdot 4 = 12(y^2 - 1)(y^2 - 3)$

Пусть $x^2 = a$,

$3x^2 + 3y^2 - x^2y^2 = 3$

$x^2 = a$, $y^2 = b$

$x^4 + y^4 - x^2y^2 - 31 = 0$

$a^2 + b^2 - ab - 31 = 0$

$x^4 - x^2y^2 + (y^4 - 31) = 0$

$D = y^4 - 4(y^4 - 31) = 124 - 3y^4$

$-\ 3x^2 + 3y^2 - x^2y^2 = 3 \ |\cdot 2$

$x^4 + y^4 - x^2y^2$

$(3 - y^2)(x^2 - 3) = -6$

$+\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 31$

$x^4 + y^4 - x^2y^2 + (3 - y^2)$

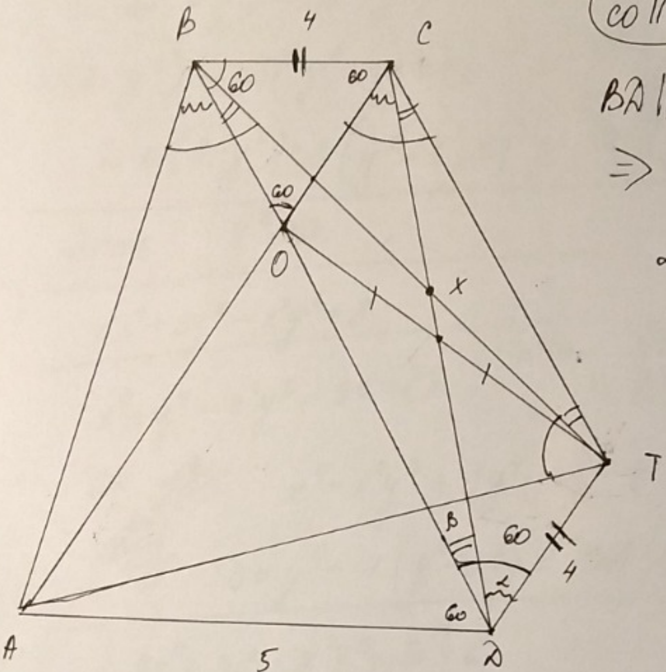
211005786 (U364242 M1274311)

Черновик. 3

CO || DT

BD || CT и BC = TD

$\Rightarrow$ BCTD - р/б трап.



$\alpha + \beta = 60 = \angle ABT = \angle ACT =$

$= \angle BDT$

ABCT - впис.

$\angle BCA = \angle BTA = 60^\circ$

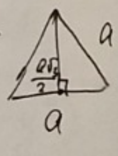
$\triangle$ ABT - р/б.

По т. косинусов:

$AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2\,AD \cdot DT \cdot \cos 120$

$AT^2 = 25 + 16 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 61 \Rightarrow AT = \sqrt{21}$

$S_{ABT} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad \begin{array}{r} +36 \\ 25 \\ \hline 61 \end{array}$



$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

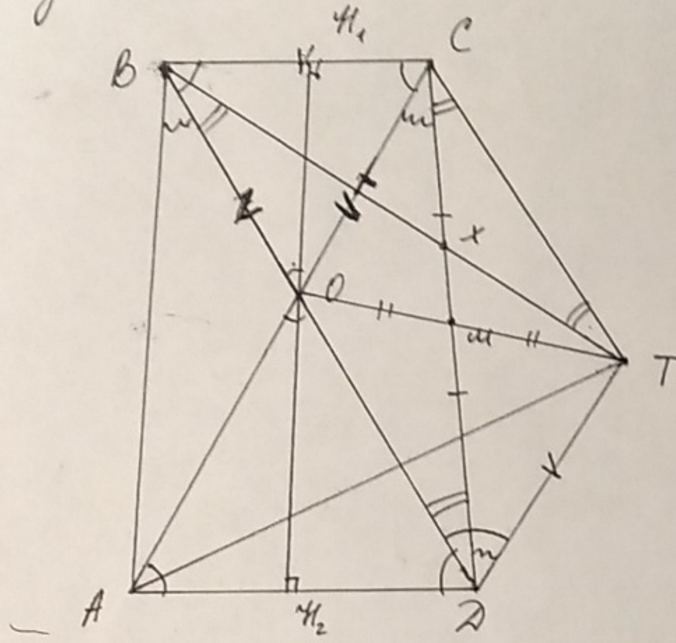
$S_{ABT} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(BC + AD\right) \cdot \frac{4}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3} = 15 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} =$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{21\sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot 15 \cdot 9} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \cdot 15 \cdot 3} = \frac{7\sqrt{3}}{90}$

Чистовик, лист №2

Задача №6



Дано: $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – р/с, T симметрична O относительно M ($CM=MD$)

Док-ть: ABT – р/с

Найти: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ ($BC=4$; $AD=5$)

Решение:

1) Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – р/с, то $\angle BCO=\angle OBC=\angle BOC=\angle AOD=\angle OAD=\angle ODA=60°$

Отсюда $BC \parallel AD$ ($\angle CBD=\angle BDA=60°$ – н/л)

2) $ABCD$ – р/б трапеция, (т.к. диагонали образуют 2 р/б $\triangle$)

3) По условию O симметрична T относительно M ($CM=MD$ и $OM=MT$) $\Rightarrow$ $OCTD$ – пар-м (диагонали точкой пересечения делятся пополам) $\Rightarrow$ $CO=TD=BC$; $CO \parallel TD$ и $OD \parallel CT$

4) $BCTD$ – р/б трапеция ($BD \parallel CT$, $BC=TD$ и $\angle CBD=\angle TDB=60°$)

5) $\angle OCD=\angle CDT=\alpha$ (н/л при $CO \parallel TD$)

Также $\angle OCD=\angle\ \angle OBA=\alpha$ ($ABCD$ – р/б трапеция)

6) Из р/б трап. $BCTD$: $\angle XBD=\angle XDB=\beta$ (диагонали р/б трап. образуют 2 р/б $\triangle$ (в данном случае: $\triangle BXD$ и $\triangle CXT$))

Также $\angle XCT=\angle XTC=\beta$ (н/л с $\angle XBD$ и $\angle XDB$)

7) $\angle BDT=\alpha+\beta=60°=\angle ABT=\angle ACT$

8) Т.к. $\angle ABT=\angle ACT$, то $ABCT$ – вписанный $\Rightarrow$ $\angle BCA=\angle BTA=60°$.

Отсюда в $\triangle ABT$: $\angle ABT=\angle BTA=60° \Rightarrow \angle BAT=60° \Rightarrow \triangle ABT$ – р/с

Чтд.

9) По т. косинусов для $\triangle ADT$:

$AT^2=AD^2+DT^2-2AD\cdot DT\cdot\cos\angle ADT$ ($\angle ADT=2\angle ODA=120° \Rightarrow \cos\angle ADT=-\frac{1}{2}$)

Чистовик, лист №3

Задача №6 (окончание)

$AT = \sqrt{61}$

10) $S_{\triangle ABT} = \frac{AT^2\sqrt{3}}{4} = \frac{61\sqrt{3}}{4}$ (т.к. $\triangle ABT$ – р/с)

11) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot H_1H_2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (H_1O + OH_2) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} +\right.$

$\left. + \frac{4\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

12) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{61\sqrt{3}}{4}}{\frac{81\sqrt{3}}{4}} = \frac{61}{81}$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61}{81}$

Задача №4 Чистовик., Лист №1

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \quad |\cdot 3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases} \qquad -\begin{cases} x^4+y^4-x^2y^2=31 \\ 9x^2+9y^2-3x^2y^2=9 \end{cases}$$

$$x^4+y^4+2x^2y^2-9(y^2+x^2)=22$$

$$(x^2+y^2)^2-9(x^2+y^2)-22=0$$

Пусть $x^2+y^2=t$, тогда $t^2-9t-22=0$

$$D=81+22\cdot 4=169 \Rightarrow \sqrt{D}=13$$

$t_1=\frac{9-13}{2}=-2$ – не удовлетворяет, т.к. сумма квадратов неотрицательна.

$$t_2=\frac{9+13}{2}=11$$

1) Тогда $x^2+y^2=11$, подставим в 1-е ур-нение:

$$3(x^2+y^2)-x^2y^2=3$$

$$33-x^2y^2=3$$

$$x^2y^2=30$$

2) Имеем систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=11 \\ x^2y^2=30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=11-y^2 \\ x^2y^2=30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=11-y^2 \\ (11-y^2)y^2=30 \end{cases}$$

$$-y^4+11y^2-30=0 \quad |\cdot(-1)$$

$$y^4-11y^2+30=0$$

Пусть $y^2=a$, тогда $a^2-11a+30=0$

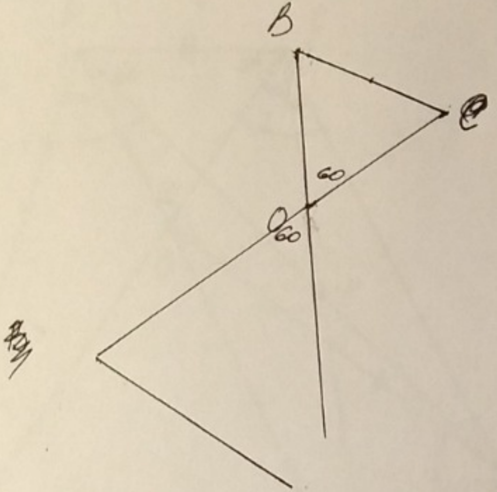
$$D=121-4\cdot 30=1 \Rightarrow \sqrt{D}=1$$

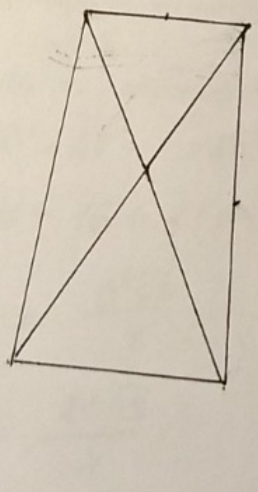
$$a_1=\frac{11-1}{2}=5 \qquad a_2=\frac{11+1}{2}=6$$

Отсюда $y=\pm\sqrt{5}$ или $y=\pm\sqrt{6}$ $\Rightarrow$ ~~$x^2=6$ $(x=\pm\sqrt{6})$ и $x^2=5$ $(x=\pm\sqrt{5})$~~ $\Rightarrow$ $x^2=6$ $(x=\pm\sqrt{6})$ и $x^2=5$ $(x=\pm\sqrt{5})$

Ответ: $(\pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{5})$; $(\pm\sqrt{5}; \pm\sqrt{6})$

Черновик, 4





211005786 (U364242 M1274311)

Черновик., 5

№4

$3x^2 - x^2y^2 + 3y^2 - 3 = 0$

$\cancel{3} \; x^2(3-y^2)-$

$3x^2 - x^2y^2 + 3y^2 -$

$x^2(3-y^2) + 3(3-y^2) = -6$

$x^4 - x^2y^2 + y^4$ $\quad$ $(3-y^2)(x^2-3) = -6$

$x^2(x^2-y^2) + y^4 -$

$x^4 + y^4 + 3(x^2+y^2) - 2x^2y^2 = 34$

$(x^2-y^2) + 3(x^2+y^2) = 34$

Решим относ. x^2.

$3x^2 - x^2y^2 + 3y^2 - 3 = 0$

$D = 1 - 4(3y^2-3) \cdot 3 = 1 - 12 \cdot 3(y^2-1) =$

$= 1 - 36(y^2-1) = 36(-y^2+1)+1$

$x^4 - x^2y^2$

Черновик. 6

Задача № 4

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$\cancel{x^2(3-y^2)-3(y}$

$\cancel{x^4+y^4-x^2y^2-31=0}$

$3x^2-x^2y^2+3(y^2-1)=0$

$\cancel{D=y^4-3\cdot4(y^2-1)=y^4-12y^2}$

$x^2(3-y^2)+(3y^2-3)=0$

$D=0-4\left((3-y^2)(3y^2-3)\right)=12(3-y^2)^2$

$\sqrt{D}=(3-y^2)\sqrt{12}$

$x_1=\dfrac{0-(3-y^2)\sqrt{12}}{2(3-y^2)}=-\dfrac{\sqrt{12}}{2}$

$x_2=\dfrac{0+(3-y^2)\sqrt{12}}{2(3-y^2)}=\dfrac{\sqrt{12}}{2}$ (при $y^2\neq3$)

Подставим:

$\dfrac{3\cdot12}{4}+3y^2-\dfrac{12}{4}y^2=3$

$\cancel{9+3y^2-3y^2=3}$

$3x^2+9-3x^2=3$ – неверн.