Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

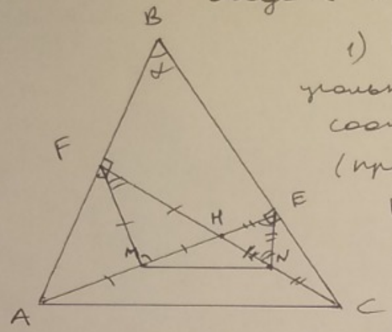
Шифр: **211005780**

ID профиля: **873120**

Вариант 15

Чистовик (страница 1 из 7)

Задача №1.



1) FM и EN — медианы в прямоугольных $\triangle AFH$ и $\triangle EHC$ ~~соотв.~~ соответственно ~~(из прямых углов~~ (проведённые из прямых углов) $\Rightarrow$

$FM = AM = MH$ и $EN = HN = NC$

2) $FM \parallel EN \Rightarrow \angle FMH = \angle HEN$ и $\angle MFH = \angle HNE$ как накрест лежащие.

Тогда $\triangle FMH \sim \triangle HEN$ по двум углам. Запишем отношение соответственных сторон:

$$\frac{EN}{FM} = \frac{EH}{MH} = \frac{NH}{HF}$$

Пусть $MH = a$; $HN = b$, тогда:

$$\boxed{\frac{b}{a} = \frac{EH}{a} = \frac{b}{FH}}$$

Отсюда видно, что $EH = b$ и $FH = a \Rightarrow \triangle FMH$ и $\triangle HEN$ — равносторонние.

3) $BFHE$ — впис. (т.к. $\angle BFH + \angle BEH = 90° + 90° = 180°$) $\Rightarrow$

$\angle FHM = \angle FBE \Rightarrow$ $\angle ABC = 60°$ $= \alpha$.

4) Для $\triangle BFC$: $FC = BC \cdot \sin\alpha \Rightarrow BC = \frac{FC}{\sin\alpha}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{FC}{\sin\alpha} \cdot AE =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a+2b}{\sin\alpha} \cdot 2a+b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+2\cdot 7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot (2\cdot 1+7) = \frac{15\cdot 9\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}} =$$

$$= 3\cdot 5\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 45\sqrt{3}.$$ $S_{\triangle ABC} = 45\sqrt{3}$

5) $AM = MH$ и $HN = NC \Rightarrow MN$ — ср. линия в $\triangle AHC$.

$\angle MHN = 180 - 60 = 120°$. Запишем т. косинусов для $\triangle MHN$:

Чистовик (страница 2 из 7)

Продолжение задачи №1.

$$MN^2 = HM^2 + HN^2 - 2\cdot HM\cdot HN\cdot \cos 120$$

$$MN = \sqrt{1^2 + 7^2 - 2\cdot 1\cdot 7\cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{1+49-7} = \sqrt{43}$$

б) MN – ср. линия $\Rightarrow$ $AC = 2MN = 2\sqrt{43}$

Запишем т. синусов для $\triangle ABC$:

$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$, где R – радиус описанной окр.

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2\sqrt{43}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{43}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{43}}{3} = \frac{2\sqrt{129}}{3}$$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$

$S_{\triangle ABC} = 45\sqrt{3}$

$R = \dfrac{2\sqrt{129}}{3}$

Чистовик (страница 3 из 7)

Задача №2.

Ряд чисел: a_1; a_2; ... a_n.

$a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_n \Rightarrow$ можно сказать, что

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ (упорядочим).

По условию: $\begin{cases} 32a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 581 \\ a_1 + a_2 + \ldots + 17a_n = 581 \end{cases}$ и

Пусть $a_2 + \ldots + a_{n-1} = x$. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 32a_1 + a_n + x = 581 \\ a_1 + 17a_n + x = 581 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 31a_1 + (x + a_1 + a_n) = 581 \\ 16a_n + (x + a_1 + a_n) = 581 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 31a_1 = 581 - (x + a_1 + a_n) \\ 16a_n = 581 - (x + a_1 + a_n) \end{cases}$$

a_i – натуральные $\Rightarrow$
$581 - (x + a_1 + a_n) \vdots 31$ и
$581 - (x + a_1 + a_n) \vdots 16$

~~но~~ 31 – простое $\Rightarrow$ НОК$(31; 16) = 31 \cdot 16 = 496 \Rightarrow$
$581 - (x + a_1 + a_n) \vdots 496$. Очевидно, $581 - (x + a_1 + a_n) > 496k$
$(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow$ $k = 1$ и $\boxed{581 - (x + a_1 + a_n) = 496}$

Тогда: $a_1 = \dfrac{581 - (x + a_1 + a_n)}{31} = \dfrac{496}{31} = 16$ и

$$a_n = \frac{581 - (x + a_1 + a_n)}{16} = \frac{496}{16} = 31$$

Очевидно, других вариантов a_1 и a_n быть не может, потому что мы в рассуждении использовали то „$\Rightarrow$", т.е. мы последовательно.

Чистовик (страница 4 из 7)

Продолжение задачи №2.

Это значит, что если наш результат ~~при обратном рассуждении~~ неполный или неверный, ~~то мы получим противоречие~~ то при проверке другого „правильного" мы получим противоречие в рассуждении.

Итак, $a_1 = 16$ и $a_n = 31$

$581 - (x + a_1 + a_n) = 486$

$x + a_1 + a_n = 85$

$\boxed{x = 85 - 16 - 31 = 38}$, где $x = a_2 + \ldots + a_{n-1}$

Очевидно чисел в сумме 2.

Если 1, то $38 > 30 = a_n - 1$.

Если 3, то $38 < 17 + 18 + 19 = (a_1 + 1) + (a_1 + 2) + (a_1 + 3)$

Тогда ~~$y + z = 38$ и~~ $a_2 + a_3 = 38$,

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 17 \\ a_3 = 21 \end{cases}$ и $\begin{cases} a_2 = 18 \\ a_3 = 20 \end{cases}$

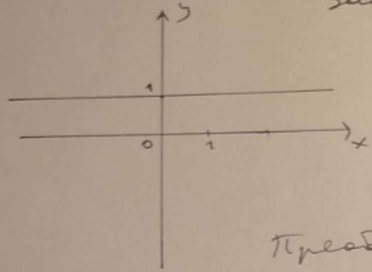
Опять же, других вариантов быть не может.

Ответ: 2 варианта:

1) 16; 17; 21; 31

2) 16; 18; 20; 31

Задача №3



Рассмотрим т. В. – она центр заданной функции. Пусть $y_в$ и $x_в$ – координаты. Тогда: $(y_в-y)^2+(x_в-x)^2=R^2$.

Преобразуем наше выражение (функцию) к данному виду:

$$a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0$$

Преобразуем сначала всё с ~~...~~ „y" до $(y_в-y)^2$, потом всё с „x" до $(x_в-x)^2$:

1) $a^2y^2-2a^3y+4ay=(ay)^2-2\cdot(ay)\cdot(a^2-2)+(a^2-2)^2-(a^2-2)^2=$

$=(ay-(a^2-2))^2-(a^2-2)^2=((a^2-2)-ay)^2-(a^2-2)^2$

2) $a^2x^2-6a^2x=(ax)^2-2\cdot(ax)\cdot 3a+\cancel{...}(3a)^2-(3a)^2=$

$=(ax-3a)^2-9a^2=(3a-ax)^2-9a^2$

Тогда: $((a^2-2)-ay)^2-(a^2-2)^2+(3a-ax)^2-9a^2+a^4+4=0$

$((a^2-2)-ay)^2-a^4+4a^2-4+(3a-ax)^2-9a^2+a^4+4=0$

$((a^2-2)-ay)^2+(3a-ax)^2=5a^2$

Мы должны избавиться от a в $(y_в-y)^2+(x_в-x)^2$.

Заметим, что $a\neq 0$, иначе $4=0$ (в исходном выражении)

Тогда разделим на a^2:

~~Чистовик~~

$\cancel{\left(\frac{a^2-2}{a} - y\right)^2 + (3-x)^2 = 5}$

Чистовик (страница 6 из 7)

Продолжение задачи №3.

$\left(\frac{a^2-2}{a} - y\right)^2 + (3\cancel{a} - x)^2 = 5.$

Тогда $y_B = \frac{a^2-2}{a}$ и $x_B = 3$.

Теперь обратимся к ~~т~~ точке A.

$5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

$y^2 - y\cdot(4a - 2x) + 2x^2 - 6ax + 5a^2 = 0$

$y^2 - 2y(2a-x) + (2a-x)^2 - (2a-x)^2 + 2x^2 - 6ax + 5a^2 = 0$

$(y - (2a-x))^2 - 4a^2 + 4ax - x^2 + 2x^2 - 6ax + 5a^2 = 0$

$((2a-x) - y)^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 0$

$((2a-x) - y)^2 + (a-x)^2 = 0$

~~Тогда~~ Это равносильно:

$\begin{cases} y = 2a - x \\ a = x \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = 2a - a = a$

Тогда y_A – координата по y т A. равна a.

Тогда для условия задачи нужно, чтобы:

$\begin{cases} \frac{a^2-2}{a} > 1 \\ a < 1 \end{cases}$ (1) или $\begin{cases} \frac{a^2-2}{a} < 1 \\ a > 1 \end{cases}$ (2)

Чистовик (страница 7 из 7)

Продолжение задачи №3.

Тогда для (1):

$a^2-2>a$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} a^2-2-a>0 \\ a<1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} a(a-1)-2>0 \\ a<1 \end{cases}$

$a^2-2-a>0$

очевидно равносильно $a<-1$

Тогда для (2):

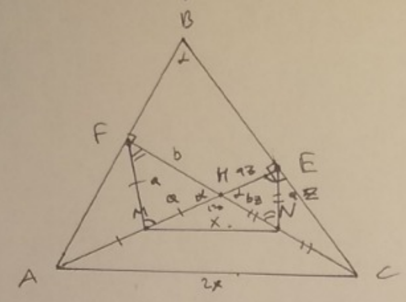
$a^2-2<a$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} a(a-1)-2>0 \\ a>1 \end{cases}$ Равносильно $a>2$

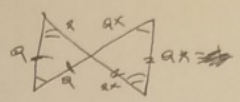
Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Черновик.

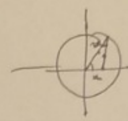
$\times \checkmark$ $-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

1.





$\frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$

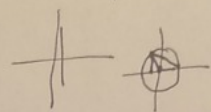


$x^2 + y^2 = 4x^2$

$y^2 = 3x^2$

$y = \sqrt{3} x$

$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\cos 120$

$\cos(120) = -\frac{1}{2}$

2.

$a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$32 a_1 + a_2 + \dots + a_n = 581$

$a_1 + a_2 + \dots + 17 a_n = 581$

$a_2 + \dots + a_{n-1} = x$

$x + 32 a_1 = x + 17 a_n = 581$

$17 < \dots < 32$

$17 < 18 < 19 < 32$

$32 a_1 = 581 - x$

$17 a_n = 581 - x$

$581 \vdots 32$

$581 - x \vdots 17$

$\frac{1+7+17}{\sin\alpha} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$

$32 \times 17 = 224 + 32 = 544$

$581 - 544 = 37$

$581 - x = 544$

$x = 37$

$AB = \cancel{9}(1+1+7) = 9$

$10\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} = 45\sqrt{3}$

$a_n = \frac{581-37}{17} = 32$

$a_1 = \frac{581-32}{32} = 17$

17 21

18 20

$43 \times 3 = 129$

$581 - 496 = 85$

$18 + 19 + 20 > 37$

$18 + 19 = 37$

$31 \times 16 = 186 + 31 = 496$

$\times$

$\checkmark$

$x + 32 a_1 + a_n = x + 17 a_n + a_1 = 581$

$\cancel{32a}$ $x + 32 a_1 + a_n = 581$

$x + 17 a_n + a_1 = 581$

1) $31 a_1 = 581 - x - (a_1 + a_n)$

2) $16 a_n = 581 - x - (a_1 + a_n)$

$16 < \dots < 31$

16 17 21 31

16 18 20 31

$31 \times 16 = 186 + 31 = 496$

$581 - 496 = 85$

$85 - 47 = 38$

$581 - x - (a_1 + a_n) = 496$

$a_1 = \frac{496}{31} = 16$

$a_n = \frac{496}{16} = 31$

$x = 581 - 496 - (a_1 + a_n) = 38$

$17 + 18 = 35$

17 21

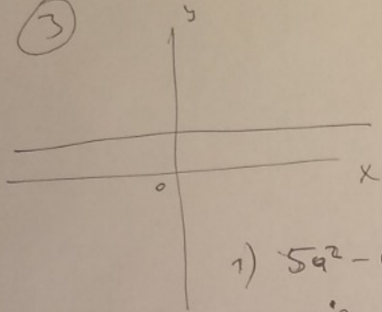
19 20

Черновик.

$$\left|\frac{16 < 17 < 21 < 31}{16 < 18 < 20 < 31}\right|$$

$16 \times 32 = 32 + 48 = 512$; $38 + 31 = 69$; $512 + 69 = 581$; $31 \times 17 = 17 + 52 = 527$; $38 + 16 = 54$; $527 + 54 = 581$

(3)



$$5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^2y + 4ay + a^4 + 4 = 0$$

1) $5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

2) $a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^2y + 4ay + a^4 + 4 = 0$

$$5a^2 - 6ax_1 - 4ay_1 + 2x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 = 0$$

$$(z - x)^2 + (z - y)^2 = R^2$$

$\therefore\ a^2x^2 - 6a^2x = a^2(x^2 - 6x + 9) =$

$+9a^2$

$a^2x^2 - 6a^2x = a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 - 9a^2 = a^2(3 - x)^2 - 9a^2$

$\therefore\ a^2y^2 - 2a^2y + 4ay = (ay)^2 - 2ay(a-2) + (a-2)^2 =$

$= (ay - (a-2))^2 = (a - 2 - ay)^2 - (a-2)^2$

$(a-2)^2 = a^2 - 4a + 4$

$$a^2(3-x)^2 + (a - 2 - ay)^2 - 9a^2 - a^2 + 4a - 4 + a^4 + 4 = 0$$

$$(3a - ax)^2 + (a - 2 - ay)^2 - 10a^2 + 4a + a^4 = 0$$

$$(3-x)^2 + \left(\frac{a-2}{a} - y\right)^2 - 10 + \frac{4}{a} + a^2 = 0$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005780**

ID профиля: **873120**

Вариант 15

Задача №4.

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - x^2y^2 = 3 \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2) - x^2y^2 = 3 \\ (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot y^2 + (y^2)^2 - 2x^2y^2 - x^2y^2 = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2) - x^2y^2 = 3 \\ (x^2+y^2)^2 - 3x^2y^2 = 31 \end{cases}$$

Сделаем замену: $x^2+y^2 = m$
$x^2y^2 = n$

Тогда: $\begin{cases} 3m - n = 3 \\ m^2 - 3n = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3+n}{3} & (1) \\ m^2 - 3n = 31 & (2) \end{cases}$

Подставим (1) в (2):

$$\frac{(3+n)^2}{9} - 3n = 31$$

$$n^2 + 6n + 9 - 27n = 31\cdot 9$$

$$\boxed{n^2 - 21n - 30\cdot 9 = 0}$$

Решаем кв. уравнение:

$$D = 21^2 + 4\cdot 30\cdot 9 = 441 + 1080 = 1521 = 39^2$$

$$n = \frac{21 \pm \sqrt{39^2}}{2} \qquad n = x^2y^2 \geq 0 \Rightarrow n = \frac{21 + \sqrt{39^2}}{2} = 30$$

Тогда $m = \frac{3+30}{3} = 11 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 11 \\ x^2y^2 = 30 \end{cases}$

Чистовик (страница 2 из 6)

Продолжение задачи №4.

Сделаем ещё одну замену: $x^2=a$ и $y^2=b$ ⇒

$$\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=11-b & (3) \\ ab=30 & (4) \end{cases}$$

Подставим (3) в (4): $(11-b)b=30$

$$11b-b^2=30$$

$$\boxed{b^2-11b+30=0}$$

Решаем кв. уравнение:

$$D=11^2-4\cdot 30=121-120=1=1^2$$

$$b=\frac{11\pm\sqrt{1^2}}{2}$$

$$b_1=\frac{11+1}{2}=6 \quad \text{и} \quad b_2=\frac{11-1}{2}=5$$

Тогда $a_1=11-b_1=5$ и $a_2=11-b_2=6$

~~Ответ:~~ Тогда:

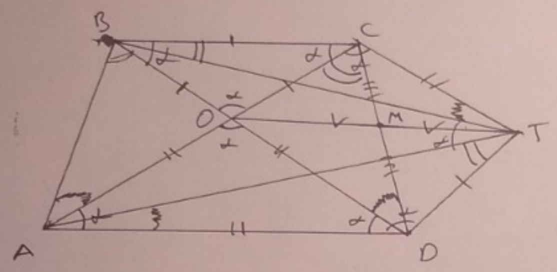
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=5 \\ y^2=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=6 \\ y^2=5 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm\sqrt{5} \\ y=\pm\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ y=\pm\sqrt{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt{5};\sqrt{6})$; $(\sqrt{5};-\sqrt{6})$; $(-\sqrt{5};\sqrt{6})$; $(-\sqrt{5};-\sqrt{6})$;
$(\sqrt{6};\sqrt{5})$; $(\sqrt{6};-\sqrt{5})$; $(-\sqrt{6};\sqrt{5})$; $(-\sqrt{6};-\sqrt{5})$.

8 ответов.

Чистовик (страница 3 из 6)

Задача № 6



а) 1) Пусть $\alpha = 60°$. $\angle CAD = \angle BCA = \alpha \Rightarrow BC \parallel AD$.

$BO = OD$; $AO = OC$ и $\angle BOA = \angle COD \Rightarrow \triangle AOB = \triangle COD$.

Тогда $ABCD$ – р/б трапеция. ~~(не параллелограмм,~~ ~~т.к. тогда~~ (но AB может быть $\parallel CD$, решение от этого не меняется).

2) $CM = MD$ и $OM = MT$, т.к. O симм. T $\Rightarrow$ OCTD – пар.

Тогда $CO \parallel TD$ и $CT \parallel OD$. и равны соотв.

Тогда если $\angle COD = 180 - \alpha \Rightarrow \angle OCT = \alpha$ и $\angle ODT = \alpha$.

3) Значит: $\begin{cases} BC = DT \\ CT = AD \\ \angle BCT = \angle ADT = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \triangle BCT = \triangle ADT$ (по 2 ст. и угл.).

4) $\angle CTD = \angle CTB + \angle BTA + \angle ATD$.

$\angle CTD = 180 - \alpha$; (OCTD – пар) $\angle CTB + \angle ATD = 180 - 2\alpha$ ($\triangle BCT = \triangle ADT \Rightarrow$ соответств. углы равны)

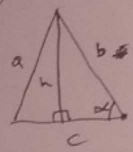
Тогда $\angle BTA = 180 - \alpha - (180 - 2\alpha) = \alpha$.

5) Тогда $BT = AT$ ($\triangle BCT = \triangle ADT$) и $\angle BTA = \alpha = 60° \Rightarrow$ $\triangle BTA$ – р/с.

Чистовик (страница 4 из 6)

Продолжение задачи №6.

б) 1) Пусть есть треугольник, как на рисунке. $S = \frac{1}{2} \cdot hc$.



$h = \sin\alpha \cdot b \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin\alpha}$

Будем использовать этот факт.

2) Пусть $BC = a$ и $AD = b$.

$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + S_{BOA} + S_{COD}$

$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin\alpha$

$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \sin\alpha$

$S_{BOA} = S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin(180 - \alpha) = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\alpha$

Тогда: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sin\alpha \left(a^2 + b^2 + 2ab \right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \, (a+b)^2$

3) $S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot AT \cdot \sin\alpha$.

Т. косинусов для $\triangle BCT$:

$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos(2\alpha)$

$BT = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos(120)} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$

$BT = AT \Rightarrow S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 + ab) \cdot \sin\alpha$

4) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2+ab)\sin\alpha}{\frac{1}{2}\sin\alpha\,(a^2+b^2+2ab)} = \frac{a^2+b^2+ab}{(a+b)^2} = \frac{4^2+5^2+4\cdot 5}{(4+5)^2} = \frac{61}{81}$

Ответ: б): $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61}{81}$

Чистовик (страница 5 из 6)

Задача № 5.

1) | к $ч_1$ | с $ч_1$ |

2) | к $ч_2 (ч_3)$ | с $ч_3 (ч_2)$ |

Фокусник хочет вытащить дубль и карточку, не содержащую ~~...~~ число, которое у дубля. Пусть он может вытащить дубль a способами, а ~~...~~ вторую карточку (необходимую) b способами. Тогда он может вытащить нужные 2 карточки $a \cdot b$ способами (по правилу сочетаний).

Найдём по отдельности a и b.

a: Всего $\frac{2 \cdot 20}{2} = 20$ дублей. $\Rightarrow$ $a = 20$.

b: ~~Осталось $20^2 - 4$ карточек.~~

На дубле написано какое-то число, значит ~~на могут~~ во второй карточке могут быть только перестановки 19 чисел. Среди этих ~~...~~ карточек есть дубли и не дубли. Дублей — 19. Посчитаем не дубли: $2 \cdot 19 \cdot 18$ карточек: на одной стороне — одно из 19 чисел, на другой — одно из 18 (дублей нет) и ещё умножаем на 2 — перестановка одинаковых чисел на разные цвета (красный и синий)

Чистовик (страница 6 из 6)

Продолжение задачи №5.

Тогда $b = 19 + 2 \cdot 19 \cdot 18 = 19(18 \cdot 2 + 1) = 19 \cdot 37$.

Значит $a \cdot b = 20 \cdot 19 \cdot 37 = 14060$ способов.

Ответ: $19 \cdot 20 \cdot 37 = 14060$ способов.

Черновик.

1.
$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$$\cancel{x^4+y^4+3x^2+3y^2=34}$$

$$\cancel{x^4+2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x^2=m \\ y^2=n \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} \frac{3x^2}{x^2y^2}+\frac{3y^2}{x^2y^2}-\frac{x^2y^2}{x^2y^2}=\frac{3}{x^2y^2} \\ \frac{x^4}{x^2y^2}+\frac{y^4}{x^2y^2}-\frac{x^2y^2}{x^2y^2}=\frac{31}{x^2y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{y^2}+\frac{3}{x^2}-1=\frac{3}{x^2y^2} \\ \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-1=\frac{31}{x^2y^2} \end{cases}$$

$$\frac{3}{n}+\frac{3}{m}+1=\frac{3}{mn}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3m+3n-mn=3 \\ m^2+n^2-mn=31 \end{cases}$$

$$m(3-n)=3-3n$$

$$\boxed{m=\frac{3-3n}{3-n}}$$

$$m^2-mn+n^2-31=0$$

$$\cancel{D=n^2+4(31-n^2)}$$

$$m^2-n\cdot m-(31-n^2)=0$$

$$D=n^2+4(31-n^2)=$$

$$=n^2+124-4n^2=124-3n^2$$

$$m=\frac{n\pm\sqrt{124-3n^2}}{2}$$

$$\left(2\cdot\frac{3-3n}{3-n}-n\right)^2=124-3n^2$$

$$\left(\frac{6-6n}{3-n}\right)^2-2\cdot\frac{6-6n}{3-n}\cdot n+n^2=124-3n^2$$

$$\begin{array}{r} +\,136 \\ 9 \\ \hline 145 \end{array}$$

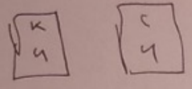
$$m^2+n^2+3m+3n=34$$

$$m^2+3m-(34-n^2-3n)=0$$

$$D=9+4(34-n^2-3n)=145-4n^2-12n=(2n)^2+2\cdot2\cdot3n+9$$

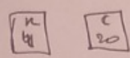
Черновик

$20 \cdot 1 = 20$ дублей



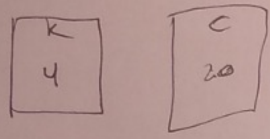
$20 \cdot x$ – выбираем 1 дубль.

4. ~~79~~



$2 \cdot 20 = 40$ ~~чисел~~. карт.

39 к



20^2 карточек

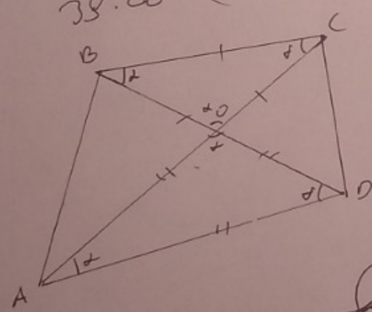
Карточек с опред. числом..

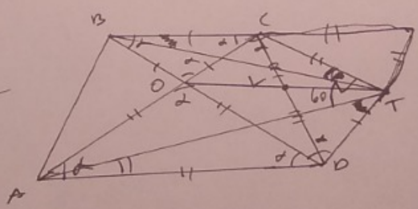
$2 \cdot 20 - 1 = \cancel{40}\ 39$ карточек с опр. числом.

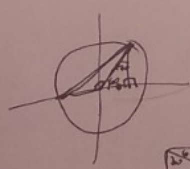
~~с неопр. числом~~

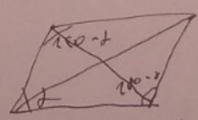
К/С

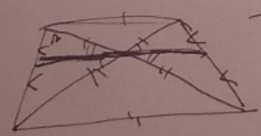
$39 \cdot 20 = (40-1)20 = 2 \cdot 20 \cdot 20 - 20$

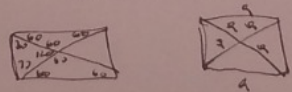






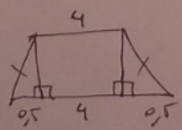






$16 + 25 + 20 = 61$

81



Черновик

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ (x^2-y^2)^2+x^2y^2=31 \end{cases}$$

$3m+3n+(m-n)^2=34$

$(x^2)^2-2x^2y^2+(y^2)^2=(x^2-y^2)^2$

$x^4+y^4-x^2y^2=(x^2-y^2)^2+x^2y^2=31$

$(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2-3x^2y^2$

$3x^2+3y^2-x^2y^2=3$

$3(x^2+y^2-1)=x^2y^2$

$(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=31$

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-x^2y^2=3 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=31 \end{cases}$$

$x^2+y^2=m$

$x^2y^2=n$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\, 19 \\ \hline 333 \\ +\,37 \\ \hline 703 \\ \times\, 2 \\ \hline 1406 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27 \\ +\,6 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3m-n=3 \\ m^2-3n=31 \end{cases}$$

$m=\frac{3+n}{3}$

$31\cdot 9-9=9\cdot 30$

$$\begin{array}{r} 27 \\ +\,8 \\ \hline 35 \end{array}$$

$\left(\frac{3+n}{3}\right)^2-3n=31$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\, 21 \\ \hline 21 \\ +\,42 \\ \hline 441 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times\, 9 \\ \hline 1080 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39 \\ \times\, 39 \\ \hline 351 \\ +\,117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$n^2+6n+9-27n=31\cdot 9$

$n^2-21n-30\cdot 9=0$

$D=21^2+4\cdot 30\cdot 9=441+1080=1521=39^2$

$n=\frac{21+39}{2}=30$ $\qquad m=\frac{3+30}{3}=11$

$3\cdot 5+3\cdot 6-5\cdot 6=15+18-30=3$

$5^2+6^2-5\cdot 6=25+36-30=31$