Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005759**

ID профиля: **326774**

Вариант 15

Чистовик.

$$5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=$$

$$=3a^2-6ax+3x^2+2a^2-4ay+2y^2-x^2+2xy-y^2=$$

$$=3(a-x)^2+2(a-y)^2-(x-y)^2=0.$$

Пусть $\begin{cases} x=a-t \\ y=a-k \end{cases}$

Тогда ур. принимает вид

$$3t^2+2k^2-(t-k)^2=0$$

$$3t^2+2k^2-t^2+2kt-k^2=0$$

$$2t^2+k^2+2kt=0$$

$$t^2+(t+k)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ k+t=0 \end{cases}$$

Значит $\begin{cases} t=0 \\ k=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=a \\ y=a \end{cases}$

A и B находятся по разные стороны, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-\frac{2}{a}>1 \\ a<1 \end{cases} \\ \begin{cases} a-\frac{2}{a}<1 \\ a>1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{a^2-2-a}{a}>0 \\ a<1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{a^2-2-a}{a}<0 \\ a>1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Математика 9кл.

Чистовик. стр. 6 из 8

Задача 3.

Окружность задаётся уравнением:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, где a и b – координаты центра

$a^2x^2-6a^2x+a^2y^2-2a^3y+4ay+a^4+4=$

$=a^2(x^2-6x+9)-9a^2+a^2y^2+(4a-2a^3)y+a^4+4=$

$=a^2(x^2-6x+9)-9a^2+(ay)^2+2ay(2-a^2)y+$

$+(2-a^2)^2+a^4+4-(2-a^2)^2=$

$=a^2(x-3)^2+(ay+2-a^2)^2-\cancel{4}+4a^2-\cancel{a^4}+\cancel{a^4}+\cancel{4}-$

$-9a^2=a^2(x-3)^2+a^2(y+\frac{2}{a}-a)^2-5a^2$

Уравнение:

$a^2(x-3)^2+a^2(y+\frac{2}{a}-a)^2-5a^2=0$

$(x-3)^2+(y+\frac{2}{a}-a)^2=5$

($a\neq0$, т.к. иначе ур. в условии имеет вид $4=0$, чего не может быть).

$\begin{cases} x=3 \\ y=a-\frac{2}{a} \end{cases}$ ← координаты т. B

Чистовик.

Итого, есть 2 возможных набора:

16, 17, 21, 31
16, 18, 20, 31 (оба подходят)

Ответ: либо 16; 17; 21; 31,
либо 16; 18; 20; 31.

Чистовик.

Задача 2.

Расположим все числа на доске в порядке возрастания:

$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$.

$$\begin{cases} 32x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 581 \\ x_1 + x_2 + \ldots + 17x_n = 581 \end{cases} \Rightarrow 31x_1 - 16x_n = 0.$$

$31x_1 = 16x_n$; $\quad \dfrac{x_n}{x_1} = \dfrac{31}{16}$

Т.к. x_2 – натуральное, то x_1 и x_n имеют вид:

$x_n = 31k$; $x_1 = 16k$ (т.к. 31 и 16 – взаимнопростые), где k – натуральное.

$581 = 32x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 32x_1 = 32 \cdot 16k = 512k$

$512k < 581 \Rightarrow k = 1$.

$x_1 = 16$; $x_n = 31$.

$16 < x_i < 31$, где $1 < i < n$. Значит

$581 - (32x_1 + x_n) = x_2 + \ldots + x_{n-1} \geqslant 17(n-2)$

$38 \geqslant 17n - 34$; $\quad 17n \leq 72 \Rightarrow n \leq 4$

$581 - (32x_1 + x_n) = x_2 + \ldots + x_{n-1} \leq 30(n-2)$

$38 \leq 30n - 60$; $\quad 98 \leq 30n \Rightarrow n \geqslant 4$.

$$\begin{cases} n \leq 4 \\ n \geqslant 4 \end{cases} \Rightarrow n = 4.$$

– если $x_2 = 17$, то $x_3 = 38 - 17 = 21$

– если $x_2 =$ [illegible], то $x_3 = 38 - 18 = 20$

– если $x_2 \geqslant 19$, то $x_3 \leq x_2$, что неверно.

Чистовик.

$$R = \frac{\sqrt{12\cdot 19}}{2\cdot \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{12\cdot 19}}{2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{4\cdot 19} = \sqrt{76}.$$

В $\triangle FHA$: $\angle F'HA = 60^\circ$.

Причем $\angle HF'A = \angle F'AH$, т.к. опираются на $\smile F'E' = \smile AC$.

Значит $\angle HF'A = \angle F'AH = \angle F'HA = 60^\circ$.

FM – медиана. $F'A = AH = HF' = 2$.

По аналогичным соображениям $\triangle HE'C$ – равносторонний.

$HE' = E'C = 14$.

$HE = \frac{HE'}{2} = 7$.

Итого, $AE = 2+7 = 9$.

$$BC = BE + EC = AE\cdot tg 30^\circ + HE\cdot tg 30^\circ =$$
$$= 9\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{72}{\sqrt{3}} = \frac{72\sqrt{3}}{3} = 24\sqrt{3}.$$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{ABC} = 24\sqrt{3}$; $R = \sqrt{76}$.

Чистовик.

В прямоугольном треугольнике $\triangle EKC$: $\frac{KC}{KE} = 2$.

Поэтому $\angle KCE = 30^\circ$.

В $\triangle BFC$: $\angle FBC = 90^\circ - \angle FCB = 60^\circ$.

Также и $\angle BAE = 30^\circ$.

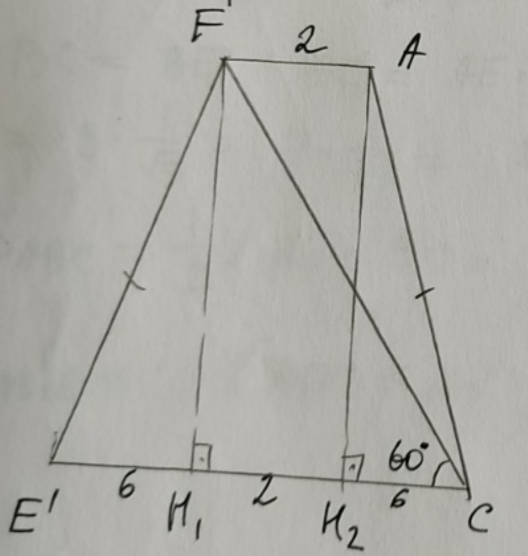
$\angle F'CE' = \angle KCE + \angle ECE' = \angle KCE + \angle BAE'$ (опираются на $\cup BE'$)

$\angle F'CE' = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

Отдельно рассмотрим трапецию $F'ACE'$.

Т.к. она при гомотетии с $k=2$ переходит из $FMNE$,

$\frac{F'A}{FM} = 2$; $\frac{E'C}{EN} = 2$ $\Rightarrow$ $F'A = 2$; $E'C = 14$.



Опустим высоты $F'H_1$ и AH_2.

$F'A = H_1H = 2$.

Из равенства $\triangle F'H_1E'$ и $\triangle AH_2C$,

$E'H_1 = H_2C = \frac{14-2}{2} = 6$.

В $\triangle F'H_1C$:

$tg\,60^\circ = \frac{F'H_1}{CH_1}$

$F'H_1 = 8 \cdot tg\,60^\circ = 8\sqrt{3}$

$AH_2 = F'H_1 = 8\sqrt{3}$.

По т. Пифагора для $\triangle AH_2C$: $AC^2 = 6^2 + (8\sqrt{3})^2$

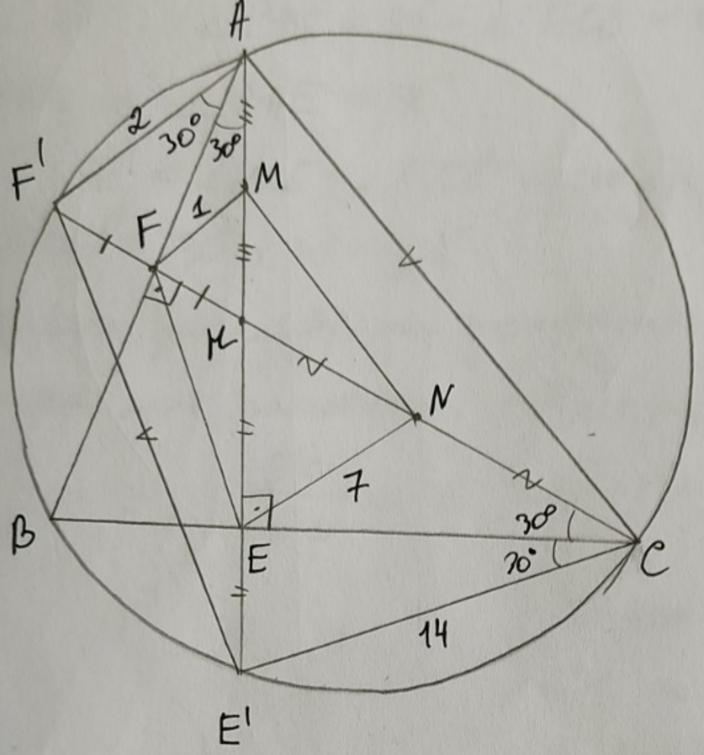
$AC^2 = 36 + 64 \cdot 3 = 12(3+16) = 12 \cdot 19$

$AC = \sqrt{12 \cdot 19}$

По т. синусов для $\triangle BAC$: $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$.

Чистовик.

Задача 1.



Т.к. $FM \parallel EN$, $FMNE$ – трапеция.

Если продлить высоту CF до пересечения с описанной окружностью $\triangle ABC$ (точка F'), то $HF = FF'$.

Аналогично, $HE = EE'$.

Сделаем гомотетию с центром H и $k = 2$, тогда $M \to A$; $N \to C$; $E \to E'$ и $F \to F'$.

Трапеция $FMNE$ перейдет во вписанную, а значит равнобедренную трапецию $F'ACE'$.

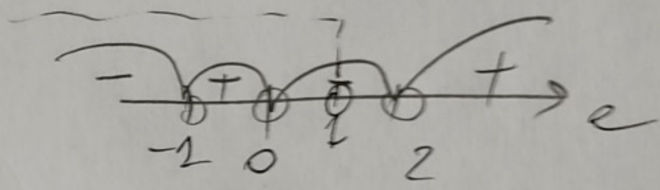
Значит и $FMNE$ – тоже равнобедр.

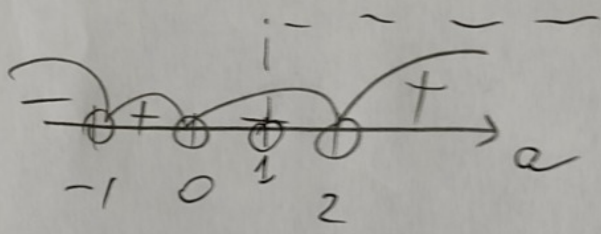
$\angle HE'C = \angle HCE'$, т.к. трапеция равнобокая $\Rightarrow$
$\angle E'H = HC$. А значит и их половины:

$EE' = EM = HN = NC$.

Чистовик

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{(a+1)(a-2)}{a} > 0 \\ a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{(a+1)(a-2)}{a} < 0 \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right.$$





$$\left[\begin{array}{l} a \in (-1; 0) \\ a \in (1; 2) \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1; 0) \cup (1; 2)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005759**

ID профиля: **326774**

Вариант 15

Математика, 9 кл.
стр. 6 из 6

Чистовик.

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{4} 61\sqrt{3}}{\frac{1}{2} 81\sqrt{3}} = \frac{61}{2 \cdot 81} = \frac{61}{162}.$$

Ответ: $\frac{61}{162}$.

чистовик.

б) $\angle ADO = \angle OBC = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$ и

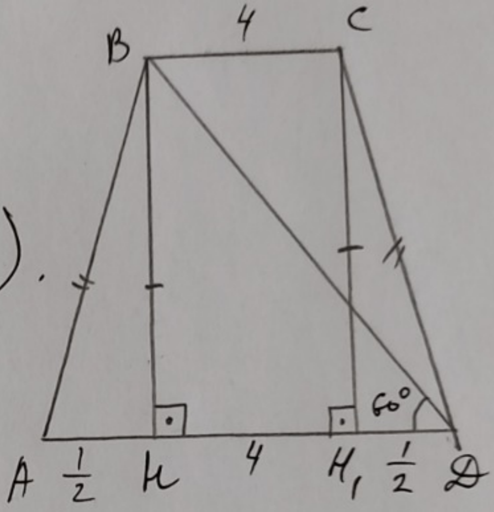
$ABCD$ – трапеция.

$\triangle ABO = \triangle DCO$ (по I признаку: $AO = OD$; $BO = OC$ и

$\angle BOA = \angle COD$, как вертикальные).

$\Rightarrow AB = CD$ и, получается, $ABCD$ – равнобокая трапеция.

$S_{ABCD} = \dfrac{AD+BC}{2} \cdot BH.$



$\triangle BHA = \triangle CH_1D$ (по катету и гипотенузе, как прямоугольные).

$\Rightarrow AH = H_1D.$

BCH_1H – параллелограмм $\Rightarrow$

$BC = HH_1 = 4.$

$AH = H_1D = \dfrac{5-4}{2} = \dfrac{1}{2}.$

$HD = 5 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2}.$

В $\triangle BHD$: $tg 60^\circ = \dfrac{BH}{HD}$,

$BH = tg 60^\circ \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

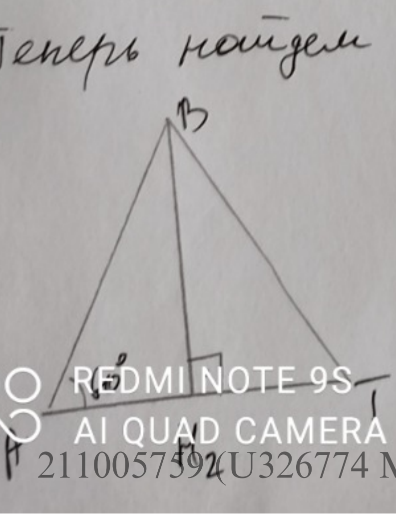
$S_{ABCD} = \dfrac{4+5}{2} \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{2} = \dfrac{81\sqrt{3}}{2}.$

По т. Пифагора для $\triangle ABH$:

$AB^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$

$= \dfrac{1+81\cdot 3}{4} = \dfrac{244}{4} = 61.$

Теперь найдем площадь правильного $\triangle ABT$:



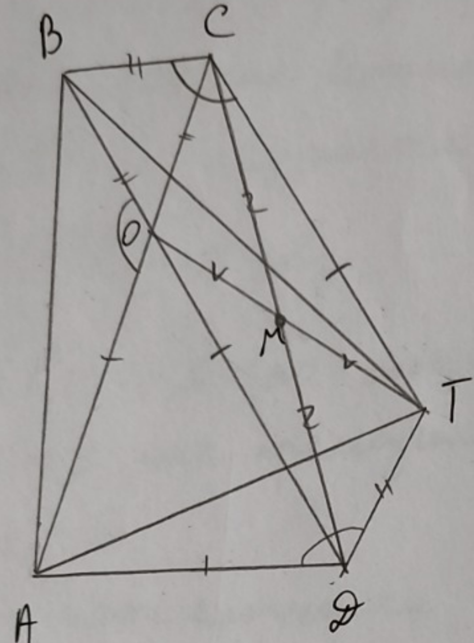
$S_{ABT} = \dfrac{1}{2} AT \cdot BH_2 = \dfrac{1}{2} AT \cdot (AB \cdot \sin 60^\circ) =$

$= AB^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

$S_{ABT} = 61 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{61\sqrt{3}}{4}$

Чистовик
задача 6.

а)



M – середина CD.

O и T симметричны относительно M ⇒ OT проходит через M, и OM = MT.

В четырехугольнике OCTD диагонали делят друг друга пополам ⇒ OCTD – параллелограмм. ⇒

$OD = CT$; $OC = DT$

$\angle COD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle OCT = \angle ODT = 60^\circ$.

$\angle BOA = 120^\circ$;

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120^\circ$;

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120^\circ$.

Значит $\triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA$ (по I признаку: $BO = BC = DT$; $AO = CT = AD$; $\angle BOA = \angle BCT = \angle TDA$).

Откуда, $BA = BT = AT \Rightarrow \triangle BAT$ – правильный ■

~~б) $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h$, где $h = BH$ (высота~~

~~Доказательство~~

Чистовик.

Задача 5.

На каждой из сторон стоит по 1 из 20 чисел. Значит, всего различных карт — 20^2 штук. У фокусника именно столько различных. Это означает, что у него все возможные карты есть.

Рассмотрим 2 случая:

1) фокусник вытягивает 2 дубля — $\frac{20 \cdot 19}{2}$ способов (т.к. дублей всего 20 шт), при этом никакое из 2 чисел не встречается одновременно на обеих картах.

2) ф. вытягивает дубль и не дубль. Сам дубль он может выбрать 20 способами. Число на красной стороне второй карты можно выбрать 19 способами (одно уже есть в дубле), а число на синей стороне — 18 способами (т.к. эта карта — не дубль).

Всё — $20 \cdot 19 \cdot 18$ способов.

Итого, выбрать 2 карты, подходящие под условие фокусник сможет $\frac{20 \cdot 19}{2} + 20 \cdot 19 \cdot 18 = 10 \cdot 19(1 + 2 \cdot 18) =$

$= 10 \cdot 19 \cdot 37 = 7030$ способами.

Ответ: 7030.

Система (1):
Совершим замену: $x^2=t$; $y^2=k$

$$\begin{cases} t+k=11 \\ tk=30 \end{cases} \qquad t=11-k$$

$(11-k)k=30$

$11k-k^2=30$; $\qquad k^2-11k+30=0$

$D=11^2-4\cdot 30=1^2$

$$k_{1,2}=\frac{11\pm 1}{2}$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} k=6 \\ t=5 \end{cases} \quad (3) \\ &\begin{cases} k=5 \\ t=6 \end{cases} \quad (4) \end{aligned}\right.$$

Сист. (4): $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$

Сист. (3): $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

Ответ: $\{(\sqrt{6};\sqrt{5}), (\sqrt{6};-\sqrt{5}), (-\sqrt{6};\sqrt{5}), (-\sqrt{6};-\sqrt{5}),$
$(\sqrt{5};\sqrt{6}), (\sqrt{5};-\sqrt{6}), (-\sqrt{5};\sqrt{6}), (-\sqrt{5};-\sqrt{6})\}$.

Чистовик

Задача 4.

$$3(x^2+y^2)-x^2y^2=3$$

$$x^4+y^4-x^2y^2=x^4+y^4+2x^2y^2-3x^2y^2=$$
$$=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2$$

$$\begin{cases}3(x^2+y^2)-x^2y^2=3\\(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=31\end{cases}$$

Сделаем замену: $\begin{cases}x^2+y^2=a\\x^2y^2=b\end{cases}$

$\Rightarrow\ b=3a-3$

$$\begin{cases}3a-b=3\\a^2-3b=31\end{cases}$$

$$a^2-3(3a-3)=31$$
$$a^2-9a-22=0$$
$$D=9^2+22\cdot4=81+88=169=13^2$$
$$a_{1,2}=\frac{9\pm13}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=11\\b=30\end{cases}\\\begin{cases}a=-2\\b=-9\end{cases}\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x^2+y^2=11\\x^2y^2=30\end{cases}&(1)\\\begin{cases}x^2+y^2=-2\\x^2y^2=-9\end{cases}&(2)\end{array}\right.$$

Система (2) не имеет решений, т.к.

$x^2y^2=(xy)^2\geq0\ \Rightarrow$ противоречие