Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005486**

ID профиля: **862527**

Вариант 15

③ 15 вариант 9 класс
математика

1) $a^2+x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0$

$a^2(x^2-6x+9)-9a^2+a^2y^2-2a^3y+4ay+a^4+4=0$

$a^2(x-3)^2+a^2y^2+2y(2a-a^3)+a^4-9a^2+4=0$

$(x-3)^2+y^2+2y(\frac{2}{a}-a)+a^2-9+\frac{4}{a^2}=0$

$(x-3)^2+(y+\frac{2}{a}-a)^2=5$

$B\ (3 : a-\frac{2}{a})$ $R=\sqrt{5}$

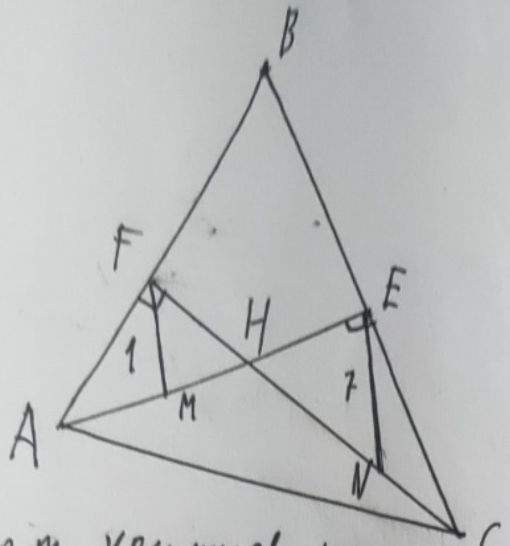
2) $5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0$

$(x-3)^2+(y+x)^2=4a(a+y)\ \Rightarrow\ 4a(y+a)=0$

$y=\frac{a^2}{a} : A$

3) $\begin{cases} B>1 \\ A<1 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ \end{cases}$

211005486 (U862527 M1274652)



1) Рассм. ΔAFH - прямоугол.
AH - гипотенуза; $AM = MH$ (по дм
$AM = MH = FM = 1$

2) Рассм. ΔHEC - прямоуг.
HC - гипотенуза; $HN = NC$ (по
$HN = AC = NE = 7$

3) т.к. $FM \parallel EN$ и секущая ME
$\Rightarrow \angle HEN = \angle FMH$ (накрест леж
по ΔFMH и ΔHEN - равноб. $=$
$\Rightarrow \angle EHN = \angle HEN = \angle FHM = \angle M$

4) Сумма углов 4-х угольника $FBEH =$
$\Rightarrow \angle B = \angle ABC = 360° - 180° - 120° = \underline{60}$
$(\angle FHE = 120°)$

5) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60°$
Найдем AB:
$AM = MH = 2$ $\Big| \Rightarrow AE = 9$

$\frac{AE}{} \Rightarrow AB = \frac{A}{Si}$

$AB = \frac{}{\sqrt{3}}$

6) по т. косинусов для ΔABC:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 60°$
$AC^2 = 36 \cdot 3 + 100 \cdot 3 - \cancel{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 108 + 300 - 180 = 228$
$AC = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}$

по т. синусов для ΔABC:
$\frac{AC}{\sin 60°} = 2R$

$\frac{2\sqrt{57}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

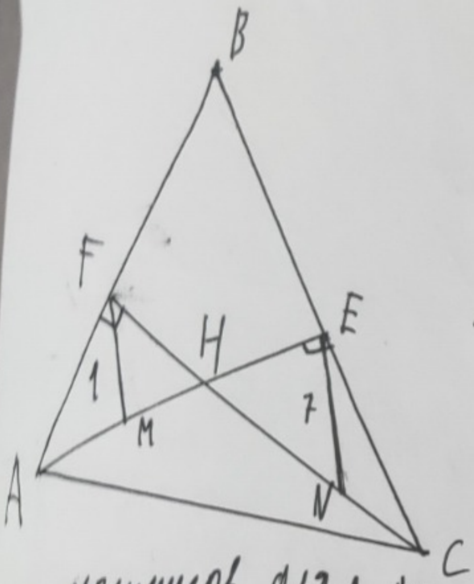
$\frac{4\sqrt{57}}{\sqrt{3}} = 2R$

$4\sqrt{19} = 2R \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{19}}{} =$
$2\sqrt{19}$

Ответ:
$S_{\Delta A}$

211005486 (U862527 M1274652)

(1) 9 класс математика 15 вариант



1) Рассм. ΔAFH – прямоугол.
AH – гипотенуза; AM = MH (по условию) $\Rightarrow$
AM = MH = FM = 1

2) Рассм. Δ HEC – прямоуг.
HC – гипотенуза; ~~HC~~ HN = NC (по усл.) $\Rightarrow$
HN = AC = NE = 7

3) т.к. FM ∥ EN и секущая ME $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle HEN = \angle FMH$ (накрест леж.)
но Δ FMH и Δ HEN – равноб. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EHN = \angle HEN = \angle FHM = \angle MFH = 60°$

4) Сумма углов 4-х угольника FBEH = 360° $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle B = \angle ABC = 360° - 18$... $= \underline{60°}$
($\angle FHE = 120°$)

5) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot B$...
Найдем AB:
AM = MH = 2 ... 9
HE = 7
Из Δ ...
A ...

по т. косинусов для ΔABC:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 60°$
$AC^2 = 36 \cdot 3 + 100 \cdot 3 - \cancel{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}$
$= 108 + 300 - 180 = 228$
$AC = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}$
по т. синусов для ΔABC:
$\frac{AC}{\sin 60°} = 2R$
$\sqrt{57} = 2R$
... $= 2R$
... $4\sqrt{19} =$

① 15 вариант Математика 9

$x_1, x_2 \ldots x_n$ – наши числа, записанные в порядке возрастания

$$\begin{cases} x_1' = 32x_1 \\ 32x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 58' \\ x_n' = 17x_n \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n' = 58' \end{cases} \quad (*)$$

$32x_1 + x_n = x_1 + 17x_n$

$31x_1 = 16x_n$, $x_1 = \frac{16x_n}{31}$

$x_n = \frac{31x_1}{16}$

Отсюда, x_1 кратно 16, x_n кратно 31

Пусть всего 3 числа

$32x_1 + x_2 + \frac{31x_1}{16} = 581$

$32 \cdot 16x_1 + 31x_1 + 16x_2 = 581 \cdot 16$

$543x_1 + 16x_2 = 581 \cdot 16$

$16x_2 = 581 \cdot 16 - 543x_1$

$x_2 = \frac{581 \cdot 16 - 543x_1}{16} = 581 - \frac{543x_1}{16}$

x_1 должен быть кратным 16

① если $x_1 = 16$, то $x_2 = 38$

$32 \cdot \underbrace{16}_{x_1} + \underbrace{38}_{x_2} + \underbrace{k \cdot 31}_{x_4} = 581$, где $k \cdot 31 = x_n$

$\underbrace{k \cdot 31}_{x_4} = 581 - 38 - 32 \cdot 16$

$31 \cdot k = 31$, $k = 1 \Rightarrow x_n = 31$,

но это ~~не~~ не удовлет. предположению, что x_n – наиб.

② если $x_1 = 32$, то x_2 будет отриц., что нам не подходит

Пусть всего 2 числа

$32x_1 + \frac{31x_1}{16} = 581$

$32 \cdot 16x_1 + 31x_1 = 581 \cdot 16$

$543x_1 = 9296$

$x_1 = \frac{9296}{543}$ – не нату

Пусть всего 4 числа

$32x_1 + x_2 + x_3 + \frac{31x_1}{16} = 581$

$32 \cdot 16x_1 + 31x_1 + 16x_2 + 16x_3 = 581 \cdot 16$

$543x_1 + 16(x_2 + x_3) = 581 \cdot 16$

$x_2 + x_3 = 581 - \frac{543x_1}{16}$

Пусть $x_1 = 16$, тогда $x_2 + x_3 = 38$

$x_2 > 16$, $x_3 > 0$, $x_3 > x_2$

$32 \cdot 16 + \underbrace{(x_2 + x_3)}_{38} + x_4 = 581$

$x_4 = 581 - 32 \cdot 16 - 38$

$x_n = 31$, $31 \vdots 31$

Проверим на 2 уравн. системы (*)

[illegible] $= 581$

[illegible] 581

[illegible]

211005486 (U862527 M1274652)

$\Rightarrow \angle B = \angle$ ...

$(\angle FHE = 120^\circ)$

5) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ$

Найдем AB:

$\left.\begin{array}{l} AM = MH = 2 \\ HE = 7 \end{array}\right| \Rightarrow AE = 9$

Из $\triangle ABE$: $\sin 60^\circ = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AE}{\sin 60^\circ}$

$AB = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{6\sqrt{3}}}$

$= \frac{4\sqrt{19}}{2} =$

Из $\triangle FBC$:

$\left.\begin{array}{l} FH = 1 \\ HN = 7 \\ NC = 7 \end{array}\right| \Rightarrow FC = 7+7+1 = 15$

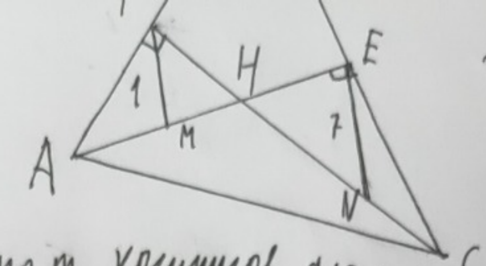
$\sin 60^\circ = \frac{FC}{BC} \Rightarrow BC = \frac{FC}{\sin 60^\circ} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$

$\angle ABC = 60^\circ$

$5\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{19}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 45\sqrt{3}$

211005486 (U862527 M1274652)



6) по т. косинусов для $\triangle ABC$:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 60°$

$AC^2 = 36 \cdot 3 + 100 \cdot 3 - \cancel{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 108 + 300 - 180 = 228$

$AC = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}$

по т. синусов для $\triangle ABC$:

$\frac{AC}{\sin 60°} = 2R$

$\frac{2\sqrt{57}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$\frac{4\sqrt{57}}{\sqrt{3}} = 2R$

$4\sqrt{19} = 2R \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{19}}{2} = 2\sqrt{19}$

Ответ: ~~$AC = ...$~~, $\angle ABC = 60°$,
$S_{\triangle ABC} = 45\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{19}$

2) Рассм. $\triangle HEC$ - прямоуг.: ~~...~~ $HN =$
HC - гипотенуза;
$HN = NC = NE = 7$

3) т.к. $FM \parallel EN$ и секу...
$\Rightarrow \angle HEN = \angle FMH$ (н...
по $\triangle FMH$ и $\triangle HEN$ -
$\Rightarrow \angle EHN = \angle HEN =$

4) Сумма углов 4-х угол...
$\Rightarrow \angle B = \angle ABC = 360°$...
$(\angle FHE = 120°)$

5) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot$

Найдем AB:

$AM = MH = 2$, $HE = 7$ $\Rightarrow AE$

Из $\triangle ABE$: $\sin$

$AB = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{3}} =$

Из $\triangle FBC$:

$FH = 1$, $HN = 7$, $NC = 7$ $\Rightarrow FC$

$\sin 60° = \frac{FC}{B...}$

② математика 9 класс
15 вар.

Тогда проверим их в системе (*)

$32 \cdot 16 + 17 + 21 + 31 = 581$

$581 = 581$ - верно

а $16 + 17 + 21 + 31 \cdot 17 = 581$

$581 = 581$

Получаем $x_1 = 16$, $x_2 = 17$, $x_3 = 21$, $x_4 = x_n = 31$

выполн. все условия

Ответ: $x_1 = 16$, $x_2 = 17$, $x_3 = 21$, $x_4 = 31$

$32x_1 + x_2 + \frac{31x_1}{16} = 581$

$32\cdot16x_1 + 31x_1 + 16x_2 = 581\cdot16$

$543x_1 + 16x_2 = 581\cdot16$

$16x_2 = 581\cdot16 - 543x_1$

$x_2 = \frac{581\cdot16 - 543x_1}{16} = 581 - \frac{543x_1}{16}$

x_1 должен быть кратным 16

① если $x_1 = 16$, то $x_2 = 38$

$32\cdot\underbrace{16}_{x_1} + \underbrace{38}_{x_2} + \underbrace{k\cdot31}_{x_n} = 581$, где $k\cdot31 = x_n$

$\underbrace{k\cdot31}_{x_4} = 581 - 38 - 32\cdot16$

$31\cdot k = 31$, $k = 1 \Rightarrow x_n = 31$,

но это ~~ну~~ не удовлет. предположению, что x_n – наим.

② если ~~x_n~~ $x_1 = 32$, то x_2 будет отриц.,

что нам не подходит

будет

$32x_1 + \frac{31x_1}{16}$

$32\cdot16x_1 + 31x_1 =$

$543x_1 = 9296$

$x_1 = \frac{9296}{543}$

$x_1 = 9296$

$x_1 = \frac{9296}{543}$ – не нату

$1 - \frac{543x_1}{16}$

и 16

1, где $k \cdot 31 = x_4$

ину.,

Пусть всего 4 числа

$32x_1 + x_2 + x_3 + \frac{31x_4}{16} = 581$

$32 \cdot 16x_1 + 31x_1 + 16x_2 + 16x_3 = 581 \cdot 16$

$543x_1 + 16(x_2 + x_3) = 581 \cdot 16$

$x_2 + x_3 = 581 - \frac{543x_1}{16}$

Пусть $x_1 = 16$, тогда $x_2 + x_3 = 38$

$x_2 > 16$, $x_3 > 0$, $x_3 > x_2$

$32 \cdot 16 + \underbrace{(x_2 + x_3)}_{38} + x_4 = 581$

$x_4 = 581 - 32 \cdot 16 - 38$

$x_n = 31$, $31 \vdots 31$

Проверим на 2 уравн. системы

$16 + \underbrace{x_2 + x_3}_{38} + 31 \cdot 17 = 581$ (*)

$581 = 581$

Значит $x_1 = 16$, $x_n = 31$, но

$x_n > x_3 > x_2 > x_1$ и сумма $\cancel{x_2 + x_3 =}$ $x_2 + x_3 = 38$

одно из наиб. знач.

x_2 и x_3 может быть: $x_2 = 17$

$x_3 = 21$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005486**

ID профиля: **862527**

Вариант 15

№ ① 9 класс математика 15 вариант

$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \end{cases}$ Пусть $x^2=a$, $y^2=b$; $a>0$; $b\geq 0$

$\begin{cases} 3(x^2+y^2)-x^2y^2=3 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=31 \end{cases}$

Пусть $t=x^2+y^2\geq 0$; $p=x^2y^2\geq 0$

$\begin{cases} 3t-p=3 \\ t^2-3p=31 \ (2) \end{cases}$ $p=3t-3 \ (1)$

Подставим $(1) \Rightarrow (2)$

$t^2-9t+9=31$ $t_1=11>0$

$t^2-9t-22=0$ $t_2=-2<0$ не подход.

$D=169=13^2$

$p=3\cdot t_1-3$, $p=30$ $\begin{cases} x^2y^2=30 \\ x^2+y^2=11 \end{cases}$ Пусть $x^2=a$; $y^2=b$ $\begin{cases} ab=30 \\ a+b=11 \end{cases}$

По обратной т. Виета

$q^2-11q+30=0$ $D=1>0$

$q_1=6$; $q_2=5$

① $q_1=a_1$; $q_2=b$ $\begin{cases} a=6 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=6 \\ y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$

② $q_2=a_1$; $q_1=b$ $\begin{cases} a=5 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=5 \\ y^2=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{5} \\ y=\pm\sqrt{6} \end{cases}$

Ответ: $(\sqrt{6};\sqrt{5})$, $(\sqrt{6};-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{6};\sqrt{5})$; $(-\sqrt{6};-\sqrt{5})$, $(\sqrt{5};\sqrt{6})$, $(\sqrt{5};-\sqrt{6})$, $(-\sqrt{5};\sqrt{6})$; $(-\sqrt{5};-\sqrt{6})$

①

211005486 (U862527 M1274653)

CT

$\angle \ldots DT = \angle TCB = 120°$ | $\Rightarrow$ ΔABC – равно...

1; $AD = 5$ По т. косинусов из ABO!

$BO^2 + AO^2 - 2\, AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB$

$= 25 + 16 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 25 + 16 + 20 = 61$

$AB = \sqrt{61}$ $S_\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot 61 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{61\sqrt{3}}{4}$

Пусть h – высота трап: $h = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2} = \sqrt{61 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{243}{2}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{5+4}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

2

$\frac{S_\Delta ABC}{S_\Delta BCD} = \frac{61}{81}$ Ответ: б) $\frac{61}{81}$

211005486 (U862527 M1274653)

№5 Математика 9 класс 15 вариант

$n = 20^2$ карточек
числа от 1 до 20

„Дубль", если $a_i = b_i$, где a и b - числа на обеих сторонах карточек

Решение

Всего 20^2 карточек. Вероятность того что числа a и b на обеих сторонах совпадут - $\frac{1}{20}$

Вероятность того, что на обеих карточках будет дубль - $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$.

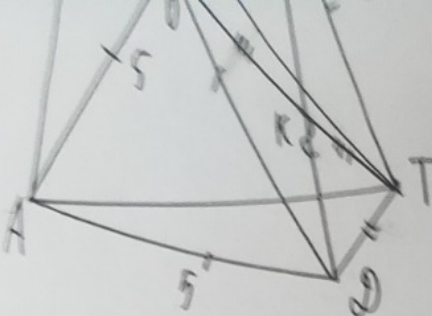
То есть, вероятность того, что дубль будет только на 1 из 2 карточек —
— $\frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{400}$. Но т.к. числа не должны повторятся, то вероятность будет уже $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20-1} = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{380}$. Если же обе карточки будут дублем:
$\frac{1}{20} \cdot \frac{18}{19} = \frac{18}{380}$. Всего получается 18 +1 вариант (т.к. $400-380=20$; $20>18$)
$K=19$

$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$; K - кол-во вариантов которые нам подходят; n - всего карточек

$C_{400}^{19} = \frac{400!}{381!\,19!} = \frac{382 \times \ldots \times 400}{19!}$

Ответ: $\frac{382 \times \ldots \times 400}{19!}$

③



T – симметрична ...

а) Док-ть: ABC – прав.

б) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{\triangle ABCD}}$ – ? (если BC = 4, ...

Решение:

Построим CT и DT и рассмотр. $\triangle COK$ и $\triangle DTK$

$OK = KT$; $CK = KD$; $\angle OKC = \angle DKT$

$\triangle COK = \triangle DKT$; $OC = DT$

Рассм. $\triangle OKD$ и $\triangle TKC$: $OK = KT$; $CK = KD$; $\angle OKD = \angle CKT$

$\triangle OKD = \triangle TKC \Rightarrow OD = CT$

$DT \parallel OC$ и $CT \parallel OD$ (равные накрест. леж. углы)

$\angle ODT = \angle AOD = \angle ADO = \angle OBC = \angle TCO = \angle DOA = 80°$

Следовательно $\angle ADT = \angle AOB = \angle BCT = 120°$

а) Рассм. $\triangle ABO = \triangle ATD$ и $\triangle TBC$

$BO = TD = BC$

$AO = AD = CT$

$\angle AOB = \angle ADT = \angle TCB = 120°$

$\Rightarrow$ $\triangle ATD = \triangle ABO = \triangle TBC$

$AB = AD = BT$

$\triangle ABC$ – равносторонний

б) $BC = 4$; $AD = 5$ По т. косинусов из ABO:

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2\,AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB$

$AB^2 = 25 + 16 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 25 + 16 + 20 = 61$

$AB = \sqrt{61}$ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 61 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{61\sqrt{3}}{4}$

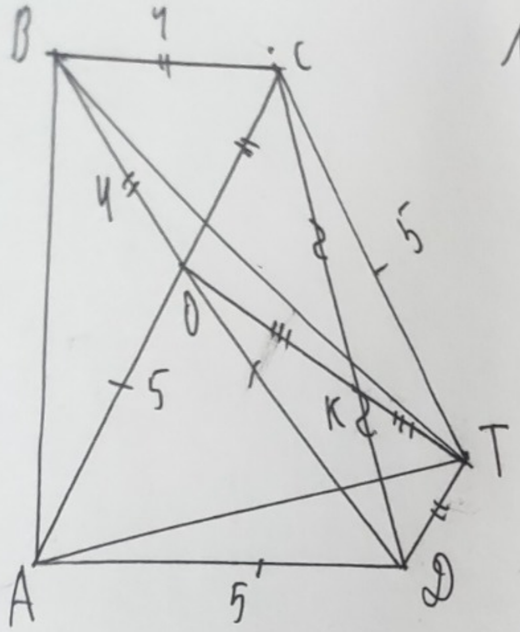
Пусть h – высота трап: $h = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2} = \sqrt{61 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{243}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S_{\triangle BCD}$ ... $\frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{5+4}{2} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

Ответ: б) $\frac{61}{81}$

7

211005486 (U862527 M1274653)



№ 6

Математика 9 класс 15 вар

Дано: ABCD – 4-х угольник; $AC \cap BD = O$

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правильные

T – симметрична O относ. CD

а) Док-ть: ABC – прав.

б) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{\triangle ABCD}}$ – ? (если $BC = 4$; $AD = 5$)

Решение:

Построим CT и DT

рассмотр. $\triangle COK$ и $\triangle DTK$

$OK = KT$; $CK = KD$; $\angle OKC = \angle DKT$

$\triangle COK = \triangle DKT$; $OC = DT$

Расм. $\triangle OKD$ и $\triangle TKC$: $OK = KT$; $CK = KD$; $\angle OKD = \angle CKT$

$\triangle OKD = \triangle TKC \Rightarrow OD = CT$

$DT \parallel OC$ и $CT \parallel OD$ (равные накрест. леж. углы)

$\angle ODT = \angle AOD = \angle ADO = \angle OBC = \angle TCO = \angle DOA = 60°$

следовательно $\angle ADT = \angle AOB = \angle BCT = 120°$

3) Расм. $\triangle ABO = \triangle ATD$ и $\triangle TBC$

$BO = TD = BC$ | $\triangle ATD$

$AO = AD = CT$

$\angle AOB =$ ...

... равносторонний

... ABO ...

б) ...