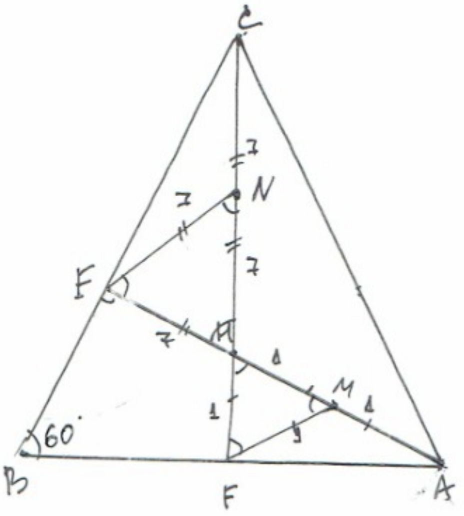
Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005427**

ID профиля: **827144**

Вариант 15



1). т.к. $\angle CFA = 90°$ и M - середина AH ⇒ $AH = 2FM = 2$.

2). Аналогично $CH = 2 \cdot EN = 14$

3). т.к. $\angle MFM = \angle FHM = \angle EHN = \angle NEH$ и т.к. $EN \parallel FM \Rightarrow \angle NEH = \angle ENH =$
$= \angle EHN = \angle FHM = \angle MFH = \angle MMF = 60° \Rightarrow \angle BCF = 30° \Rightarrow \angle ABC = 60°$

4). из равенства углов в $\triangle ENH$ и $\triangle FHM \Rightarrow CF = 7 \cdot 2 + 1 = 15$ и $AE = 1$
$= 9$.

5). т.к. $\angle CBF = 60° \Rightarrow BC = \frac{CF \cdot 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AE \cdot BC}{2} = 45\sqrt{3}$

6). По теореме cos в $\triangle AHC$: $AC = \sqrt{14^2 + 2^2 - 2\cos 120 \cdot 14 \cdot 2} =$
$= \sqrt{228}$

7). $R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{\sqrt{228}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{228}{3}}$

Ответ: $60°$; $45\sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{228}{3}}$.

211005427 (U827144 M1277682)

№ 2.

Пусть числа по возрастанию расположены так: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$. Тогда, a_1 - самое маленькое, a_n - самое большое. Тогда $32a_1 + a_2 + \dots + a_n = 581 =$
$= a_1 + a_2 + \dots + 17a_n \Rightarrow 31a_1 = 16a_n \Rightarrow$ т.к. НОД$(31;16) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \vdots 31 \Rightarrow a_n \geq 31$
$a_1 \vdots 16 \Rightarrow a_1 \geq 16$.

Если $a_1 \geq 32$, то $32a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 32^2 + a_2 + \dots + a_n =$
$= 1024 + a_2 + \dots + a_n > 581$, т.к. числа натуральные $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $a_1 = 16$. Аналогично можно убедиться, что $a_n = 31$. Тогда, $32 \cdot 16 + a_2 + \dots + a_n = 581$

$512 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + 31 = 581$.

$a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 38$.

Т.к. $a_3 > a_2 > a_1 = 16 \Rightarrow a_2 \geq 17 \Rightarrow a_3 \geq 18$ и $a_3 \leq 21$. Тогда a_4 просто быть не может, иначе $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} \geq 17 + 18 + 19 + \dots + 6$ > 38. Тогда, если $a_2 = 17 \Rightarrow a_3 = 21$
$a_2 = 18 \Rightarrow a_3 = 20$
$a_2 \geq 19 \Rightarrow a_3 \leq 19$ - противоречие.

Тогда $a_1 = 16$, $a_2 = 17$, $a_3 = 21$, $a_4 = 31 \Rightarrow 16 \cdot 32 + 17 + 21 + 31 = 581$ - подходит
$16 + 17 + 21 + 31 \cdot 17 = 581$ - подходит

или $a_1 = 16$, $a_2 = 18$, $a_3 = 20$, $a_4 = 31 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 \cdot 32 + 18 + 20 + 31 = 581$ - подходит
$16 + 18 + 20 + 31 \cdot 17 = 581$ - подходит

Ответ: $a_1 = 16$, $a_2 = 17$, $a_3 = 21$, $a_4 = 31$
$a_1 = 16$, $a_2 = 18$, $a_3 = 20$, $a_4 = 31$.

211005427 (U827144 M1277682)

Начало:

1). $a^2x^2+a^2y^2-6a^2x-2a^3y+4ay+a^4+4=0.$

$a^2y^2-2ay(a^2-2)+(a^2-2)^2-4a^2+a^2x^2-6a^2x=0$

$(ay-a^2+2)^2+a^2x^2-6a^2x+9a^2=13a^2.$

$a^2(y-(a-\frac{2}{a}))^2+a^2(x-3)^2=13a^2.$

$\left[\begin{array}{l} a=0 \Rightarrow 0\cdot x^2+0\cdot y^2-6\cdot0\cdot x-2\cdot0\cdot y+4\cdot0y+0+4\neq0 \Rightarrow a\neq0 \\ (y-(a-\frac{2}{a}))^2+(x-3)^2=13 \end{array}\right.$ - окр-ть с центром в точке B(3;

$R=\sqrt{13}.$

2). $5a^2-6ax-4ay+2x^2+2xy+y^2=0.$

$(x+y)^2-4a(x+y)+x^2-2ax+a^2+4a^2=0.$

$(x+y)^2-4a(x+y)+(x-a)^2+4a^2=0.$

$x+y=t$

$t^2-4a\cdot t+(x-a)^2+4a^2=0$

$D=16a^2-4(x-a)^2-16a^2\leq0 \Rightarrow$ т.к. $(x+y)\in R \Rightarrow$ $\underline{x=a}$, иначе

бы $(x+y)\notin R. \Rightarrow$

$5a^2-6a^2-4ay+2a^2+2ay+y^2=0$

$a^2-2ay+y^2=0.$

$\underline{a=y}$

Тогда, из п. 1 и п. 2 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-\frac{2}{a}<1 \\ a>1 \end{cases} (3) \\ \begin{cases} a-\frac{2}{a}>1 \\ a<1 \end{cases} (4). \end{array}\right.$

(3): $\begin{cases} \frac{a^2-a-2}{a}<0 \\ a>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(a-2)(a+1)}{a}<0 \\ a>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-1)\cup(0;2) \\ a>1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{a\in(1;2)}.$

Продолжение:

$$(4):\ \begin{cases} \frac{a^2-a-2}{a} > 0 \\ a < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-1;0) \cup (2;+\infty) \\ a < 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in (-1;0)}$$

Ответ: $a \in (-1;0) \cup (1;2)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

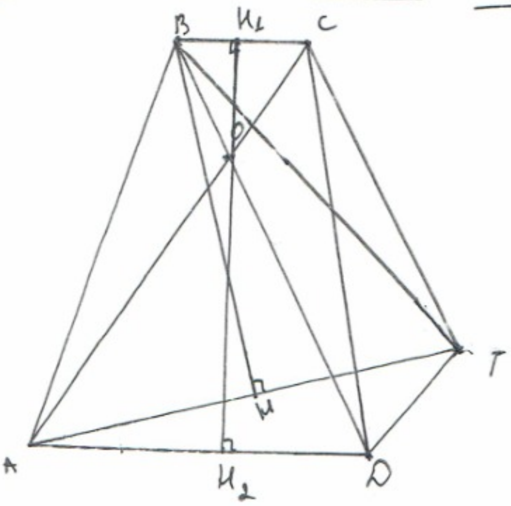
Шифр: **211005427**

ID профиля: **827144**

Вариант 15

стр. 1 из 3 Вариант 15 №6 9 класс Часть 2

стр. 1 из 3 Вариант 15 №6 9 класс Часть 2



а) 1). т.к. AOD и BOC – р/с ⇒ ABCD – р/б трапеция.

2). т.к. T – симметрично отражена относительно середины CD, то CODT – парал-м.

3) т.к. CO=BC ⇒ BCTD – р/б трапеция (т.к. CO=TD и CT∥BD)

4). по п.2 ⇒ AC∥DT. и, т.к. ∠COD=∠CTD=120° и ∠CAD=60° ⇒ CADT – р/б трапеция.

5) по п.3 и п.4 ⇒ BCTD – впис, ACTD – впис. Т.к. вокруг CTD можн[о] описать только одну окр-ть ⇒ точки A, B, C, T, D лежат на одной окр-ти.

6). т.к. ∠ABT и ∠ACT опираются на AT ⇒ ∠ABT = ∠ACT = 180°–∠COD=60°. Аналогично ∠BTA=∠BCA=60° ⇒ ΔABT – р/с ∎.

б). 7). Пусть OH_1 и OH_2 – высоты в ΔBOC и ΔAOD.

8). т.к. ∠BCO=60° и OC=BC=4 ⇒ $OH_1 = \frac{4}{2}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Аналогично $OH_2 = 2{,}5\sqrt{3}$

$H_1H_2 = 4{,}5\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = 4{,}5\sqrt{3}\cdot\frac{4+5}{2} = 4{,}5^2\cdot\sqrt{3}$

9). т.к. BCTD – р/б ⇒ CD = BT. По т. cos в ΔCOD: $CD = \sqrt{4^2+5^2-2\cos 120\cdot 4\cdot 5} = \sqrt{16+25+20} = \sqrt{61} = BT$.

10). $S_{\Delta ABT} = \frac{BH\cdot AT}{2}$ (BH – высота) ⇒ $S_{\Delta ABT} = \frac{\frac{\sqrt{61}}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{61}}{2} = \frac{61\sqrt{3}}{4}$

11). $\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61\sqrt{3}}{4\cdot 4{,}5^2\sqrt{3}} = \frac{61}{81}$ Ответ: $\frac{61}{81}$.

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-x^2y^2=3 \ (1) \\ x^4+y^4-x^2y^2=31 \ (2) \end{cases}$$

$(2):\ (x^2+y^2)^2=31+3x^2y^2$

$(1):\ 9x^2+9y^2=9+3x^2y^2$

$(x^2+y^2)^2=31+3x^2y^2=22+9(x^2+y^2).$

$x^2+y^2=a,\ a\geq 0$

$a^2-9a-22=0$

$(a-11)(a+2)=0,\ a\geq 0$

$a=11$, т.к. $a\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2=11 \Rightarrow x^2y^2=30 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=11 \\ x^2y^2=30 \end{cases}$

$x^2+\frac{30}{x^2}=11.$

$x^4-11x^2+30=0$

$(x^2-6)(x^2-5)=0.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=6 \\ y^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=5 \\ y^2=6 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt6;\sqrt5),(-\sqrt6;-\sqrt5),(\sqrt6;-\sqrt5)\ (-\sqrt6;\sqrt5)$
$(\sqrt5;\sqrt6),(-\sqrt5;-\sqrt6),(\sqrt5;-\sqrt6),(-\sqrt5;\sqrt6)$

Всего способов выбрать число на красной стороне – 20, а на синей – тоже 20. Тогда всего возможных комбинаций чисел на карточке – 400. т.к. у нас как раз 400 карт и они все различны, то все комбинации чисел на одной карточке присутствуют. Тогда, дублей всего – 20. Тогда, выбрать один из дублей – 20 способов. Тогда, пусть мы выбрали дубль a – a, где a – число на красной и на синей стороне. Тогда, оставшихся карточек с числом a на красной стороне – 19 и карточек с числом a на синей стороне – 19 ⇒ они не могут быть выбраны, их всего – 38. Тогда, могут быть выбраны (399 – 38) карт, т.е. 361 карта. Тогда, всего таких способов – 20 · 361 = = 7220

Ответ: 7220 способов