Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005234**

ID профиля: **840004**

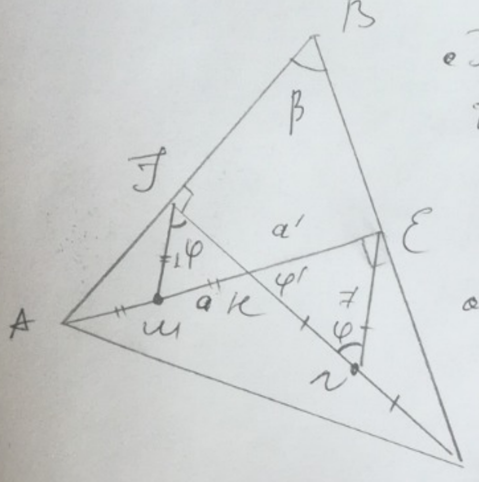
Вариант 15

стр (1) Математика 9 кл, часть 1

Вариант 15

Чистовик

Задача N 1



• По св-ву Me (медианы) пр. Гр (прямоуг-го треуг-ка):

$HN = NC = EN = 7$

$AM = MH = MF = 1$

• Из парал-ти FM и EN:

$\angle MFH = \angle HNE = \varphi$

• Из вертикальности:

$\angle FHM = \angle EHN = \varphi'$

• Тогда $\triangle HFM \sim \triangle HNE$ по двум углам (φ, φ')

• Из подобия: $\frac{EN}{FM} = \frac{HE}{MH} = \frac{7}{1} = \frac{a'}{a}$ $(a' = EH;\ a = MH)$

Т.е. $HE = 7 \cdot MH = 7 \Rightarrow \triangle HNE$ * равносторонний по опр-ию $\Rightarrow \varphi' = \varphi = \frac{\pi}{3}$ рад

• $BEHF$ - вписанный четырёхугольник, т.к. $\angle HFB = \angle HEB = \frac{\pi}{2}$ рад $\Rightarrow \beta = \varphi'$, по ~~пр~~ св-ву вписанного четырёхугольника $\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$ рад

* По аналогии с $\triangle HNE$ — $\triangle HMF$ - равносторонний $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FHM = \frac{\pi}{3} = \varphi' = \varphi$

• Заметим, что $AE = AH + HE = 2 + 7 = 9$ и

$CF = CH + HF = 7 \cdot 2 + 1 = 15$

• По опр-ию: $\sin\beta = \frac{FC}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow BC = (\sin\beta)^{-1} \cdot FC = \frac{2 \cdot 15}{\sqrt{3}}$

и $AB = \frac{AE}{\sin\beta} = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}}$.

• По опр-ию площади треуг-ка: $S(\triangle ABC) = AB \cdot BC \cdot \sin\beta =$

$= \frac{9 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \cancel{120\sqrt{3}}\ 90\sqrt{3}$

Чистовик

Задача № 1 (продолжение)

- Пусть $\angle AHC = \gamma \Rightarrow \gamma + \varphi' = \pi$ рад $\Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma = \pi - \varphi' = \frac{2}{3}\pi$ рад (из смежности)

- По теореме косинусов:
$b^2 = AC^2 = AH^2 + CH^2 \cancel{-} 2\cos\gamma \cdot AH \cdot CH =$
$= 2^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 4 \cdot 57 \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 2\sqrt{57}$

- По теореме синусов: $\frac{b}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow$
$\Rightarrow R = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{2 \cdot \sqrt{19} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{19}$, где R – радиус описанной, для $\triangle ABC$, окруж-ти

Ответ: $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ рад; $S(\triangle ABC) = 90\sqrt{3}$
$R(\triangle ABC) = 2\sqrt{19}$

Математика для, Часть 1

Чистовик Вариант 15

Задача №2

· Пусть набор $\{e, a_1, a_2 \ldots a_n, \mathcal{E}\}$ – данный и упорядочен по ~~возрастанию~~ возрастанию: $a_i \geq a_{i-1}$; $\mathcal{E} \geq a_n$; $e \leq a_1$. Тогда по условию: $32e + S + \mathcal{E} = e + S + \mathcal{E} \cdot 17 = 581$, где $S = \sum_1^n a_i$. Тогда $31e = 16\mathcal{E}$

Т. к. e и $\mathcal{E} \in N \Rightarrow e = 16k$, $k \in N$ (из соображ-ия делимости, и $k \neq 0$, т.к. иначе $e = 0 = \mathcal{E} = S$, т.к. $e \leq a_i \leq \mathcal{E}$, что нельзя)

• Пусть $k = 1$: $e = 16$; $\mathcal{E} = 31 \Rightarrow$

$S = 581 - 32e - \mathcal{E} = 581 - 32 \cdot 16 - 31 =$

$581 - 32 \cdot 17 + 1 = 38$.

Теперь пусть $n = 1 \Rightarrow a_1 = 38 > 31 = \mathcal{E}$, что нельзя

Если $n \geq 3$, то из принципа Дирихле есть $a_i \leq \frac{S}{n} \leq \frac{S}{3} < 16 = e$, что нельзя по опр.-ию a_i

Тогда $n = 2 \Rightarrow a_1 + a_2 = 38$, $a_i \geq e$. Переберём варианты все: $(16; 22)^{*}$; $(17; 21)$; $(18; 20)$; $(19; 19)^{*}$ далее $a_2 < a_1$, что нельзя, т.е. это все варианты, при $k = 1$, и $\boxed{\begin{matrix}^{*}(16; 22) \text{ не подходят, т.к. } e = a_1 \text{ или } a_1 = a_2, \\ (19; 19) \text{ что противоречит усл.}\end{matrix}}$

• Пусть $k \geq 2$: $e \geq 32$; $\mathcal{E} \geq 31 \cdot 2 = 62 \Rightarrow$

$S = 581 - \cancel{17e}\ 32e - \mathcal{E} \leq 581 - 32 \cdot 32 - 62 < 0$, т.к. $581 < 30^2 = 900 < 32^2 + 62 \Rightarrow S = \sum_1^n a_i < 0$, но $a_i \in N$ по опр-ию. противоречие $\Rightarrow k < 2 \Rightarrow k = 1$ там мы всё перебрали

Ответ: ~~$\{16; 16; 22; 31\}$~~; $\{16; 17; 21; 31\}$; $\{16; 18; 20; 31\}$ ~~$\{16; 19; 1$~~

211005234 (U840004 M1274002)

стр (4)

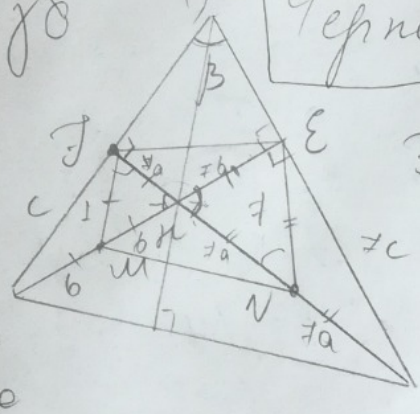
Математика, 9 кл

Часть 1

Черновик

$\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta$

φ



$FM \parallel EN$

$a = 1$

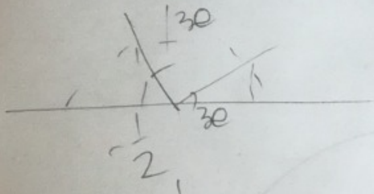
$b = 1$

$$\begin{array}{r|l} 228 & 2 \\ 114 & 2 \\ 57 & 3 \\ 19 & \end{array}$$

200×28

$2R\cos\alpha \quad R\sin\alpha \quad 228$

$2R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$



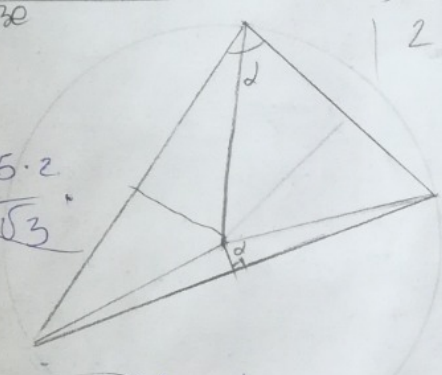
$2R\sin\alpha = a$

$\alpha = \beta$

$MN\ ?$

$S = BFC + AHC + FHA$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$



$\frac{3\sqrt{19}\cdot 2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{15\cdot 2}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$4(2^2 + 14)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot 14\cdot 2$

$= 228 - 4\sqrt{19}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}\cdot 2}$

№2 $\{a_n\}: S + e\cdot 31 = S + E\cdot 16$

$31e = E\cdot 16 \qquad 32e + S + E = e + S + E_{17}$

$e = 16$

$16\cdot 31 = \qquad E = 31 \qquad (E + 32e) + S = 581 =$

$= 427 + S$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 16 \\ \hline 186 \\ 31 \\ \hline 496 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ 17 \\ \hline 224 \\ 32 \\ \hline 544 \end{array}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005234**

ID профиля: **840004**

Вариант 15

стр (1) Математика 9 кл, Часть 2

Вариант 15

Чистовик

Задача № 4

Пусть $x^2+y^2=a$; $x^2y^2=b$, тогда по усл:

$$\begin{cases} 3a-b=3 \\ x^4+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=a^2-3b=31 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a^2-9a+9=31 \Rightarrow a_i=\frac{9\pm\sqrt{81+4\cdot 22}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=11 \\ a_2=-2 \end{array}\right.$$

но $a=x^2+y^2\geq 0$, $a_2<0 \Rightarrow a=a_1=11 \Rightarrow b=3\cdot 11-3=$ $=30$. Тогда $\begin{cases} a=11 \\ b=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=11 \\ x^2y^2=30 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+\frac{30}{x^2}=11 \Rightarrow x^4-11x^2+30=0$ $(x,y\neq 0$, т.к. иначе $b=x^2y^2=0=30$, что ложно$)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_j=\pm\sqrt{\frac{11\pm\sqrt{121-4\cdot 30}}{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{5} \\ x_2=-\sqrt{5} \\ x_3=\sqrt{6} \\ x_4=-\sqrt{6} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_i=\pm\sqrt{\frac{30}{x_j^2}} \Rightarrow$ Ответ: Решение: 1) $(y;x)=(\pm\sqrt{5};\pm\sqrt{6})$

2) $(y;x)=(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{5})$

3) $(y;x)=(\mp\sqrt{5};\pm\sqrt{6})$

4) $(y;x)=(\mp\sqrt{6};\pm\sqrt{5})$

211005234 (U840004 M1274003)

стр (2) Математика 9кл, Часть 2

Чистовик Вариант 15

Задача №5

Заметим, что вытащить дубль фокусник может 20 способами (т.к. всего дублей 20^*) (т.к. цифр-чисел 20), тогда II карту он может вытянуть из 20^2-1 оставшихся ⇒ выбрать пару, в которой есть хотя бы 1 дубль можно $20\cdot(20^2-1)$ способами, но мы ещё посчитали для варианта A-B вариант B-A (дубли оба) ⇒ $\frac{20(20^2-1)}{2} - \frac{20\cdot 19}{2}$ ** вариантов вытащить пару с дублем, в которой порядок не важен. Также заметим, что для каждого дубля мы посчитали $19\cdot 2$ вариантов, ~~то~~ где на второй карточке есть цифра k дубля (т.к. есть 20 карточек с цифрой k на красной стороне и 20 карт-к с k на синей ⇒ есть ещё 19 син k. и 19 красн. k, и множества этих карт не пересекаются, т.к. иначе пересечение — это наш дубль с k, что можно, он только 1) Тогда вычитая для каждого дубля с k_i эти варианты вытягивания получим: $\frac{20(20^2-1)}{2} - 10\cdot 19 - (19\cdot 2)\cdot 20 = 10\cdot 19\cdot 21 - 2\cdot 19\cdot 20 - 10\cdot 19 = \cancel{19\cdot 10(21-20)} = \cancel{1\cdot 19\cdot 10 = 5230} = 10\cdot 19(21-4-1) = 10\cdot 16\cdot 19 = 3040$

Ответ: фокусник может сделать это 3040 способами

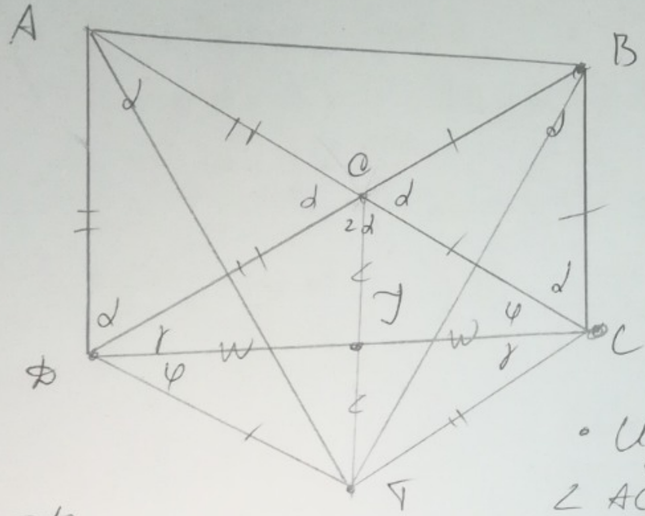
* здесь уж понятие "цифра" и "число" (цифра — число на какой-то стороне карты)

** $\frac{20\cdot 19}{2}$ — кол-во вариантов пар дубль-дубль $= C_{20}^2$ по опр-ию стр (3) Математика 9 кл., Часть 2

Вариант 15

Чистовик

Задача № 6



• Пусть J – середина DC; $\alpha = \frac{\pi}{3}$ рад

• Т. к. OJ = JT и DJ = JC ⇒ ODTC — параллелограмм по признаку ⇒ OD ∥ TC и DT ∥ OC и ⇒ OD = TC; DT = OC

• Из симметрии: $\angle AOB = \angle DOC = \pi - \alpha = \frac{2\pi}{3} = 2\alpha$

• По теореме о сумме углов треуг-ка: $\angle DOC + \angle ODC + \angle OCD = 2\alpha + \gamma + \varphi = \pi \Rightarrow \gamma + \varphi = \pi - 2\alpha = \alpha$

• Т. к. OD ∥ TC и DT ∥ OC: $\angle DCT = \gamma$; $\angle TDC = \varphi$

Тогда $\angle TCB = \angle TDA = \alpha + \gamma + \varphi = 2\alpha$

• Значит $\triangle TDA = \triangle BCT = \triangle BOA$, по углу и сторонам заключающим его ($\angle AOB = \angle BCT = \angle TDA = 2\alpha$; $CT = DA = OA$; $BO = BC = DT$) ⇒ BT = TA = AB ⇒

⇒ $\boxed{\triangle ABT \text{ – равносторонний по опр-ию}}$ ⇒

$$\Rightarrow S(\triangle ABT) = \frac{1}{2} AB \cdot BT \cdot \sin\frac{\pi}{3} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(OB^2 + OA^2 - 2 OB \cdot OA \cdot \cos 2\alpha\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{61\sqrt{3}}{2^2},$$ что

верно по теореме косинусов и опр-ию площади ($S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$)

Вариант 15

Чистовик

Задача №6 (продолжение)

- Заметим, что $S(ABCD) = S(\Delta ABO) + S(\Delta DCO) + S(\Delta DAO) + S(\Delta BOC) = \underbrace{\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot \sin 2\alpha}_{S(\Delta ABO)} + \underbrace{\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot \sin 2\alpha}_{S(\Delta DCO)} + \underbrace{\frac{1}{2}AO^2\sin\alpha}_{S(\Delta DAO)} + \underbrace{\frac{1}{2}OB^2\sin\alpha}_{S(\Delta BOC)} = \frac{1}{2}2\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}5^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}4^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 81\cdot\frac{\sqrt{3}}{2^2} \Rightarrow \frac{S(\Delta ABT)}{S(\Delta ABCD)} = \frac{61\sqrt{3}\cdot 2^2}{2^2\cdot 81\sqrt{3}} = \frac{61}{81}$

Ответ: $\frac{S(\Delta ABT)}{S(ABCD)} = \frac{61}{81}$

Математика 9 кл
Часть 2 Вариант 15
стр 5

Черновик

4)

$3x^2+3y^2+31-x^4-y^4=3$

$28 = x^4+y^4-3(x^2+y^2) =$

$= (\cancel{x^2-\sqrt{3}x)(x^2+\sqrt{3}}$ $x^2(x^2-3)+y^2(y^2-3)$

$x^2 = \dfrac{3-3y^2}{3-y^2}$ ~~24 1~~

$(x^2+y^2) = x^4+y^4+2y^2x^2 - 3x x^2y^2$

$3(x^2+y^2)-x^2y^2=3$ $3a-b=3$

$(x^2+y^2)-3x^2y^2=31$ $a^2-3b=31$

~~$3+b-9b=93 \Rightarrow b=\frac{90}{-8}$~~

$a^2-9a+9=31$ $b=30$

$a=\dfrac{9\pm\sqrt{81+4\cdot 22}}{2}=11$

$x^2y^2=30$ $x^2+\frac{30}{x^2}=11$

$x^2+y^2=11$ $x^4-11x^2+30=0$

$x_i = \pm\sqrt{\pm\frac{11\pm\sqrt{121-120}}{2}}$

$+\sqrt{6}$ $-\sqrt{6}$ $\sqrt{5}$ $-\sqrt{5}$

стр 6 Черновик $\frac{67 \cdot 71}{2}$

№ Ду1: $20 \mid \mathcal{E}_p = C^2_{20^2} = \frac{20^2!}{2!(20^2-2)!} = \frac{(20^2-1)!\,20^2!}{2}$

$\mathcal{E}_p - (19\cdot 2)\cdot 20 = 19\cdot 21\cdot 10^2\cdot 2 - 99\cdot 20\cdot 2 =$

$= 2\cdot 19(21\cdot 10^2 - 20) = 2080\cdot 2\cdot 19$

$\frac{20\cdot(20^2 - \cancel{20}1)}{2} - 19\cdot 2\cdot 20 - -$

$+2 \; -2$

$= 20(20^2 - 1 - 19\cdot 2) = \cancel{20^2}20$

$20\cdot 361\,000$ 95

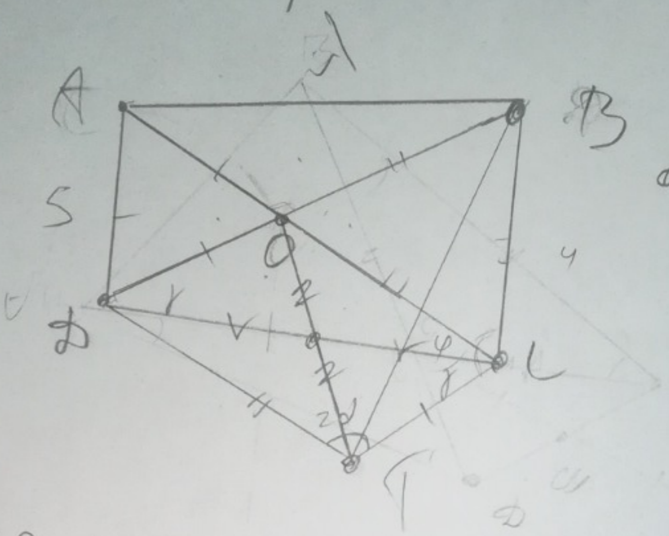
1700
19
15300
1700
32300

190
17
1330
190
3230

190
16
1140
190
3040

211005234 (U840004 M1274003)

Черновик (стр 7)



$60^\circ = \alpha$

$\frac{1}{2}5$

$\frac{36}{41}$

$d = \sqrt{5^2 + 4^2 + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 5 \cdot 4}$

$=$

$\sqrt{61}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$10 \cdot 19 \cdot 21 -$

$- 2 \cdot 19 \cdot 20$

$5^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 4 \cdot 5 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{61}{81}$

$3 \cdot 25 + 3 \cdot 36 - 36 \cdot 25 = 3$

~~$3 \cdot 61 - 36 \cdot 25$~~

$3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 - \sqrt{5 \cdot 6}$

$33 - 30$ $5 \cdot 6$