Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211005194**

ID профиля: **195846**

Вариант 15

Черновик

$a - \frac{2}{a} > 1$

$a - 1 - \frac{2}{a} > 0$

$5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$

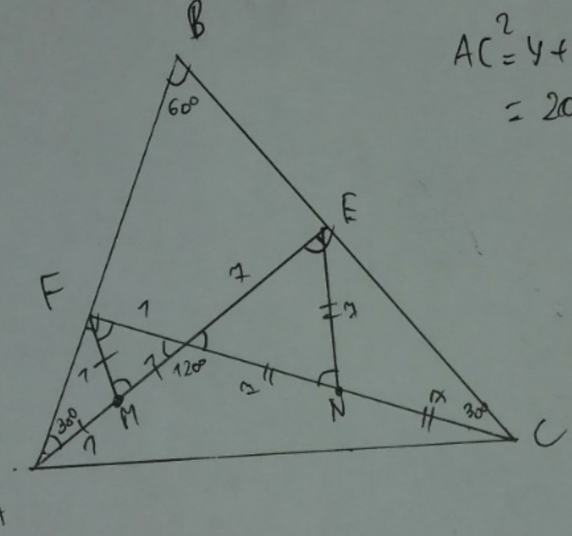
$5a^2 - 6ax + x^2 - 4ay + (x+y)^2 = 0$

$(x^2 - 6ax + 9a^2) - 4a^2 - 4ay + (x+y)^2 = 0$

$(x-3a)^2 - 4a(a+y) + (x+y)^2 = 0$

$(y^2 - 4ay + 4a^2) + (x^2 + 2xy + y^2) - y^2$

$5a^2 - 6ax - 4ay + x^2 + (x+y)^2 = 0$



$AC^2 = 4 + 196 + 2\cdot 2\cdot 14\cdot \cos 60^\circ =$

$= 200 + 28 = 228$

228	2
114	2
57	3
19	19
1	

$108 + 300 - 2\cdot 180\cdot \cos 60^\circ = 108 + 120 = 228$

~~$x^2 + 2xy + y^2 \ldots x^2$~~

$\frac{\sqrt{3}}{2} + 2xy + \frac{2}{\sqrt{3}}$

$5a^2 - 6ax - 4ay + x^2 = 0$

$x^2 - 6ax + 5a^2 = 4ay$

$(x-3a)^2 = 4a(a+y)$

$5a^2 - 6ax - 4a + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

$2(x^2 + (x - 6a)$

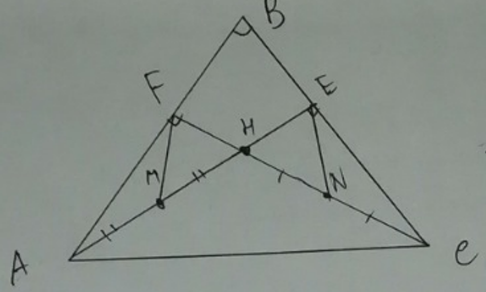
$0{,}5y^2 - 4ay +$

$(0{,}5y^2 + 2xy + 2x^2)$

211005194 (U195846 M1275444)

Черновик

~~[illegible]~~



$FM = 1$

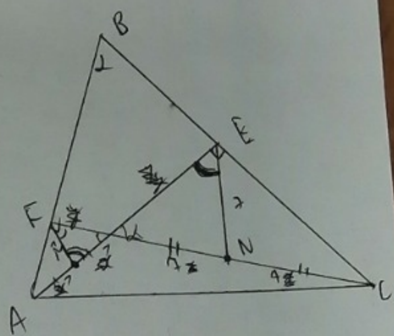
$EN = 7$

$FM \parallel EN$

$\angle ABC$ - ?

S_{ABC} - ?

R - ?



$17a + m + b = 581$

$31b = 16a$

$a + m + 32b = 581$

$b = \frac{16}{31} a$

$a \vdots 31$

$a = 31$

$m = 38$

$b = 16$

$\times\, 31$
$\;\;17$

217
31

527

~~XA,~~

16, 17, 21, 31

16, 18, 20, 31

~~$a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^3y + 4ay + a^4 + 4 = 0$~~

~~$a^2(x^2 - 6x + 9) + a(ay^2 - 2a^2y + 4y)$~~

~~$+ a^2(y^2 - 2ay + \frac{4}{a}y + (-a + \frac{2}{a})^2) -$~~

~~$- a^2(-a + \frac{2}{a})^2 + a^2 + 4 =$~~

~~$= a^2(x-3)^2 - 9 + a^2(y - a + \frac{2}{a})^2 - a^4 -$~~

$a^2 + 2ab + b^2$

$-a + \frac{2}{a}$

$-a + \frac{2}{a} = k$

$(a - \frac{2}{a})^2 =$

$= a^2 - 4 + \frac{4}{a^2}$

$x^2 + y^2 - 6x - 2ay + \frac{4}{a}y + a^2 + \frac{4}{a^2} = 0$

$(x^2 - 6x + 9) - 9 + y^2 - 2y(a - \frac{2}{a}) + a^2 + \frac{4}{a^2} = 0$

211005194 (U195846 M1275444)

Чистовик № 4

3

Найдём координаты точки B.

Заметим, что $a \neq 0$: при $a = 0$ уравнение окружности с центром в точке B имеет вид:
$4 = 0$, значит, при $a = 0$ окружность не существует.

Разделим обе части уравнения окружности на a^2:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2ay + \frac{4}{a}y + a^2 + \frac{4}{a^2} = 0$$

Переставим слагаемые:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2ay + \frac{4}{a}y + a^2 + \frac{4}{a^2} = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + \left(y^2 - 2ay + \frac{4}{a}y + \left(-a + \frac{2}{a}\right)^2\right) - \left(-a + \frac{2}{a}\right)^2 + a^2 + \frac{4}{a^2} = 0$$

Упростим:

$$(x-3)^2 - 9 + \left(y - a + \frac{2}{a}\right)^2 - \left(a^2 - 4 + \frac{4}{a^2}\right) + a^2 + \frac{4}{a^2} = 0$$

$$(x-3)^2 + \left(y - a + \frac{2}{a}\right)^2 + 5 - 9 = 0$$

$$(x-3)^2 + \left(y - a + \frac{2}{a}\right)^2 = 4$$

Центр окружности, заданной таким уравнением, имеет координаты $\left(3; a - \frac{2}{a}\right)$.

Найдём координаты точки A:

не нашёл :(

Чистовик №3

2

Обозначим самое маленькое число за x, самое большое — за z, а сумму остальных написанных чисел за y. Тогда:

$$\begin{cases} 32x + y + z = 581 \\ x + y + 17z = 581 \end{cases}$$

$$32x + y + z - x - y - 17z = 0$$

$$31x = 16z \qquad x = \frac{16}{31}z$$

так как x натурально, $z \,\vdots\, 31$.

При $z \geqslant 62$ $17z > 581$, значит, $z = 31$.

Тогда $x = 16$, $y = 38$.

~~По условию, все написанные на доске числа, кроме x и z, >16 и <~~

По условию, x — самое маленькое, z — самое большое число из написанных, значит, все остальные числа <31 и >16.

Если бы на доске было написано 3 числа или меньше, то y был бы <31, если бы было написано 5 или больше, то y был бы >48. Значит, на доске написано 4 числа. Обозначим написанные числа как x, a, b, z, $a + b = 38$. Тогда:

$$\begin{cases} a \neq b \\ a > 16, \; b > 16 \\ a < 31, \; b < 31. \end{cases}$$

Существует только 2 пары чисел, удовлетворяющих этим условиям — 17 и 21; и 18 и 20.

Ответ: 16, 17, 21, 31; 16, 18, 20, 31.

Чистовик №2
продолжение 1

5) ~~$BC = \frac{CA}{\sin \angle BCE}$~~

4) $AB = \frac{AE}{\sin \alpha} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}$

$BC = \frac{CF}{\sin \alpha} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CF}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 15}{2} = 45\sqrt{3}$

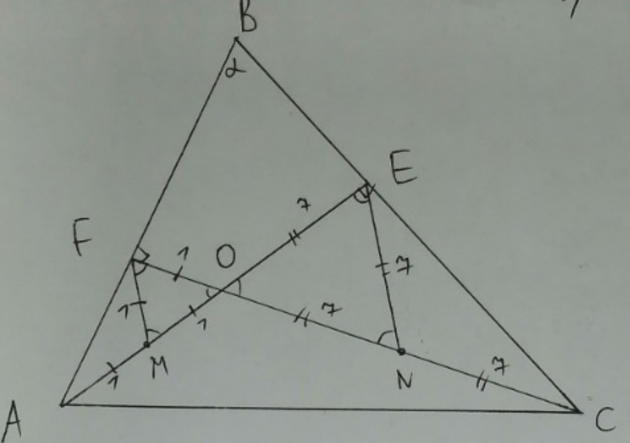
R – радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности

$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S_{ABC}} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{57}}{180\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{57}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{19}$

Ответ: 60°; $45\sqrt{3}$; $2\sqrt{19}$

Чистовик ~1

1



1) FM - медиана в прямоугольном $\triangle$-ке $\triangle AFO$, проведённая из прямого угла, значит, $AM = MO = FM = 1$.
Аналогично $ON = NC = EN = 7$
$\angle MFO = \angle FOM$ (так как $MF = MO$), $\angle FOM = \angle EON$ (как вертикальные), $\angle EON = \angle OEN$ (так как $ON = EN$), $\angle OEN =$ $= \cancel{\angle FMO}$ $\angle FMO$ (как накрест лежащие при FM, EN и секущей ME). $\Rightarrow \angle MFO = \angle FMO = \angle FOM$, $\triangle FOM$ - равносторонний, $FO = OM = FM$, $\angle MFO = \angle FMO = \angle FOM = 60°$.
Аналогично $OE = EN = ON$, $\angle EON = \angle OEN = \angle ENO = 60°$.
2) Обозначим $\angle ABC$ за α. Тогда $\angle EOF = 360° - \alpha - 90° -$ $- 90° = 180° - \alpha$ по сумме углов четырехугольника $BEOF$.
В то же время, $\angle EOF = 120°$ как смежный с $\angle FOM = 60°$. $\alpha = 180° - 120° = 60°$.
3) По теореме косинусов, $AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2OC \cdot AO \cdot \cos\angle AOC$,
$AC^2 = 4 + 196 - 2 \cdot 14 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 200 + 2 \cdot 14 \cdot 2 \cdot \cos 60° =$
$= 200 + 2 \cdot 14 = 228$, $AC = 2\sqrt{57}$
~~4) $\angle AFM = 90° - 60° = 30°$, $\angle FAM = \angle AFM = 30°$~~
~~$\angle CEN = 90° - 60° = 30°$, $\angle NCE = \angle CEM = 30°$~~

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211005194**

ID профиля: **195846**

Вариант 15

Чистовик №1

5

Посчитаем, сколько всего ~~существует~~ может существовать различных карточек. На синей стороне может быть написано одно из 20-и чисел, на красной — тоже, значит, всего существует $20 \cdot 20$ различных карточек. У фокусника их именно столько, значит, [illegible] в его наборе есть все ~~различные~~ возможные карточки.

Узнаем, сколькими способами фокусник может вытащить комбинацию дубль + дубль. Всего в наборе фокусника 20 дублей, значит, вытащить 2 дубля можно C_{20}^{2}, или $\frac{19 \cdot 20}{2} = 190$ способами. Числа на 2-х дублях не могут совпадать, так как они совпадают только в том случае, если ~~в~~ дубли совпадают, что противоречит условию.

Посчитаем, сколькими способами можно вытащить удовлетворяющих условию комбинацию из дубля и не-дубля. Всего в наборе фокусника $20^2 - 20 = 380$ не-дублей. Предположим, фокусник вытащил дубль, на обеих сторонах которого написано число a. Тогда вместе с ним он может вытащить любой из 380 не-дублей, кроме тех 19-и, на синей стороне которых написано число a, а на красной — отличное от a, и тех 19-и, на красной стороне которых написано число a, а на синей — отличное от a, то есть, любой из 342-х не-дублей. Тогда пару дубль + не-дубль можно вытащить $20 \cdot 342 = 6840$-ми способами. $6840 + 190 = 7030$.

Ответ: 7030.

Чистовик №2

4

$$\cancel{\begin{cases} 3x^2y^2 - x^2y^2 = 3 \\ x^4+y^4 - x^2y^2 = 31 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2 - x^2y^2 = 3 \\ x^4+y^4 - x^2y^2 = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2 = 3 + x^2y^2 \\ x^4+2x^2y^2+y^4 - 3x^2y^2 = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 + \frac{x^2y^2}{3} \\ (x^2+y^2)^2 = 31 + 3x^2y^2 \end{cases}$$

$$31 + 3x^2y^2 = \left(1 + \frac{x^2y^2}{3}\right)^2$$

$$279 + 27x^2y^2 = (3 + x^2y^2)^2$$

$$279 + 27x^2y^2 = 9 + 6x^2y^2 + x^4y^4$$

$$x^4y^4 - 21x^2y^2 - 270 = 0$$

$$(x^2y^2 - 30)(x^2y^2 + 9) = 0 \qquad x^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2y^2 \geq 0$$

$$(x^2y^2 > 0, \Rightarrow x^2 > 0,\ y^2 > 0)$$

$$x^2y^2 = 30 \qquad y^2 = \frac{30}{x^2}$$

$$3x^2 + \frac{90}{x^2} - 30 = 3$$

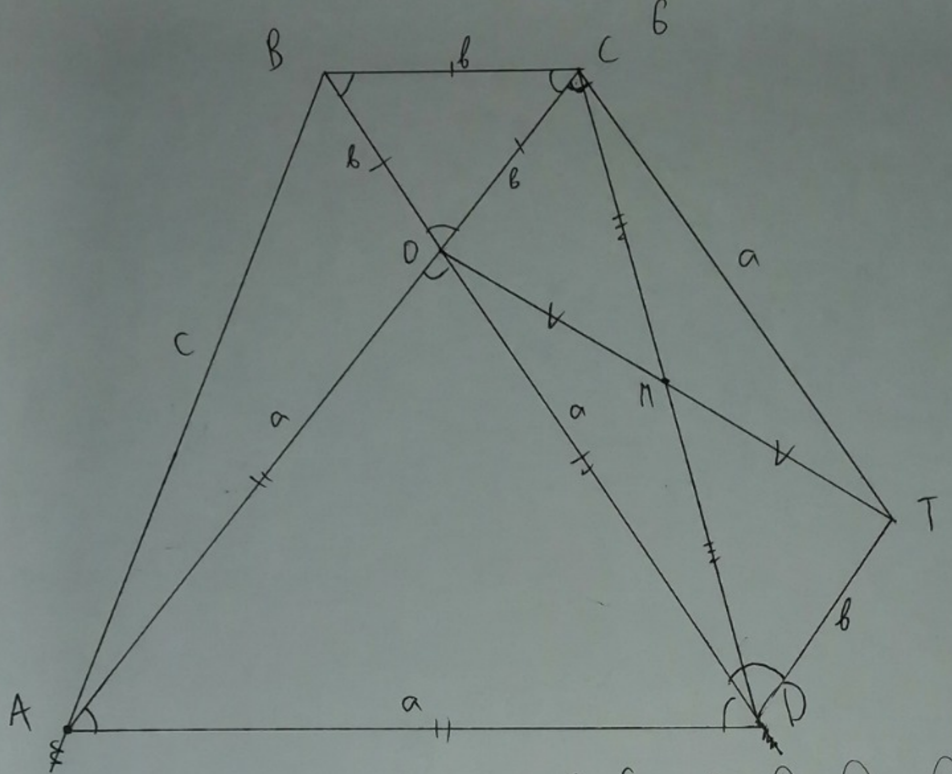
$$x^2 + \frac{30}{x^2} - 11 = 0$$

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0 \qquad (x^2-5)(x^2-6) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 5, \quad y^2 = 6 \\ x^2 = 6, \quad y^2 = 5 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{5}, \quad y = \pm\sqrt{6} \\ x = \pm\sqrt{6}, \quad y = \pm\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt{5};\sqrt{6}), (-\sqrt{5};\sqrt{6}), (\sqrt{5};-\sqrt{6}), (-\sqrt{5};-\sqrt{6}), (\sqrt{6};\sqrt{5}), (-\sqrt{6};\sqrt{5}), (\sqrt{6};-\sqrt{5}), (-\sqrt{6};-\sqrt{5})$

Чистовик №3



~~Докажем, что ABCD — равнобокая трапеция с основаниями AD и BC или параллелограм~~

Пусть $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$.

~~$\angle BCO = \angle OAD = 60°$ => $BC \parallel AD$ по признаку параллельности, ABCD — трапеция или параллелограм~~

1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120°$ по теореме косинусов

$OM = MT$, $CM = \underbrace{MD}_{\text{по условию}}$ => OCTD — параллелограм, $CT = OD = a$, $DT = OC = b$, ~~$\angle CTD = \angle COD$~~

~~$\angle COD$ — смежный с $\angle BOC = 60°$ => $\angle COD = 180° - 60° = 120° = \angle CTD$~~

$OC \parallel TD$ => $\angle TDO = \angle BOC$ как соответственные $= 60°$, $\angle ADT = 120°$, $AT^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120°$ по т. косинусов, $AT = c$.

Чистовик ~4

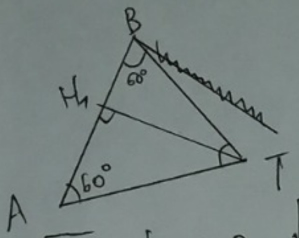
$CT \parallel OD \Rightarrow \angle OCT = \angle AOD = 60^\circ$, $\angle BCT = 120^\circ$

$BT^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow BT = C$

$AT = BT = AB \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный

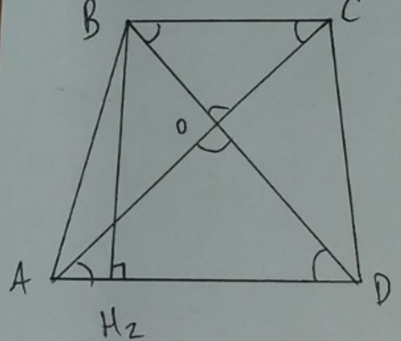
2) $b = 4$, $a = 5$

$c^2 = 25 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0{,}5 = 25 + 16 + 20 = 61$, $c = \sqrt{61}$



$TH_1 = \sqrt{61} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{61} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{183}}{2}$

$S_{ABT} = \frac{AB \cdot TH_1}{2} = \frac{\sqrt{61} \cdot \sqrt{183}}{4} = \frac{61 \cdot \sqrt{3}}{4}$

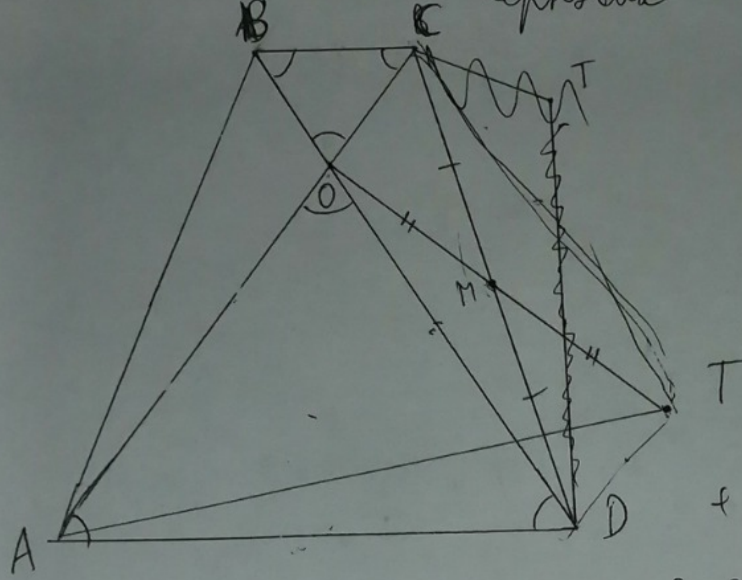


$\angle BCO = \angle OAD = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$, $ABCD$ - трапеция, ~~или~~ ~~параллелограм~~ $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH_2$ ($ABCD$ - не параллелограм, т.к. $BC \neq AD$). $BH_2 = BD \cdot \sin 60^\circ = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = 4{,}5 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{61}{81}$

Черновик



$(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4 =$

$= 31 + 3x^2y^2$

$= \cancel{3\cdot x}\left(1+\frac{x^2y^2}{3}\right)^2$

$31+3x^2y^2 = \left(1+\frac{x^2y^2}{3}\right)^2$

$31+3x^2y^2 = 1+\frac{2}{3}x^2y^2 + \frac{x^4y^4}{9}$

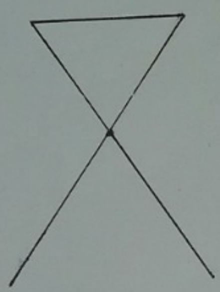
$x^4y^4+6x^2y^2+9 = 279+27x^2y^2$

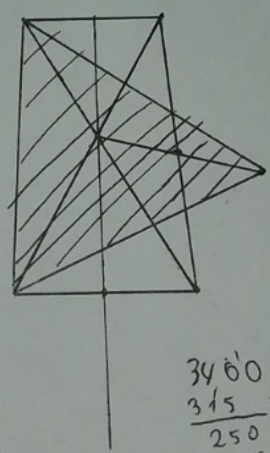
$x^4y^4 - 21x^2y^2 - 270 = 0$

$\cancel{D = \sqrt{441+1080} = 1521}$

$(x^2y^2-30)(x^2y^2+9) = 0$

$x^2y^2 = 30$





$3{,}9 \cdot 4{,}5 =$

$3{,}4 \cdot 3{,}9 =$

$\frac{3{,}4}{4{,}5} = \frac{34}{45}$

$$\begin{array}{r|l} 3400 & 45 \\ -315 & 0{,}7(5) \\ 250 & \\ -225 & \\ 250 & \end{array}$$