Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007813**

ID профиля: **866935**

Вариант 14

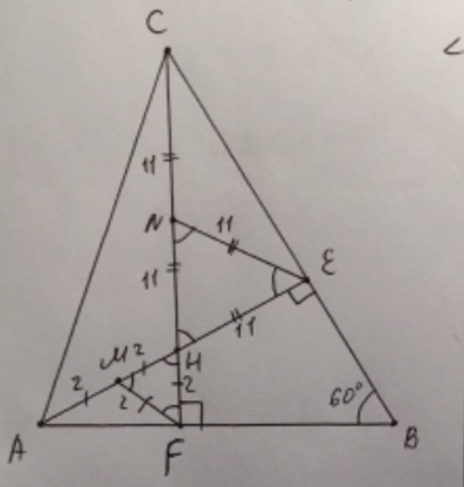
Лист ① Математика, 9 класс

Чистовик

№1. Дано:

$FM=2$; $EN=11$. $FM \parallel EN$.

$\angle ABC$ – ?; $S_{\triangle ABC}$ – ?; $R_{опис.}$ – ?



Решение

$FM = \frac{1}{2}AH = AM = MH$ (по св-ву медианы прямоуг. треугольника). $EN = \frac{1}{2}CH = CN = NH$ (по св-ву медианы прямоуг. треугольника. $\angle NEH = \angle FMH$ (накрест лежащие при $FM \parallel NE$ и сек. EM). $\angle NHE = \angle MHF$ (вертик.);

~~тогда~~ Но $\angle NHE = \angle NEH$, т.к. $\triangle HNE$ – р/б. Тогда $\angle MHF = \angle HMF \Rightarrow MF = HF = MF = 2$, $\triangle MHF$ – равносторонний. $\angle FNE = \angle MFH$ (как накрест. леж. при $FM \parallel NE$ и сек. FN) $\Rightarrow \angle NHE = \angle HEN = \angle ENH \Rightarrow \triangle NHE$ – равносторонний. Тогда $\angle HNE = \angle HEN = 60°$; $\angle ABC = 360° - \angle BFN - \angle BEN - \angle ENF = 60°$. $AE = AM + MH + EH = 2+2+11 = 15$. $AB = \frac{AE}{\sin\angle ABC} = \frac{15\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CF = \frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3}\cdot(2+11+11) = 5\sqrt{3}\cdot 24 = 120\sqrt{3}$. $BC = \frac{CF}{\sin\angle ABC} = \frac{24\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}\cdot 2}{3} = 16\sqrt{3}$. По теореме косинусов $\triangle ABC$: $AC^2 = (10\sqrt{3})^2 + (16\sqrt{3})^2 - 2\cdot 10\sqrt{3}\cdot 16\sqrt{3}\cdot \underbrace{\cos 60°}_{=\frac{1}{2}} = 300 + 768 - 480 = 588$, отсюда $AC = \sqrt{588} = 2\sqrt{147}$.

Лист ②

Математика
9 класс

Чистовик

№1. По теореме синусов $R_{опис.} = \dfrac{2\sqrt{147}}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{147}\cdot 2}{\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{49}\cdot 2 = 7\cdot 2 = 14.$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{\triangle ABC} = 120\sqrt{3}$; $R_{опис.} = 14$

Лист ③ Математика 9 класс

Чистовик.

№2. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ – записанные числа, тогда

$$\begin{cases} 30a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 450 \ (*) \\ a_1 + a_2 + \ldots + 14a_n = 450 \ (**) \end{cases}$$

вычтем из первого второе, получим: $29a_1 - 13a_n = 0$

$29a_1 = 13a_n$, числа 29 и 13 взаимно простые, тогда

$29a_1 = 13a_n = \text{НОК}(29; 13) \cdot x$, где $x \in N$. Т.к. 29 и 13 взаимно простые, то $\text{НОК}(29; 13) = 29 \cdot 13 = 377$.

При $x \geq 2$, $29a_1 = 13a_n \geq \overset{377 \cdot 2 > 450}{\cancel{754}}$, тогда $(*) > 450$, т.к. все числа натуральные, тогда $29a_1 = 13a_n = 377$.

Значит, $a_1 = 13$; $a_n = 29$. Подставим в $(*)$

$390 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 29 = 450$

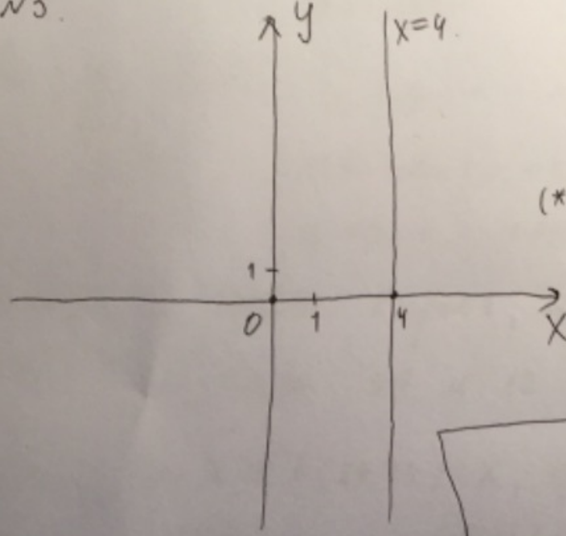
$a_2 + \ldots + a_{n-1} = 450 - 419 = 31$, но $13 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < 29$

Тогда, если кол-во чисел $a_2, \ldots, a_{n-1} = 1$, то их сумма $< 29 < 31$, а если кол-во чисел $a_2, \ldots, a_{n-1} \geq 3$, то их сумма $> 13 \cdot 3 > 31$, тогда всего на доске четыре числа $13; a_2; a_3; 29$, причём $a_2 + a_3 = 31$. Но тогда a_2 и a_3 соответственно равны 14 и 17 или 15 и 16, т.к. если $a_3 \geq 18$, $a_2 \geq 14$, то $a_2 + a_3 \geq 32$, а если $a_3 \leq 15$, то $a_2 \leq 14$, то $a_2 + a_3 \leq 29$, тогда $a_3 = 16 \Rightarrow a_2 = 15$ или $a_3 = 17 \Rightarrow a_2 = 14$.

Ответ: 13; 14; 17; 29 или 13; 15; 16; 29.

Лист 4 Чистовик

№3.



Дано: $A(x;y)$.

(*) $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

Окружность, B – центр:

(**) $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$; A, B – по разные стороны от прямой $x=4$.

a – ?

Ван

~~Решение~~

Из (*) $(x+a)^2+a^2-2xy+2y^2=0$, $(x+a)^2\geq 0$, тогда

$a^2-2xy+2y^2\leq 0 \Rightarrow |a|\leq|x|$, т. к. если $|a|>|x|$,

то $a^2-2xy+2y^2=(x-y)^2+z^2+y^2>0$, где $z>0$.

Из (**) $a^2x^2-2a^3x+a^4+a^2y^2-6ax-2a^2y+9=0$

$(ax-a^2)^2+a^2y^2-6ax-2a^2y+9=0$

$(ax-3)^2-2a^3x+a^2y^2-2a^2y+a^4=0$

$a^2(x-a)^2+a^2y^2-2a^2y+9-6ax=0$

$a^2(x-a)^2+(ay-a)^2-a^2+9-6ax=0$

Лист 5 Математика 9 класс №1.

Чистовик

Решение

~~Из (*) $\left(\frac{1}{2}x + 2a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right.$~~

Из (*) $(x+a)^2 + a^2 - 2xy + 2y^2 = 0$, $(x+a)^2 \geqslant 0$, тогда $a^2 - 2xy + y^2 \leq 0 \Rightarrow |a| \leq |x|$, т.к. если $|a| > |x|$, то $a^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)^2 + z + y^2 > 0$, где $z > 0$

Из (* *) $(ax - a^2)^2 + a^2y^2 - 6ax - 2a^2y + 9 = 0$

$\cancel{(ax-a^2)}$ $a^2(x-a)^2 + (ay-a)^2 - a^2 + 9 - 6ax = 0$

Отсюда $a^2(x-a)^2 + (ay-a)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$

$a^2 + 6ax - 9 \geqslant 0$;

$\cancel{a^2+6ax}$ $(a^2 + 3x)^2 - 9x^2 - 9 \geqslant 0$

$a^2 + 6ax \geqslant 9$

$a^2 + 6ax \geqslant 3^2$

Из (*) $(x-y)^2 + y^2 = -2ax - 2a^2$

$(x-y)^2 + y^2 = -2(a^2 + ax)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007813**

ID профиля: **866935**

Вариант 14

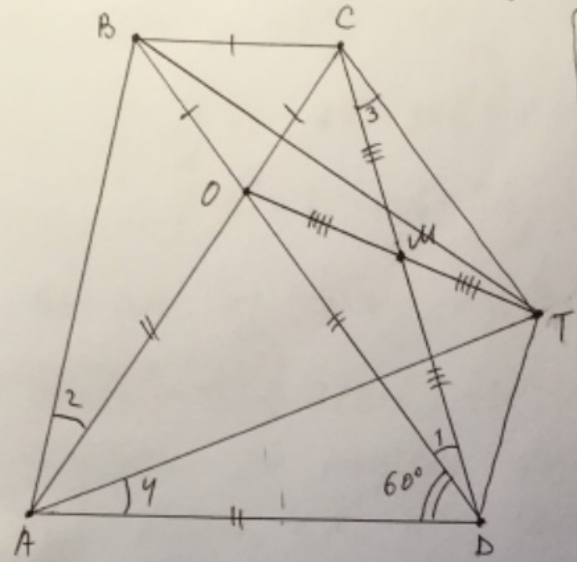
Лист ~~2~~ 3

Математика

9 класс.

Чистовик.

Дано: №6. а) Док-ть: $\triangle ABT$ – равносторонний



Решение.

$\angle OBC = \angle ADB = 60^\circ$, а они накрест лежащие при AD и BC и сек. $BD \Rightarrow BC \parallel AD$.

$\left.\begin{array}{l}\angle BOA = \angle COD\\ OB = OC\\ AO = OD\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD$ (по I признаку),

тогда $ABCD$ – р/б трапеция. $OCTD$ – параллелограмм, т.к. его диагонали делятся точкой пересечения пополам. $ABCD$ – р/б трапеция $\Rightarrow$ она вписанная, тогда $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 1 = \angle 3$ (как накрест леж. при $OD \parallel CT$ и сек. CD). $\angle COD = 180^\circ - 60^\circ$ (смеж. с $\angle AOD$), тогда $\angle ODT = 60^\circ$, т.к. $OCTD$ – параллелограмм. Тогда $\angle OCT = 60^\circ = \angle ODT$ $\angle ADT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow ACTD$ – впис 4-ник. Тогда $\angle 3 = \angle 4 = \angle 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle OAD = \angle BAT = 60^\circ$, аналогично $\angle ABT = 60^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ATB = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, тогда $\triangle ATB$ – равносторонний.

Лист 2

Математика
9 класс

Чистовик

№4. $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$, пусть $x^2=a$, $y^2=b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \ (*) \\ a^2+b^2-ab=37; \ (a+b)^2-3ab=37 \end{cases}$

Вычтем из 2-го первое, получим: $(a+b)^2-7(a+b)=30$

$(a+b)^2 - 7(a+b)-30=0$

По теореме Виета: $a+b=10$ или $a+b=-3$ – не удовлетворяет, т.к. $a\geq 0$, $b\geq 0$. тогда $a+b=10$, $a=10-b$.

Подставим в $(*)$: $7\cdot(10-b)+7b-3\cdot(10-b)\cdot b-7=0$

$70-30b+3b^2-7=0$

$3b^2-30b+63=0$

$b^2-10b+21=0$, по теореме Виета $b_1=7$; $b_2=3$.

Тогда $a_1=10-7=3$; $a_2=10-3=7$. В итоге

1) $a=3$, $b=7$ или 2) $a=7$, $b=3$

1) Получим: $(x;y)=(\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{7})$

2) Получим: $(x;y)=(\pm\sqrt{7};\pm\sqrt{3})$.

Ответ: $(\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{7})$; $(\pm\sqrt{7};\pm\sqrt{3})$.

Лист 1

Математика
9 класс

Чистовик

№5. Номер на синей стороне карточки можно выбрать пятнадцатью способами, и на синей тоже, тогда по правилу умножения получаем, $15^2 = 225$ различных карточек можно составить с помощью чисел от 1 до 15, но всего карточек 15^2, тогда присутствуют карточки со всеми возможными комбинациями чисел на сторонах. Всего дублей 15 ((1;1); (2;2); ... ; (15;15)).

~~1) Рассмотрим случай, когда фокусник выбрал ровно один дубль, тогда выбрать~~

Тогда фокусник может выбрать дубль 15 способами; ~~а вторую карточк~~ Нельзя выбирать второй карточкой ту, на которой есть хотя бы 1 такая же цифра, таких карточек для конкретного дубля: 1 (дубль, который уже взят) + + 2 · 14 (номер, который на дубле может быть на красной стороне или на синей и для каждого случая – 14 способов выбрать номер на другой стороне) = 29, тогда для каждого дубля вторую карту выбрать $225 - 29 = 196$ способов, по правилу умножения получаем: $15 \cdot 196 = 2940$ способов, но способы, когда выбрали 2 дубля посчитаны 2 раза, тогда нужно вычесть $C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 105$. В итоге: $2940 - 105 = 2835$ способов

Ответ: 2835