Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

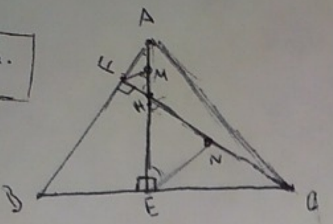
Шифр: **211007801**

ID профиля: **189808**

Вариант 14

Чистовик

1 задача.

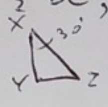


М - середина АН, $\angle AFH = 90^\circ$, т.к. CF - высота $\Rightarrow FM = MH = AM = 2$, аналогично с т. N и $\Delta HCE \Rightarrow EN = HN = NC = 11$ т.е. $AH = 4$, $CH = 22$

т.к. $EN \parallel FM$, то $\angle MEN = \angle FME$ при секущей ME, т.к. EN - медиана прям. Δ, то $EN = HN \Rightarrow \angle MEN = \angle NHE = \angle FHM$ как вертикальные. т.к. FM - мед. прям. Δ, то $FM = MH \Rightarrow \angle MHF = \angle MFH = \angle FMH \Rightarrow \angle FMH = 60^\circ = \angle MHF = \angle MFH = \angle NHE = \angle HEN$. $\angle HNE = 60^\circ$, т.к. $180^\circ - \underset{\angle NHE}{60^\circ} - \underset{\angle HEN}{60^\circ} = 60^\circ$. Тогда $\angle HCE = 180^\circ - 90^\circ - \angle CHE = 30^\circ$, аналогично с углом FAH. Тогда $\underline{\angle ABC} = 180^\circ - \angle BEA - \angle BAE = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = \underline{60^\circ}$.

т.к. $\angle FAH = 30^\circ$, то $FH = \frac{1}{2} AH = 2$, аналогично с $\Delta CHE \Rightarrow HE = 11$, тогда рассмотрим ΔBFC. $\angle BCF = 30^\circ$, $\angle BFC = 90^\circ \Rightarrow BF = \frac{1}{2} BC$, $CF = CH + HF = 22 + 2 = 24$. ~~т.к. ∠FCB = 30°, то~~

Рассмотрим прям. Δ с углом 30°



пусть $XZ = a$, тогда $YZ = \frac{1}{2}a$, тогда

$XY = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, т.е. $XZ = \frac{2XY}{\sqrt{3}}$, $YZ = \frac{XY}{\sqrt{3}}$

т.е. $BF = \frac{24}{\sqrt{3}}$, $BC = \frac{48}{\sqrt{3}}$. ~~найдем~~ $AE = AH + HE = 4 + 11 = 15$. $\underline{S_{\Delta ABC}} = \frac{AE \cdot BC}{2} =$

$= \frac{15 \cdot \frac{48}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{24 \cdot 15}{\sqrt{3}} = \underline{120\sqrt{3}}$. $AF = \frac{AH \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $BF = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$

Радиус опис. окр. равен $\frac{a \cdot b \cdot c}{S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{S_{\Delta ABC}} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot AC}{120\sqrt{3}} = \cancel{\frac{4\sqrt{3} \cdot AC}{3}} = \frac{4\sqrt{3} \cdot AC}{3}$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cos\angle ABC \cdot AB \cdot BC = 300 + 256 \cdot 3 - 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 160 \cdot 3 = \cancel{300}\ 3 \cdot (100 + 256 - 160) =$
$= 3 \cdot (196) = (14\sqrt{3})^2 \Rightarrow AC = 14\sqrt{3}$ $\underline{R} = \frac{14\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{3} = 14 \cdot 4 = \underline{56}$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{\Delta ABC} = 120\sqrt{3}$, $R_{опис} = 56$

Лист 2

Чистовик

Задача 2

Пусть самое маленькое это a, самое большое — b. Сумма остальных это Z, также числа из остальных больше a, меньше b.

Тогда было $a+Z+b$, также $a+Z+14b=450$, вычтем из одного другое.

Тогда $30a+Z+b=450$, также

Получим: $29a-13b=0$, также $b>a$, они все больше 0 и целые, натуральные

~~Первая пара чисел это $a=13$, $b=29$~~ $29a=13b \Rightarrow a \vdots 13$, $b \vdots 29$, тогда $a=13x$,

$b=29x$, где $x \geq 1$. т.е. $a \geq 13$, $b \geq 29$ тогда $Z=450-30a-b$, т.е. $Z \leq 450-30\cdot 13-29=450-390-29=31$. $\Rightarrow Z \leq 31$, ~~точнее $Z=450-30\cdot 13x-29x=450$~~

• Тогда при $x=1$ $a=13$, $b=29$, $Z=31$, т.е. Z это как минимум 2 числа, это либо 14 и 17, либо 15 и 16, ~~а другие варианты будут~~ при одном из них ≥ 18, другое будет <13, чего быть не может. Если это 3 числа, то возьмём наим. возможные, т.е. 14, 15, 16 и заметим, что $Z>31$, больше 4 чисел будут давать сумму больше

• При $x=2$ $a=26$, $b=58$, тогда $Z<0$, чего быть не может

При $x>2$ b и a будет ещё больше $\Rightarrow Z$ ещё меньше $\Rightarrow x$ не может быть ≥ 2.

Также $x \geq 1$, т.е. $x=$ только 1

Тогда числа на доске могли быть такими: 13, 14, 17, 29,
13, 15, 16, 29,

Ответ: 13, 14, 17, 29 или 13, 15, 16, 29

3 лист

Часть 1, 14 Вар, Математика, 9 кл.

Чистовик

3 задача

$2a^2+2ay+x^2-2xy+2y^2=0 \Rightarrow x^2+(2a-2y)x+(2a^2+2y^2)=0$ тогда это имеет решения относительно x при $D\geq 0$, т.е. $(2a-2y)^2-4(2a^2+2y^2) = 4a^2+4y^2-8ay-8a^2-8y^2 =$
$=-4a^2-4y^2-8ay=-(2y+2a)^2$, это должно быть больше или равно 0, но квадрат числа неотрицателен $\Rightarrow$ − квадрат числа не положителен $\Rightarrow$ $-(2y+2a)^2$ только равно 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2y+2a=0 \Rightarrow y=-a$. Тогда $D=0 \Rightarrow x_1=x_2=\frac{2y-2a}{2}=y-a=2y$, т.е.
~~эта точка~~ $x=2y$, $y=-a$, $x=-2a \Rightarrow a=-\frac{x}{2}$

Рассмотрим 2е ур-е $a^2x^2-(2a^3+6a)x+(2a^2y+a^2y^2+a^4+9)=0$, т.к. $y=-a$, то ур-е можно преобразовать: $y^2x^2+(2y^3+6y)x+(-2y^3+y^4+y^4+9)=0$ т.е.
$y^2x^2+(2y^2+6)yx+(2y^4-2y^3+9)=0$, тогда относительно x $D\geq 0$, D должен быть ≥ 0, $D=(2y^3+6y)^2-4(2y^6-2y^5+9y^2)=4y^6+36y^2+24y^4-8y^6-8y^5+36y^2=-4y^6-8y^5+24y^4=$
$=4y^4(-y^2-2y+6)$, что должно быть больше или равно 0 ~~т.е. $4y^4(y-1)^2$~~, также $4y^4(-y^2-2y+6)=-4y^4(y^2+2y-6)$
$=-4y^4((y+1)^2-7)$

2-ое ур-е
$(2) \Rightarrow (x-(a+\frac{3}{a}))^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow$ радиус этой окр. $=\sqrt{5}$

Рассмотрим 2-е ур-е $a^2x^2-6ax+9+a^2y^2-2a^2y+a^4-2a^3x+a^2x^2-a^2x^2+a^2-a^2 = (ax-3)^2+(ay-a)^2+(ax-a^2)^2$
$-a^2x^2-a^2=0$, т.е. ~~$(ax-a^2)^2+(ax-3-ax)(ax+ax-3)+(ay-a-a)(ay-a+a)=(ax-a^2)^2+3(2ax-3)+ay(ay-2a)$~~ т.е. $(ax-3)^2+(ay-a)^2=a^2x^2+a^2-a^2x^2+2a^3x-a^4=a^2+2a^3x-a^4=a^2(-a^2+2ax+1)$

т.е. $-a^2+2ax+1\geq 0$, т.е. $D=4x^2+4\geq 0$, что всегда верно. Также $\Rightarrow$ ~~координаты этой т. В~~
$(ax-3)^2+(ay-a)^2=a^2(-a^2+2ax+1) \Rightarrow (x-\frac{3}{a})^2+(y-1)^2=-a^2+2ax+1 \Rightarrow$
координаты т. В равны: $x=\frac{3}{a}$ ($a\neq 0$), $y=1 \Rightarrow a=3x$. Тогда Если А слева, В справа, то $a=-\frac{x_1}{2}$, $x_1<4$, $a=3x_2$, $x_2>4 \Rightarrow a>12$, $a<-2$, чего быть не может.

А справа, В слева, то $x_1>4$, $x_2<4$ $a=3x_2$, $a=-\frac{x_1}{2} \Rightarrow a>-2$, $a<12$, также $a\neq 0$
~~также~~

т.е. $a\in(-2;0)\cup(0,12)$

211007801 (U189808 M1274926)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007801**

ID профиля: **189808**

Вариант 14

Часть 2, Вар 14, математика, 9 кл.

Лист 1

Чистовик

Задача 1 (4) $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 & (1) \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 & (2) \end{cases} \to x^4+y^4-x^2y^2-30=7 \Rightarrow x^4+y^4-x^2y^2-30=7x^2+7y^2-3x^2y^2$

$\Rightarrow x^4+y^4+2x^2y^2=7(x^2+y^2) \Rightarrow (x^2+y^2)(x^2+y^2)=7(x^2+y^2)+30$ $x^2+y^2\neq 0$, т.к. иначе

$x=y=0$ $7x^2+7y^2-3x^2y^2=0$, а не 7.

пусть $a=x^2$, $b=y^2$

тогда $\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ (a+b)^2-7(a+b)=30 \end{cases} \to 7a+7b=7+3ab$ пусть $a+b=z$, тогда

$(z-7)z=30 \Rightarrow z_{1,2}=10; -3$ тогда $\left[\begin{array}{l} a=-b-3 \quad (1) \\ a=-b+10 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $a=-b-3$

тогда $x^2=-y^2-3 \Rightarrow x^2+y^2=-3$, но $y^2\geq 0$, $x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2=-3$ не имеет решений

(2) $a=-b+10$

тогда $x^2=10-y^2$, тогда $7a+7b=7+3ab \Rightarrow 7b-7b+70=7+3b(10-b) \Rightarrow -3b^2+30b-63=0$

т.е. $b^2-10b+21=0 \Rightarrow b_{1,2}=3; 7 \Rightarrow a_{1,2}=7; 3$

т.е. $x^2=3$ и $y^2=7$ или $x^2=7$ и $y^2=3$, т.е. $(x;y)=(\sqrt{3};-\sqrt{7}); (\sqrt{3};\sqrt{7}); (-\sqrt{3};-\sqrt{7});$

$(-\sqrt{3};\sqrt{7})$ и наоборот (т.е. вместо 3 − 7, вместо 7 − 3)

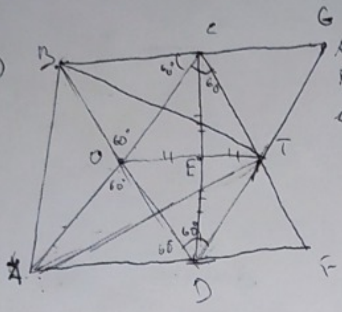
Ответ: $(\pm\sqrt{7};\pm\sqrt{3}); (\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{7})$

часть 2, Вср 14, математика, 9 кл.

Лист 2

Чистовик

Задача 3 (б) а)



$AD = OD = AO$, $\angle AOD = \angle ODA = \angle OAO = 60°$, т.к. $\triangle BOC$ – правильный
$BO = OC = BC$, $\angle BOC = \angle OCB = \angle CBO = 60°$, т.к. $\triangle AOD$ правильный
$\angle COD = 120°$, $\angle BOA = 120°$
$CE = ED$, $OE = ET$ ~~тогда~~

$\Rightarrow OD = CT$; $OC = DT$

$OCTD$ – пар-мм, т.к. диагонали делятся пополам $\Rightarrow \angle ODT = 60°$, $\angle OCT = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ADT = 120°$, $\angle TCB = 120°$

$\left.\begin{array}{l}\angle ADT = \angle TCB = 120° \\ DT = OC = BC \\ AD = OD = CT\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BCT = \triangle TDA \Downarrow BT = TA$, $\left.\begin{array}{l}\angle BOA = 120° = \angle BCT \\ BO = BC \\ AO = OD = CT\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOB = \triangle BCT \Downarrow BT = AB$

~~тогда~~

$BT = TA$, $BT = AB \Rightarrow AB = BT = TA \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный

б) $\angle CBD = \angle BDA = 60° \Rightarrow BC \parallel AD$. $AD = 4$, $BC = 3 \Rightarrow BO = 3$, $AO = 4$, $\angle BOA = 120°$

$AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2\cos\angle BOA \cdot BO \cdot OA = 9 + 16 + 12 = 37 \Rightarrow AB = \sqrt{37}$

тогда $S_{\triangle ABD} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$, т.к. $\triangle ABT$ р-стор. ($S = \frac{a \cdot h}{2}$ $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$)

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot$ высоту от BC до AD, она равна высота $\triangle BOC$ + высота $\triangle AOD$ (т.к. $BC \parallel AD$)

т.е. $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

Тогда $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{37\sqrt{3}}{4}}{\frac{49\sqrt{3}}{4}} = \frac{37}{49}$

Ответ: ~~а)~~ $37/49$

211007801 (U189808 M1274927)

Лист 3

Часть 2, Вар 14, математика, 9 кл

Чистовик

Задача 2 (5) ~~Пусть~~ ~~Первую~~ Пусть первая карточка это дубль, тогда её выбрать 15 способов. Вторую карточку $- 14^2$ способов (14 на первой стороне, 14 на второй) т.е. $15 \cdot 14^2$, но ~~первая~~ ситуацию, где 1 карточка и 2 обе дубли посчитали 2 раза, таких $\frac{15 \cdot 14}{2}$ ~~[illegible]~~ дублей т.е. всего способов =

$$15 \cdot 14^2 - \frac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 14\left(14 - \frac{1}{2}\right) = 15 \cdot 14^2 - 15 \cdot 7 = 15 \cdot 14^2 - 105 = 210 \cdot 14 - 105 = 2940 - 105 = 2835$$

Ответ: ~~$15 \cdot 14^2 - 105$~~ 2835

211007801 (U189808 M1274927)