# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007769**

ID профиля: **801458**

Вариант 14

$+x^2-2xy+2y^2=0$

Черновик стр 3

$144-4\cdot 27$

$4\cdot 3\cdot 4\cdot 3 \quad 4\cdot 3\cdot 9$

$12(12-9)$

$\sqrt{36}$ 6

$y=\frac{x}{2}$

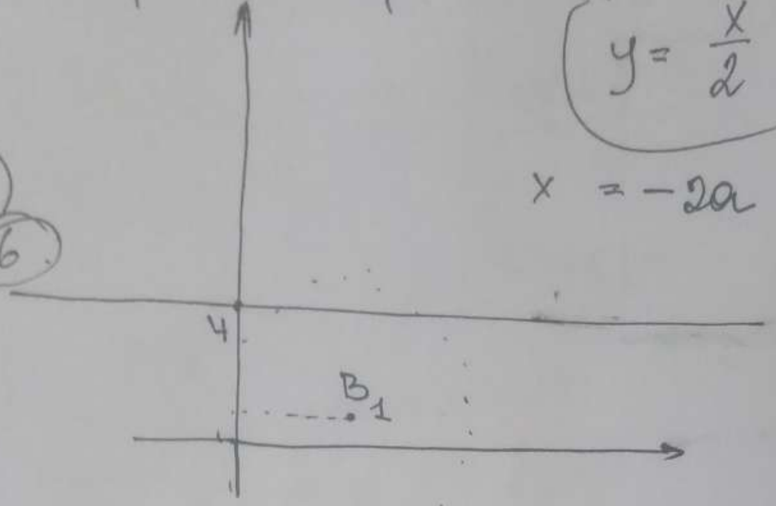
$y>4$

$x>8$

$x=-2a$

$-2a>8$

$a<-4.$




$\underbrace{2a^2}_{>0}+2ax+\underbrace{x^2}_{\geq 0}-2xy+\underbrace{2y^2}_{\geq 0}$

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \frac{x^2}{2}-2xy+2y$

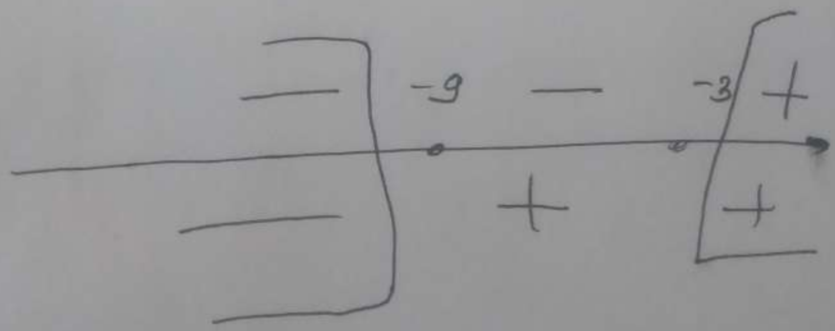
$2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}y$

$2x(a-y)=\cancel{2y^2}\ -(x^2+2y^2+2a^2)$

$2x(y-a)=x^2+2y^2+2a^2$

$\left(\sqrt{2}a+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2=-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}y\right)^2$

$\sqrt{-\left(\sqrt{2}a+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}y$



$\in \mathbb{N}$ $\frac{}{}$ ! $\sqrt{16+484+176\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$a<b<c<d\ldots$

$22\times22=484$ $\quad$ $8\times22=176$

$30a+n+k=450$ $\quad$ $300+88\sqrt{3}$

$R=\sqrt{\frac{AC^2}{4\cdot\frac{3}{4}}}$ $\quad$ $a+n+14k=450.$

$\underline{a<k.}$

$a<15$

$29a-13k=0$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$29a=13k$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

29 58

$30\times13=390$ $\quad$ $390+29=419$

любое из чисел $\in n > 13$

$\to 13+14+15$

432 13

$450-419=31$

$2x\pm\sqrt{D}>16$

$-4x^2-16ax-2a^2\geq0$

$\frac{2x\pm\sqrt{D}}{2\cdot2}>4$

$4x^2-4\cdot2\cdot(x^2+2ax+2a^2)\geq0$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

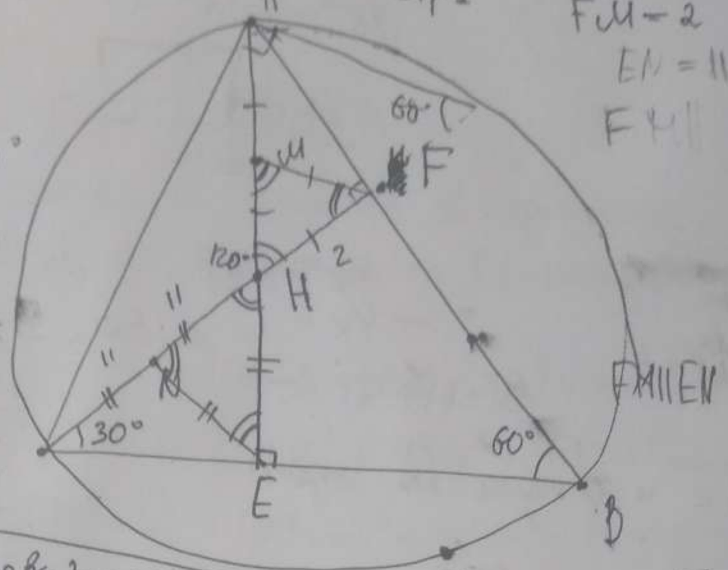
Черновик
стр2

N1 Черновик
стр1

$\sin 60 = \frac{AC}{2R}$ $\qquad$ FM – 2 $\qquad$ ?

$2R = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$ $\qquad$ EN = 11 $\qquad$ EN = 11

FM ||

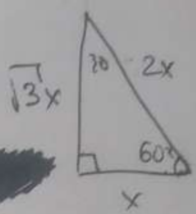



[redacted]

$$\begin{array}{r|l} -450 & 14 \\ \underline{42} & 32 \\ -30 & \\ \underline{28} & \\ 2 & \end{array}$$

C

$AC = \sqrt{4^2 + 22^2 + 2\cos 30^\circ \cdot 4 \cdot 22}$




24

[redacted]

$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$ $\qquad$ A

$\frac{2x}{\sqrt{3}x} = \frac{\ell}{24}$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$ $\qquad$ 16

$x^2 \cdot a^2 - x(2a^3 + 6a)$ $\qquad$ $\frac{48}{\cancel{\sqrt{3}}}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y^2a^2 - y(2a^2)$

$2xa(a^2+6)$ $\qquad$ $+\frac{(a^2+6)^2}{a^2}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 15$ $\qquad$ $\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 8 \\ \hline 120 \end{array}$

$2ay \cdot a$

$(ax - a^2 + 6)^2 + (ay - a)^2 = (a^2+6)^2 + a^2 - a^4 - 9$

$(ax - a^2 + 6)^2 + a^2(y-1)^2 = a^4 + 36 + 12a + a^2 - a^4 - 9$

$(ax - a^2 + 6)^2 + a^2(y-1)^2 = \cancel{36} + 12a + a^2 + 27$

$(x - a + \frac{6}{a})^2 + (y-1)^2 = \frac{12a + a^2 + 27}{a^2}$

a: $a - \frac{6}{a}$ $\qquad$ b: 1

Чистовик

№3 (стр 3)

Сначала рассмотрим точку B.

Стандартно окружность задается формулой

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ где $(a;b)$ – координаты центра

$\Rightarrow a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

$x^2a^2-x(2a^3+6a)+y^2a^2-y(2a^2)+a^4+9=0$

$x^2a^2-2xa(a^2+6)+(a^2+6)^2+y^2a^2-2ay\cdot a+a^2=a^4+36+12a^2+a^2-a^4-9$

$\left(x-a+\frac{6}{a}\right)^2+(y-1)^2=\frac{12a+a^2+27}{a^2}=\frac{(a+9)(a+3)}{a^2}$

$\Rightarrow$ координата т.B по $y=1$

$\Rightarrow$ у т.A коор-та по $y$ должна быть $>4$

т.к это $\geq 0$, то $a\in(-\infty;-9]\cup[-3;+\infty)$

Теперь рассмотрим т.A:

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}$

$2a^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot a\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}-2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot y+2y^2=0$

$\left(\sqrt{2}a+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}y\right)^2=0$

два квадрата в сумме дают 0, только если каждый из них $=0$.

$\Rightarrow y=\frac{x}{2}$; $x=-2a$: $y>4$ при $x>8$

при $a<-4$

Ответ: $a\in(-\infty;-9]$

Чистовик

N2

(стр 2)

Обозначим первое (самое маленькое число послед-сти) за $a$. Самое большое за $k$. Сумму чисел между ними за $n$. Тогда:

$$\left.\begin{aligned}30a+n+k&=450\\ a+n+14k&=450\end{aligned}\right\}$$

$a<k$

$a\leq 15$

$\uparrow$

т.к. $30\cdot 15=450$

значит $a$ уж точно $\leq 15$

Аналогично $k\leq 32$

вычтем из 1го уравнения второе.

$29a-13k=0$

$29a=13k$ т.к. все числа натуральные, то

$29a \vdots 13$ и т.к. $13 \perp 29$, то $a \vdots 13$ а т.к $a\leq 15$, то $\underline{a=13}$

$\Rightarrow \underline{k=29}$

$\Rightarrow 30\cdot 13+29=450-n=419$

$n=31$

числа в сумме дающие $n$ все $>13$ и $<29$

$\Rightarrow$ $n$ не может составлять одно число (т.к $31>29$)

и не может составлять три числа (т.к. $14\cdot 3>31$)

$\Rightarrow n=14+17$ $n=15+16$ больше вариантов нет

(т.к. $18+\underline{13}$, $19+\underline{12}$ и т.д. а числа $>\underline{13}$)

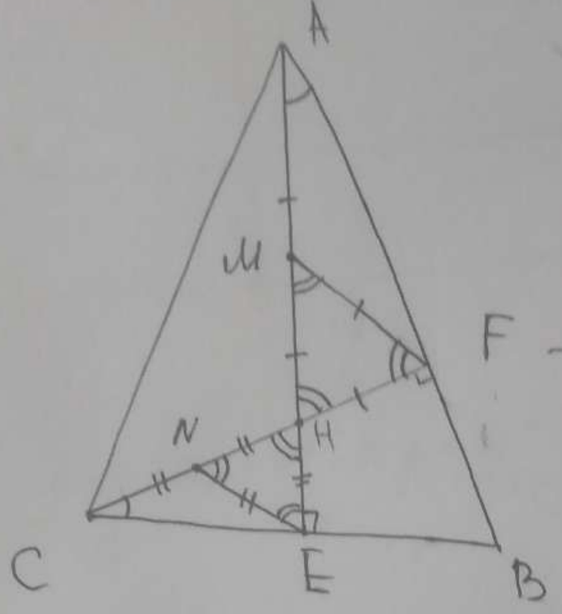
Ответ: 13; 14; 17; 29 – 1 вариант

13; 15; 16; 29 – 2 вариант

Чистовик.

N1

стр. 1



$FM = 2$

$EN = 11$

$FM \parallel EN$

---

$\angle ABC - ?$

$S_{ABC} - ?$

$R - ?$

т.к $\triangle ABC$ - остроуг., то точка пересеч. высот (т $H$) - внутри $\triangle$-ка.

1) $\triangle AFH$ - прямоуг $\Rightarrow MF = MH$, $\angle MFH = \angle MHF$

Аналогично $\triangle CEH$.

2) $\angle MHF = \angle NHE$ как верт

3) $\angle FMH = \angle HEN$ как накрест. лежащие при $FM \parallel EN$

Аналогично $\angle HNE$.

$\Rightarrow$ $\triangle MFH$ и $\triangle NEH$ - равносторон.

$\Rightarrow \angle HCE = 30°$ (т.к. $HE = \frac{1}{2} CH$) $= \angle HAF$

$\Rightarrow \angle ABC = 90° - \angle HCE = 60°$

4) $CB = CE + EB = \sin 60° \cdot CH + tg\, 30° \cdot AE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 22 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 15 =$

$= \sqrt{3}\left(11 + \frac{15}{3}\right) = \sqrt{3}(11+5) = \sqrt{3} \cdot 16.$

5) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 16 \cdot AE}{2} = 8\sqrt{3} \cdot 15 = 120\sqrt{3}$

6) По теореме косинусов: $AC = \sqrt{4^2 + 22^2 + 2 \cdot \cos 30° \cdot 4 \cdot 22} =$

$= \sqrt{500 + 88\sqrt{3}}$ т.к. $\angle AHC = 180° - \angle CHE = 120°$

$\Rightarrow R = \frac{AC}{\sin 60° \cdot 2} = \sqrt{\frac{500 + 88\sqrt{3}}{3}}$ - по теореме синусов

Ответ: $\angle ABC = 60°$, $S_{ABC} = 120\sqrt{3}$, $R = \sqrt{\frac{500 + 88\sqrt{3}}{3}}$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

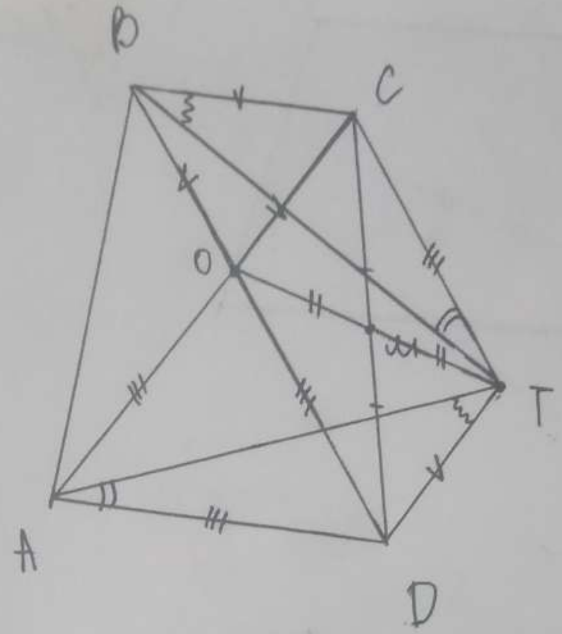
Шифр: **211007769**

ID профиля: **801458**

Вариант 14

Чистовик (стр 3)

№3




Дано:

$ABCD$ - выпуклый четыр-к

$AC \cap BD = т O$

$\triangle AOD$, $\triangle BOC$ - правильные

т $M$ - середина $CD$

т [redacted] $T$ симметр. [redacted] отн. т $M$ с т $O$

$BC = 3$

$AD = 4$

Док-ть: $\triangle ABT$ - прав.

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

1) $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ - правильные

$\Rightarrow \angle BOC = \angle BCO = \angle CBO = \angle OAD = \angle AOD =$

$= \angle ODA = 60°$

$\Rightarrow \angle COD = 120° = 180° - \angle AOD$

2) $CODT$ - паралл-м (т.к. $OM = MT$, $CM = MD$) $\Rightarrow CO \parallel TD$, $CT \parallel OD$,

$CT = OD$, $OC = TD$, $\angle CTD = 120°$, $\angle OCT = \angle TDO = 60°$

3) $\triangle BCT = \triangle TDA$ (т.к. $BC = TD$, $CT = AD$, $\angle BCT = \angle TDA = 120°$)

$\Rightarrow$ [redacted] равны все соответств. элементы.

4) $\angle CBT + \angle CTB = 180° - 120° = 60° \Rightarrow \angle BTA = 120° - 60° = 60°$

$\Rightarrow \triangle ABT$ - правильный ($BT = AT$, $\angle BTA = 60° \Rightarrow \angle TBA = \angle TAB = \frac{120°}{2} = 60°$)

ч.т.д.

5) $ABCD$ - трапеция

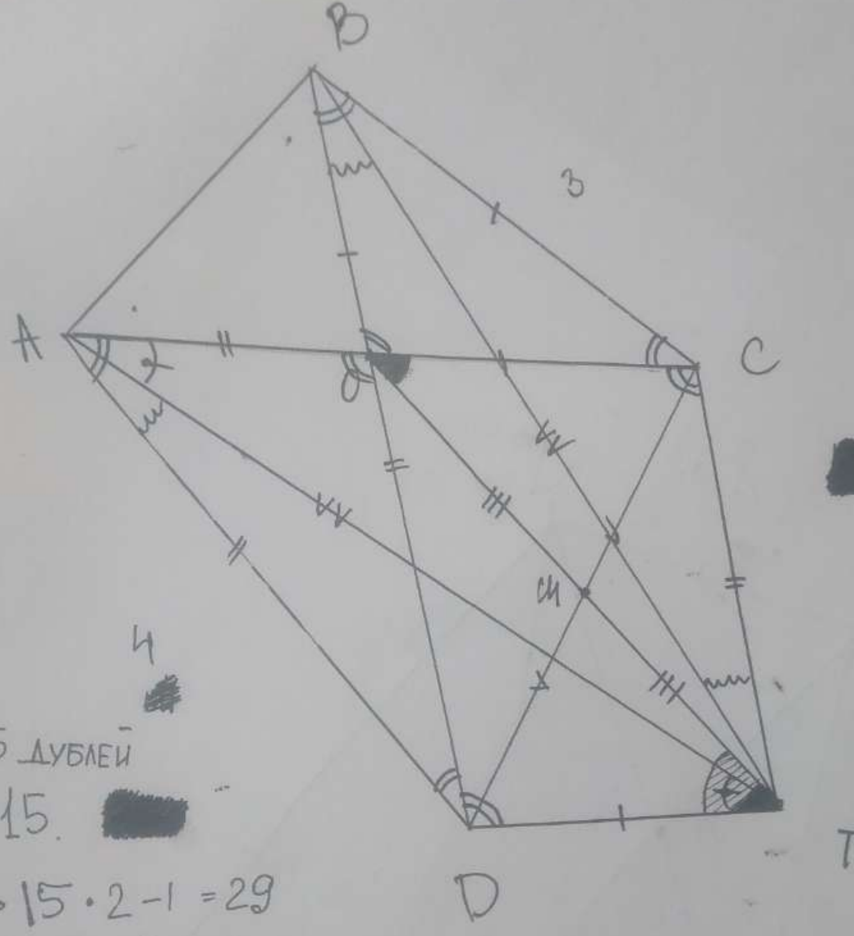
т.к. $\angle CAD = \angle ACB = 60° \Rightarrow BC \parallel AD$ (т.к. $BC \neq AD$ $BA \nparallel CD$)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot AC \cdot \sin 60° = \frac{7 \cdot 7}{4} \cdot \sqrt{3} = 12{,}25 \cdot \sqrt{3}$

$$S_{ABT} = \frac{AT \cdot AT \cos 30°}{2} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \cancel{\frac{49}{4}} \frac{37\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{49 \cdot \sqrt{3}} = \frac{37}{49}$$

Ответ: $\frac{37}{49}$.




$Ab =$ [redacted]
$BO^2 + AO^2 +$
$+ \cos 60°$

4 [redacted]

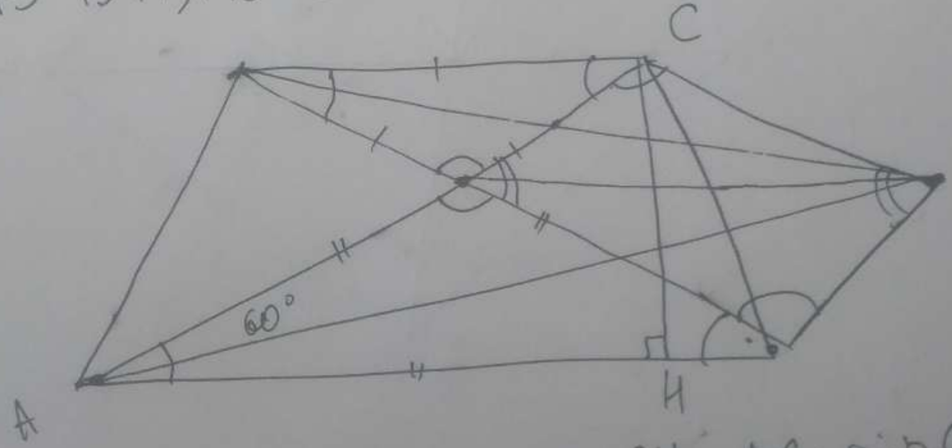
15 ДУБЛЕЙ

15. [redacted]

$1 \cdot 15 \cdot 2 - 1 = 29$

$15^2 - 14^2 =$
$= (15-15+1)(15+15-1) = 29 \cdot 1 = 29$

T



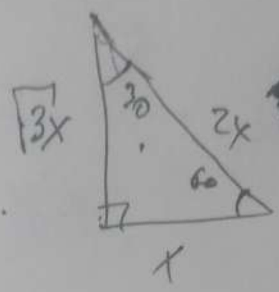

$CH = AC \cdot \sin 60°$

Черновик стр2

$\frac{7}{2} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$= 12,25$

15 дублей



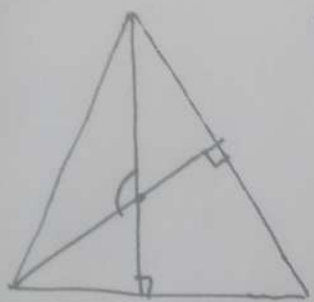

[redacted] 1·15 - 15 карточек.

15·15

$15 \cdot 15 - (15-1)^2$

14·14

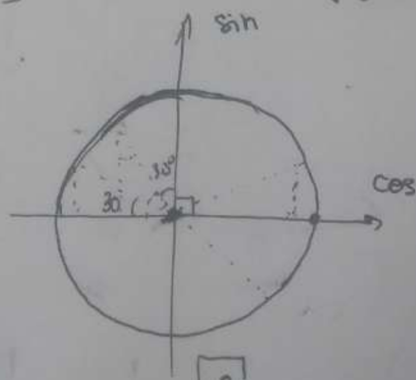
$(15 - 15+1)(15+15-1) = 1 \cdot 29$



2 11 $\sqrt{4^2 + 22^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 22}$

$$\begin{array}{r} \times\ 15 \\ 14 \\ \hline 60 \\ +\ 15\ \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 210 \\ 14 \\ \hline 84 \\ +\ 21\ \ \\ \hline 2940 \end{array}$$

$\sqrt{588}$




$\sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot \cos [redacted] 60° \cdot 3 \cdot 4}$

$\sqrt{9+16+12} = \sqrt{37} \Rightarrow \frac{37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{37 \cdot \sqrt{3}}{4}$

16

$$\begin{array}{r} \times\ 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ +\ 44\ \\ \hline 484 \end{array}$$

2

$4\sqrt{147}$

$2\sqrt{147}$

№4

Черновик стр 1.

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=7$

$x^4+y^4-x^2y^2=37.$

3 5 2

$xy=V$ $\quad l>0$ $\quad 10 \mid -3$

$x^2+y^2=l$

$7l-3V^2=7$

$l^2-3V^2=37$

$l^2-7l-30=0$

$l\ldots 10$

$V\ldots$

$x\ldots$

$y\ldots$

$x^4+y^4+\underline{\underline{2x^2y^2}}$

$x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2-x^2y^2=37$

$(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37.$

$x=\frac{\sqrt{21}}{y}$ $\qquad \frac{21}{y^2}+y^2=10$

$y^2=t$

$21+t^2=10t$

$t^2-10t+21=0$

| xy | x | y |
|---|---|---|
| $\sqrt{21}$ | $\pm 3$<br>$\pm 7$ | $\pm\sqrt{7}$<br>$\pm\sqrt{3}$ |
| $-\sqrt{21}$ | $\pm -7$<br>$\pm 3$ | |

$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$ $\qquad \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Чистовик (стр 2)

N2

1) Всего дублей у нас 15шт.

=> [redacted] для того чтобы из 2ух карт был один дубль – есть 15 вариантов дубля.

2) В дубле использовано одно число и на второй карточке его быть не должно

=> кол-во карточек без этого числа $= 14 \cdot 14$.

3) Итого у нас 15 вариантов дубля для каждого из которых по $14 \cdot 14$ вариантов второй карты. (при условии, что т.к у карточек есть цвет стороны, то карточки 14;2 и 2;14 (к примеру) будут различны)

Всего вариантов: $15 \cdot 14 \cdot 14 = 2940$

Ответ: 2940 способов.

Чистовик (стр 1)

№1

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

Сделаем замену: $(xy)^2=V$ ОДЗ

$x^2+y^2=\ell$ $\Rightarrow \begin{cases} \ell \geq 0 \\ V \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7\ell-3V=7 \\ \ell^2-3V=37 \end{cases}$$

Вычтем из 2го 1ое

$\ell^2-7\ell-30=0$

$\ell=10$ (-3 не подходит по ОДЗ)

$\Rightarrow V=21.$

$70-7=3V$

$\frac{63}{3}=V$

$$\Rightarrow \begin{cases} (xy)^2=21 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=\pm\sqrt{21} \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$ [redacted]

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{21}}{y} \\ y^2+\frac{21}{y^2}=10 \end{cases}$$

Замена ОДЗ:

$t=y^2;\ t\geq 0$ $\Rightarrow t^2-10t+21=0$

$\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\pm\sqrt7 \\ y=\pm\sqrt3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt3 \\ x=\pm\sqrt7 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} x=\frac{-\sqrt{21}}{y} \\ y^2+\frac{21}{y^2}=10 \end{cases}$$

Аналогично $y=\left[\begin{array}{l} \pm\sqrt7 \\ \pm\sqrt3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\mp\sqrt7 \\ x=\mp\sqrt3 \end{array}\right.$

Ответ: $(\sqrt7;\sqrt3)$, $(-\sqrt7;\sqrt3)$, $(\sqrt7;-\sqrt3)$, $(\sqrt3;\sqrt7)$; $(-\sqrt3;\sqrt7)$; $(\sqrt3;-\sqrt7)$; $(-\sqrt7;-\sqrt3)$; $(-\sqrt3;-\sqrt7)$