Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

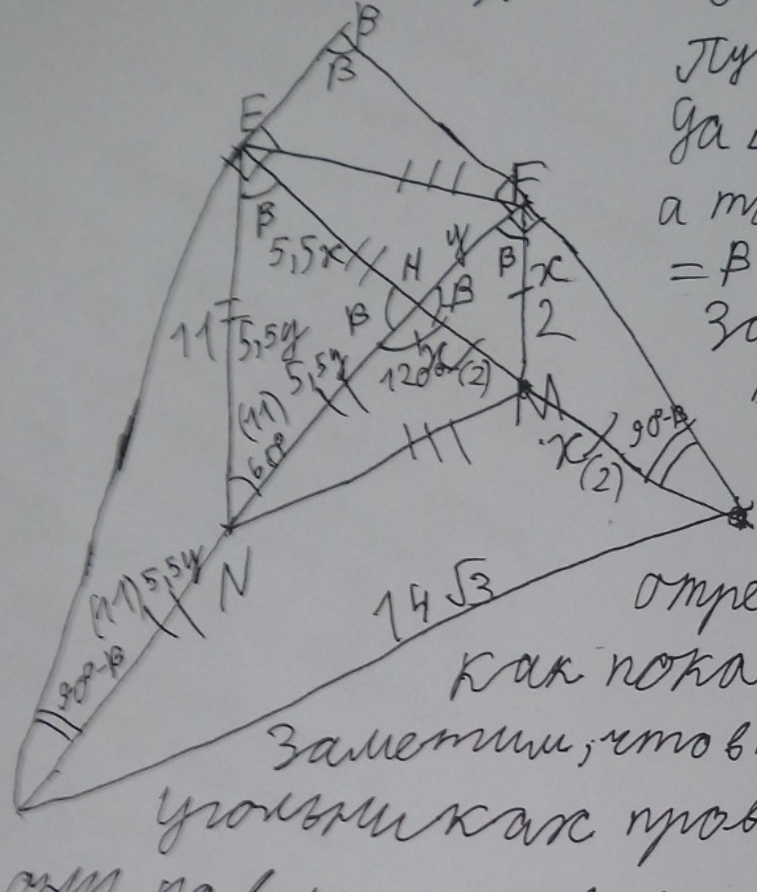
Шифр: **211007708**

ID профиля: **369439**

Вариант 14

$\boxed{1}$

Чистовик №1



Решение:

Пусть: $\angle B = \beta$; тогда $\angle BAE = \angle ECF = 90^\circ - \beta$; а также $\angle FHA = \angle EHC = \beta$.

Заметим, что ΔEHN и FMH подобны по трём углам с $AK = 5{,}5$; отметим отрезки за x и y как показано на рисунке;

Заметим; что в некоторых прямоугольниках проведены медианы и они равны половине гипотенузы; откуда будет следовать равнобедренность ΔEBN и FMH; $\angle NEM = \angle NFM$; откуда будет следовать вписанность и равнобедренность этой трапеции; (т.к. $EH = HN$ в r/б трапеции) откуда $y = x = 2$; а также треугольники и трапеции равносторонние; а значит $\angle B = 60^\circ$; по теореме ~~к~~ косинусов в ΔCHA; где угол $CHA = 120^\circ$; т.к. смежный с $\angle EHC = 60^\circ$; $\cos\angle 120^\circ = \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow CA^2 = 22^2 + 4^2 + \frac{\cancel{2}}{2}\cdot 22\cdot 4 = \cancel{544}\ 588 \Rightarrow CA = \sqrt{588} =$
$= 14\sqrt{3}$; а по теореме синусов: $2R = \frac{14\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{14\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow R = 14$; $\cancel{S}\ \cancel{4}\ R = \cancel{\frac{4S}{abc}}\ \frac{abc}{4S} \Rightarrow \cancel{R}\ S = \frac{abc}{4R}$;

Чистовик

№1 (продолжение)

Поэтому надо найти стороны исходного треугольника: $OF = 24$; а также можно найти, что $BF = 7$ и $BC = 25$; $EA = 15$; можно найти; что $EB = \cancel{8}\ 20$; $BA = 25$)

Ответ: $R = 14$; $\angle B = 60^\circ$

$\boxed{2}$

Чистовик Задача №2 $\boxed{3}$

Обозначим числа за $a_1; a_2; a_3 \dots a_n$; причём $a_n > a_{n-1} > a_{n-2} \dots > a_2 > a_1$; тогда a_1 наименьшее; и a_n – наибольшее; пусть $a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n = k$, тогда из условия:

$k + 29a_1 = 450 = k + 13a_n$

$\cancel{k} + 29a_1 = \cancel{k} + 13a_n$

$29a_1 = 13a_n$; а также ~~и~~ если $a_n \geq 33$, то $14a_n > 450$; аналогично a_1 будет меньше 15; ~~или же~~ $a_n < 33$ и $a_1 < 15$.

$29a_1 = 13a_n$; 29 и 13 взаимно просты, а значит $a_n \vdots 29$ и $a_1 \vdots 13$; из предыдущих неравеств подходит только $a_n = 29$ и $a_1 = 13$, т.к. других чисел делящихся на 29 и 13 в неравенства не входят; заметим, что $14 \cdot 29 + 13 = 29 + 13 \cdot 30 = 419$; не хватает $\overset{31}{\cancel{13}}$; причём другие числа лежат в промежутке $[14; 28]$; 1 число максимум 28, а 3 числа минимум это $14 + 15 + 16 = 45$; значит чисел кроме a_1 и a_n будет 2; легко убедится, что $31 = 14 + 17 = 15 + 16$ и других способов нет

Ответ: 13; 14; 17; 29 и 13; 15; 16; 29.

211007708 (U369439 M1277752)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007708**

ID профиля: **369439**

Вариант 14

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=7$ Черновик

$x^4+y^4-x^2y^2=37$

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=7$

$7(x+y)^2-14xy-3x^2y^2=7$

$x+y=a$

$xy=b$

$7(x+y)^2-17x^2y^2=7$

$a^4-4ba^2+b^2=37$

$7a^2-14b-3b^2=7$

$(x^2+y^2)^2-3x^2y^2$

$((x+y)^2-2xy)^2-3x^2y^2$

$\cancel{\frac{b}{a^2}}=t$

$7a^2-17b^2=7$

$(a^2-2b)^2-3b^2=37$

$a^4-4ba^2+4b^2-3b^2=37$

$$\begin{cases} a^4-4ba^2+b^2=37 \quad \cancel{\cdot a^4} & |\cdot 7 \\ 7a^2-17b^2=7 & |\cdot 37 \end{cases}$$

$(a+b)^2-7b-\cancel{7a}-c=0$

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=7$

$(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37$

$(x^2+y^2)^2-7x^2-7y^2=30$

$$\begin{array}{r} 259 \\ \times\ 37 \\ 7 \\ \hline 49 \\ 210 \\ \hline 259 \end{array}$$

$7a^4-28ba^2+7b^2=37\cdot 7$

$$\begin{array}{r} 259 \\ +\ 370 \\ \hline 629 \end{array}$$

$259a^2-629b^2=7\cdot 37$

$7a^4-259a^2-28ba^2+636b^2=0$

$7(a^4-\cancel{37}ba^2+b)-36$

211007708 (U369439 M1277753)

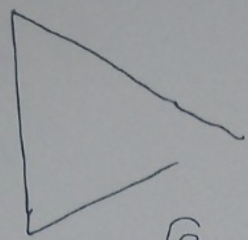
Черновик

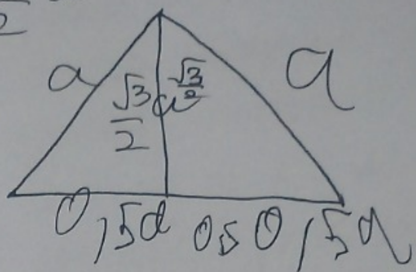
$1 - 0{,}25 = 0{,}75 = \frac{3}{4}$

$\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot a$

25+12

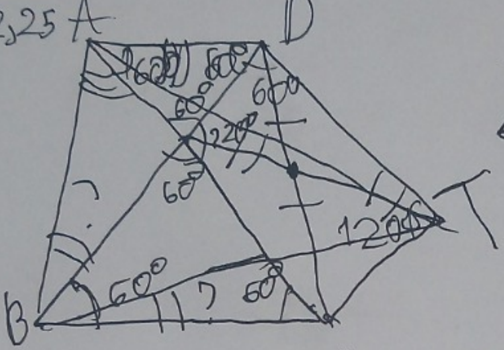


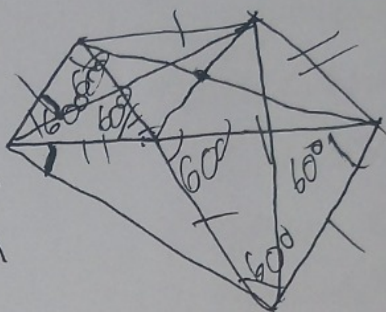


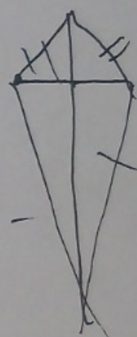
$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ \times\ 3{,}5 \\ \hline 175 \\ 1050 \\ \hline 12{,}25 \end{array}$$

$2\sqrt{3}$

$1{,}5\sqrt{3}$



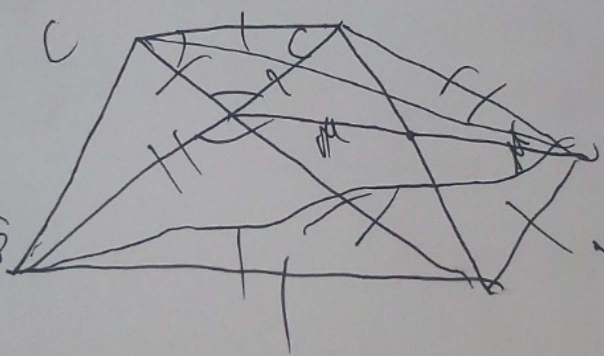


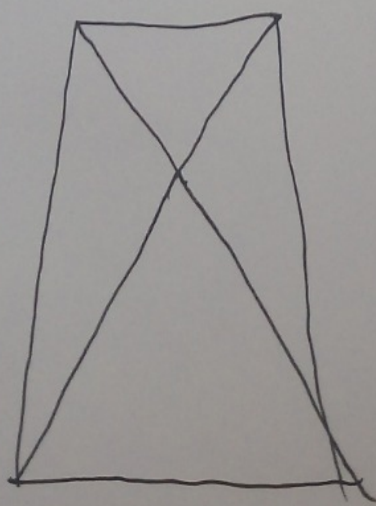


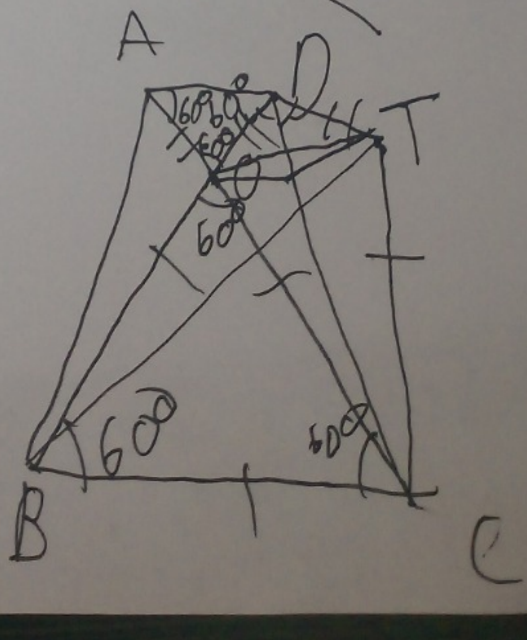
$\frac{7}{2}$ $\frac{49}{4}$

$4^2 - 2^2 = 12$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$







Черновик

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=7$ $\quad x^2=a \quad y^2=b$

$x^4+y^4-x^2y^2=37$ $\quad a+b=c$

$\quad ab=d$

$7a+7b-3ab=7$

$\cancel{7}a^2+\cancel{7}b^2-3ab=3\cancel{7}7$ $\quad (1;1) \quad 182$

$(a+b)^2-3ab=37$

$(a+b)^2-3ab=37$ $\quad 10 \; -3$

$7c-3d=7$ $\quad 49+30\cdot4=169 \quad 3 \; 10$

$5 \; 8$

15

$x_1+x_2=7$

14

$c^2-3d=37$

12

$x_1x_2=30$

1

$14 \quad c^2-7c-30=0$

1

$c_1=10$; $c_2=-3$

$\frac{15\cdot16}{2}$ $\quad 120$ $\quad \cancel{x_1+c}$

15 дублей $\quad$ 210 не дублей $\quad -3;7$

$28 \quad \frac{\cancel{2}\cdot14\cdot15}{2}=210$

кр $\quad 1 \quad 26 \quad 14 \quad \frac{14\cdot15}{2}=105$

син $\quad 1$

$24 \quad 13$

14 $\quad$ 13

$142 \quad 13$

225 $\quad 14 \quad \frac{15\cdot16}{2}=120$

13

2730 $\quad$ 12

910 $\quad 1 \quad 15$

1820 $\quad 14 \quad 15 \quad 7 \quad 29$

14

211007708 (U369439 M1277753)

Чистовик

1

Задача 4 (вариант 19)

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$; замена $x^2=a$; $y^2=b$; $a+b=c$; $ab=d$

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ (a+b)^2-3ab=37 \end{cases}$$; заменим на c и d

$$-\begin{cases} 7c-3d=7 \\ c^2-3d=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2-7c=30 \\ 7c-3d=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2-7c-30=0 \\ 7c-3d=7 \end{cases}$$; решая

уравнение получаем корни $c_1=10$; $c_2=-3$, но $x^2+y^2=-3$ не может быть $\Rightarrow c=10$;

подставляем в $7c-3d=7$; получаем $d=21$;

$$\begin{cases} a+b=10 \\ ab=21 \end{cases}; \begin{cases} a=10-b \\ ab=21 \end{cases}; \begin{cases} a=10-b \\ (10-b)\cdot b=21 \end{cases}$$

$10b-b^2=21$; $b^2-10b+21=0$; решая уравнение получаем корни: $b_1=3$; $b_2=7 \Rightarrow a_1=7$; $a_2=3$;

обратная замена: в случае $b_1=3$ $a_1=7$; $y=\pm\sqrt{3}$; ~~ок~~ $x=\pm\sqrt{7}$, а в другом случае $y=\pm\sqrt{7}$; $x=\pm\sqrt{3}$

Ответ: $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$; $(\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(\sqrt{7};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$; $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$

Задача 5 (вариант 14)
Чистовик $\boxed{2}$

Очевидно, что дублей 15, а других 210. Рассмотрим количество способов, если среди ~~карт~~ вытянутых карт будет дубль с 1: надо найти количество карточек среди 210 других в которых нет 1; карточек, на которых единичка на синей стороне 15, а на красной также 15; причём дубль считали дважды, поэтому карт с единицей 29, но т.к. мы ~~счита~~ считаем все кроме дубля, то их 28; значит различных способов с дублем (1;1) будет (210-28) = 182; и так с ~~каждым~~ каждым дублем; причём совпадать две пары не могут; т.к. в них либо разные дубли, либо разные карты (т.к. мы не считали ещё вариант, где 2 дубля); 182·15 = 2730; теперь посчитаем способы, где вытянуто 2 дубля; в этих случаях условия задачи выполняются, но надо учесть, что пара AB и BA одна и та же; но это просто число сочетаний из 15 по 2:

$C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot \cancel{14}^{7}}{\cancel{2}} = 105$; 2730 + 105 = 2835

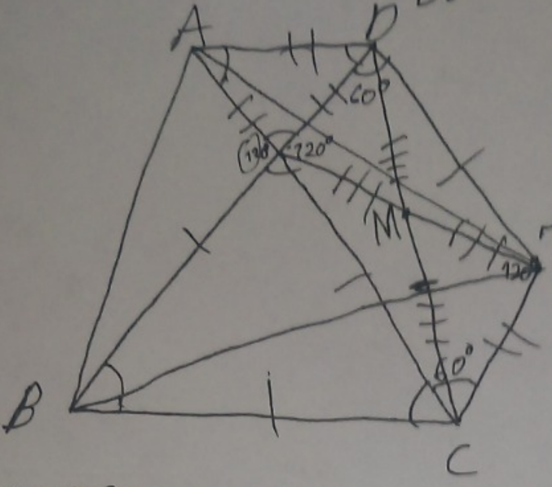
Ответ: 2835

211007708 (U369439 M1277753)

Задача 6
Вариант 14
Чистовик

3

а)



Решение: Заметим, что $\angle DBC = \angle ADB$, откуда будет следовать, что $AD \parallel BC$ и $ABCD$ — трапеция, и т.к. $AC = BD$, то эта трапеция равнобокая; пусть M — середина DC, тогда $OM = MT$ из симметрии, тогда $ODTC$ — параллелограмм, т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам. Причём $\angle DOC = 120$, откуда можно вычислить все углы параллелограмма; Заметим, что $DTCB$ — трапеция, т.к. $DO \parallel CT$, и т.к. $BC = OC = DT$, то она равнобокая; в равнобокой трапеции равны диагонали $\Rightarrow BT = DC = AB$; откуда $\triangle BAT$ — равнобедренный; с другой стороны в равнобедренной трапеции $ADTC$ (я доказал по аналогии) $DC = AT = AB \Rightarrow AT = AB$ и $BT = AB \Rightarrow AT = AB = BT \Rightarrow \triangle ATB$ — равносторонний $\triangle$

б) Если $AD = 4$, то высота из точки O будет $2\sqrt{3}$ в $\triangle AOD$; легко доказать через теорему Пифагора, а в $\triangle BOC$ будет $1{,}5\sqrt{3}$; заметим, что эти высоты образуют одну прямую, Задача 6 (продолжение)

Чистовик $\boxed{4}$

Вариант 14

Т.к. это секущая при ~~прямых~~ параллельных AD и BC; причём накрест лежащие равны, значит это действительно секущая; значит высота в трапеции будет равна $3,5\sqrt{3}$; то

$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h = 3,5 \cdot 3,5\sqrt{3} = 12,25\sqrt{3}$; причём ранее доказали, что $AT = DC$; найдём эту сторону по теореме косинусов в $\triangle DTC$; $\cancel{DC^2 = 4^2+3^2}$ $\cos 120^\circ =$
$= -\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow DC^2 = 4^2+3^2+4\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 37 \Rightarrow DC = \sqrt{37}$

$S_{\text{равностороннего}\triangle} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{\triangle ATB} = \frac{37\sqrt{3}}{4} = 10,25\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{10,25\sqrt{3}}{12,25\sqrt{3}} = \frac{37}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{49} = \frac{37}{49}$

Ответ: $\frac{37}{49}$