Часть 1

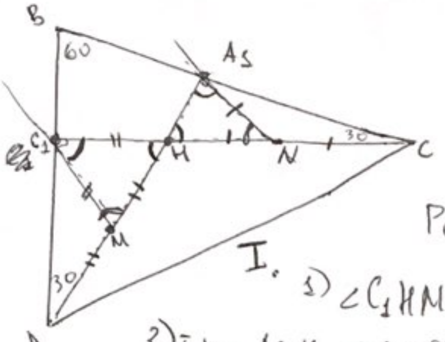
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007653**

ID профиля: **854221**

Вариант 14

№1



высоты CC_1, AA_1 $HC_1=2$ $NA_1=11$ (замечания $F\to C_1$, $E\to A_1$)

1) Найти $\angle ABC$
2) Найти r – радиус окр
3) Найти $S_{\triangle ABC}$

Решение:

I. 1) $\angle C_1HM = \angle A_1HN$ как вертикальные
2) т.к $\triangle AC_1H$ – прямоуг и $HM = MA \Rightarrow HM = MA = C_1M$
3) Аналогично $\triangle HA_1C$ – прямоуг $\Rightarrow A_1N = HN = NC$
4) $\Rightarrow \triangle C_1MH$ – р/б $\Rightarrow \angle C_1HM = \angle MC_1H$
$\triangle HA_1N$ – р/б $\Rightarrow \angle NHA_1 = \angle HA_1N$
5) т.к $C_1M \parallel A_1N \Rightarrow \angle C_1MA_1 = \angle NA_1M$ как ~~верт~~ накрестлеж.
и аналогично $\angle MC_1N = \angle C_1NA_1$ $\Rightarrow$ $\triangle$ ($\triangle MC_1H$ и HA_1N) – равносторон. $\triangle$ $\Rightarrow$ углы по 60
6) C_1BA_1H – вписанный т.к $\angle HC_1B + \angle HA_1B = 90+90=180$
$\Rightarrow \angle ABC = 180 - \angle C_1HA_1 = 180-120 = 60^\circ$

II. 1) по т. синусов: $2r = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AC}{\sin 60}$
2) $\angle MHN = 120^\circ$
по т. косинусов $MN^2 = MH^2 + HN^2 - 2\cdot MH\cdot HN\cdot\cos 120 = 2^2+11^2+2\cdot2\cdot11\cdot\frac{1}{2} = 4+121+22 = 147$
$MN = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$
3) т.к в $\triangle AHC$ MN – средняя линия $\Rightarrow AC = 2MN = 14\sqrt{3}$
4) $2r = \frac{AC}{\sin 60} \Rightarrow 2r = \frac{14\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 28 \Rightarrow r = 14$

III. 1) т.к $\triangle BCC_1$ – с углами 90, 60, 30 $\Rightarrow BC =$
$\frac{BC}{CC_1} = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = CC_1\cdot\cos 30 = (2+11+11)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$
2) $S_{\triangle ABC} = \frac{AA_1\cdot BC}{2} = \frac{(2+2+11)\cdot 12\sqrt{3}}{2} = 15\cdot6\cdot\sqrt{3} = 90\sqrt{3}$

Ответ: $\angle ABC = 60$
$r = 14$
$S = 90\sqrt{3}$

Чистовик 1

№2 Т.к числа различны упорядочим их $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Тогда
$$\begin{cases} 30x_1 + \underbrace{x_2 + \ldots + x_{n-1}}_{S} + x_n = 450 \\ x_1 + \underbrace{x_2 + \ldots + x_{n-1}}_{S} + 14x_n = 450 \end{cases}$$

$$29x_1 = 13x_n$$

Т.к. числа натуральные $\Rightarrow$ $x_n \vdots 29$, $x_1 \vdots 13$ (1)

~~Оценим n (кол-во) Максим n для ариф. прогрес с $d=1$, $a_1 = 1$~~

~~$\Rightarrow \frac{a_1 + (n-1)}{2} \cdot n = 450$~~

~~$n + n^2 - n = 900$~~

~~$n^2 = 900$~~

~~$n = 30$~~

Оценим x_1:

$x_1 \leq \frac{450}{31}$ т.к $450 \geq 30x_1 + \underbrace{S + x_n}_{\vee\, x_1}$

$450 > 14x_n$

$x_n < \frac{450}{14}$

$x_n \leq 30$

$x_1 \leq 15$ и $x_n \leq 30$ (2)

$\Rightarrow$ (1)+(2) $\Rightarrow$ $x_1 = 13$ $x_n = 29$

$$\begin{cases} 30 \cdot 13 + S + 29 = 450 \\ 13 + S + 14 \cdot 29 = 450 \end{cases} \Rightarrow S = 450 - 390 - 29 = 60 - 29 = 31$$

$\Updownarrow$ $S = 31$ – подходит.

$S = x_2 + x_3 \ldots x_{n-1}$

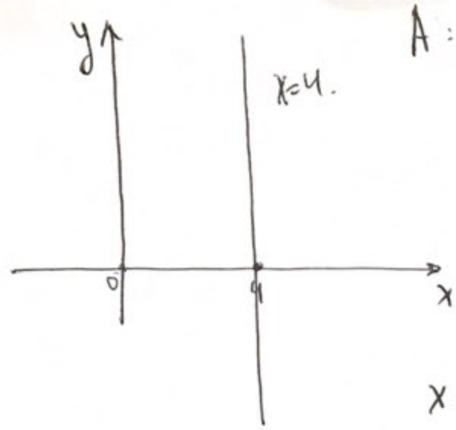
$\underbrace{x_2 \geq 14,\ x_3 \geq 15}_{\geq 29}$ $\Rightarrow$ S - это сумма не более 2х чисел (иначе како-е-то будет меньше $x_1 = 13$)

$31 = 15 + 16$
$31 = 14 + 17$ – это все вариант т.к $x_2 > x_1$ и $x_3 > x_2$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} 13, 14, 17, 29 \\ 13, 15, 16, 29 \end{array} \right.$ – с точностью до перестановки.

Чистовик 2

№3



A: • $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$$x^2+x(2a-2y)+2a^2+2y^2=0$$

$$x=\frac{-2a+2y\pm\sqrt{4(a^2+y^2-2ay)-8a^2-8y^2}}{2}=$$

$$=\frac{-2a+2y\pm\sqrt{-4(a+y)^2}}{2}$$

что бы (.) вообще была $D\geq0 \Rightarrow a+y=0 \Rightarrow a=-y$

$$x=\frac{-4a}{2}=-2a$$

(Значение по y нас не интересует пока.)

B: • $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0 \quad |:a^2$ Если $a\neq0$

Выделим ур-е окр. $x^2-2x(a+\frac{3}{a})+a^2+\frac{9}{a^2}+6+y^2-2y+1=7$

$$(x-(a+\frac{3}{a}))^2+(y-1)^2=7$$

$\Rightarrow$ координаты центра (B) $B(a+\frac{3}{a}, 1)$

• Хотим что бы ~~B и A~~ $-2a$ и $a+\frac{3}{a}$ были по разную сторону от 4

1) $\begin{cases}-2a<4 \Rightarrow a>-2\\ a+\frac{3}{a}>4\end{cases}$ A 4 B

$a^2-4a+3>0 \Rightarrow a\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ $\Rightarrow$ $a\in(-2,1)\cup(3,+\infty)$

2) B 4 A $\begin{cases}-2a>4 & a<-2\\ a+\frac{3}{a}<4 & a\in(1,3)\end{cases} \Rightarrow \times$

• Если $a=0 \Rightarrow$ A: $y=0 \Rightarrow x=0$

B: $9=0$ .... $\times$ невозможно

Ответ: при $a\in(-2,1)\cup(3,+\infty)$

Чистовик 3

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ Тогда:

$$\begin{cases} 30x_1 + \underbrace{x_2 + \ldots + x_{n-1}}_{=S} + x_n \\ x_1 + \underbrace{x_2 + \ldots + x_{n-1}}_{=S} + 14x_n = 450 \end{cases}$$

$$29x_1 - 13x_n = 0$$

$$29x_1 = 13x_n$$

$S > (n-2)x_1$ (т.к. там $(n-2)$ числа больших x_1)

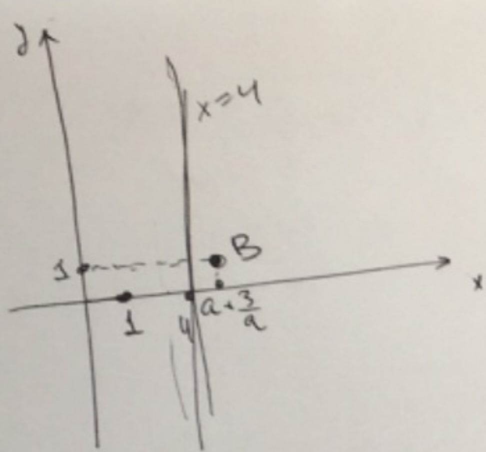
$x_n > x_1$

$\Rightarrow 30x_1 + (n-2)x_1 + x_n < 450$

$\Downarrow$

$x_1(30 + n - 2 + 1) < 450$

$x_1(30 + n - 1) < 450$



$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$

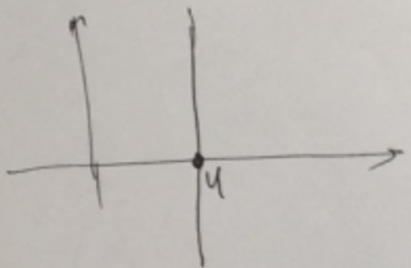
$x^2 - 2ax - \quad x^2 + y^2 - 2ax - \frac{6}{a}x - 2y + a^2 + \frac{9}{a^2} = 0$

$x^2 - x\left(2a - \frac{6}{a}\right) +$

$x^2 - 2x\left(a + \frac{3}{a}\right) + a^2 + \frac{9}{a^2} + 6$

$+$

$y^2 - 2y + 1$



$\left(x - \left(a + \frac{3}{a}\right)\right)^2 + (y-1)^2 = 7$

$r = \sqrt{7}$

$a + \frac{3}{a}$

• окр справа $\Rightarrow a + \frac{3}{a} > 4$

$a^2 - 4a + 3 > 0$

$a = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)}$

• при a..? $x < 4$.

$x^2 + x(2a - 2y) + 2a^2 + 2y^2 = 0$

$x = \dfrac{-2a + 2y \pm \sqrt{4(a^2 + y^2 - 2ay) - 8 \cdot a^2 - 8 \cdot y^2}}{2} = \dfrac{-2a + 2y \pm \sqrt{-4(a^2 + y^2 + 2ay)}}{2} =$

$= \ldots y \pm \sqrt{-4(a+y)^2}$ $\Rightarrow$ что бы x был

$a = -4 = 0$

$\Sigma_1 = 450$

$\Sigma_2 = 450$

$$x_1 \rightarrow \begin{cases} 30x_1 + \underbrace{x_2 + \ldots x_{n-1}}_{S} = 450 \\ x_1 + \ldots + x_{n-1} + 14x_n = 450 \end{cases}$$

$29x_1 - 13x_n = 0$

$29x_1 = 13x_n$

$\frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n = 450$

$\frac{1 + x_n}{2}$ $(n-1)d$

чисел ≤ 30 30 не может быть.

$(1, 29)$

$\frac{x_1}{x_n} = \frac{x_n}{x_1} = \frac{29}{13} = 2\frac{3}{13}$

$(1 + n - 1)n = 900$

$\cancel{n} + n^2 - \cancel{n} = 900$

$\boxed{n = 30}$

$$\begin{cases} 30x_1 + S + x_n = 450 \\ \cancel{x_1} + S + 14x_n = 450 \end{cases}$$

$+$

$S > \cancel{x_1}$

$31x_1 + 2S + 15x_n = 900$

$\geq 33x_1 + 15x_n = 900$

$x_n = \frac{29}{13}x_1$

$\geq 33x_1 + \frac{29}{13}x_1 = 900$

$13 \times 33 = 39 + 39 = 429$

$429 + 29 = 458$

$\frac{458}{13}x_1 \leq 900$

$33x_1 + \frac{29}{13}x_1 \leq 900$

$13 \times 900 = 11700$

$11700 : 458 = 25$

-916

2540

$x_1 \leq \frac{11700}{458}$

$31x_1 + x_n \leq 450$

$2x_1 + 14x_n \leq 450$

$S = 0$

$x_1 + 7x_n \leq 225$

$x_1 = \frac{13}{29}x_n$

$7\frac{13}{29}x_n \leq 225$

$14 \cdot 14 = 134$

$450/30$

$$\begin{cases} 30x_1 + \underbrace{>(n-2)x_1}, + x_n = 450 \\ x_1 + \underbrace{>n-2x_1} + 14x_n = 450 \end{cases}$$

$x_n >$

$\boxed{x_1 < 5}$

$31x_1$

154

159

$\frac{291}{11} = 26$

-22

71

$31\cdot$

$x_n < 10\frac{15}{13} \rightarrow 11$

300

$k > 27$

$\Rightarrow$

$5 + kx_n + 154$

$11k > 291$

$$\begin{cases} 31a + 15b = 450 \\ 29a \leq 158 \end{cases}$$

$k > 26\ldots$

$5 + 11k + 154 > 450$

$k > \frac{291}{11} \approx 26$

211007653 (U854221 M1277956)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007653**

ID профиля: **854221**

Вариант 14

№4 $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$ $\quad a=x^2 \quad b=y^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} 7a+7b-3ab=7 & (1) \\ a^2+b^2-ab=37 & (2) \end{cases}$

$$7(a+b)\underbrace{-2ab-a^2-b^2}_{-(a+b)^2}=-30$$

$$(a+b)\left(7-(a+b)\right)=-30$$

$$(a+b)(a+b-7)=30$$

Подходит $\quad \left[\begin{array}{l} a+b=10 \\ a+b=-3 \end{array}\right. \Rightarrow 7(a+b)-3ab=7 \quad 63=3ab \quad 21=ab$

$7(a+b)-3ab=7$

$-21-7=3ab$

$-28=3ab$

$ab=-\frac{28}{3}$

Итого:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=10 \\ ab=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=7 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-3 \\ ab=-\frac{28}{3} \end{cases} \end{array}\right.$ ← имеет 2 каких-то решени, но они не подходят т.к $a\geq0$ $b\geq0$ (как квадраты) но $(a+b)=-3$

~~$x^2+3-\frac{28}{3}=0$~~

~~$3x^2+9-28=0$~~

~~$x=\frac{-9\pm\sqrt{81+4\cdot3\cdot28}}{6}$~~

Почему нет других решений?

Т.к. из (1) уравнения можно выразить b $\quad b=\frac{7-7a}{7-3a}$

и подставить во (2), получится уравнение 4-й степени на a

$\Rightarrow$ у него не более 4х корней, и корни которые мы нашли (их 4 штуки) точно должны подходить $\Rightarrow$ мы нашли все ~~корни~~ решения. И два из решений нам не подходят из-за отрицательности a $(a=x^2)$, значит имеем решения исходной $\begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{7} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\pm\sqrt{7} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Проверка a и b:

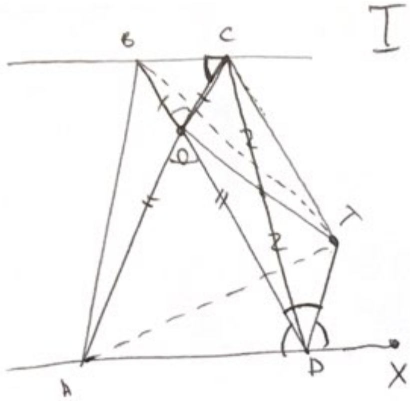
$\boxed{\underbrace{7\cdot3}_{21}+\underbrace{7\cdot7}_{49}-\underbrace{3\cdot3\cdot7}_{63}=7}$ ✓

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$

$(\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$

Чистовик 4

№6



I (!) △ ABT - правильный

1) т.к $\angle COP = 120°$ и при удвоении медианы получился параллелограмм $OCDT$

$\Rightarrow \angle OCT = 60° = \angle ODT$

$\Rightarrow \angle TDX = 180 - 60 - 60 = 60° = \angle ACB = \angle BDT$

2) $AC = BD$ т.к $BO = OC$ и $OA = OD$

3) $BC = DT$ (т.к $BC = OC$ и $OC = DT$ как параллелограм)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BDT$ по 2м сторонам и углу между ними

$\Rightarrow BA = BT$ как соотв. эл

4) Аналогично $\triangle ACT = \triangle ADB$ $\left(\begin{matrix} AC = DB \\ \angle ACT = 60 = \angle ADB \\ AD = CT \end{matrix} \right)$

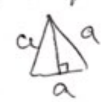
$\Rightarrow AT = AB$

$\Rightarrow AT = AB = BT \Rightarrow$ правильный $\triangle ABT$

II $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

$BC = 3$
$AD = 4$

1) Если △ правильный, то его высота $= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$



и его площадь $= \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

2) по т. косинусов $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos 120 = 9 + 16 + 12 = 36$

$BT = 6$

$\Rightarrow S_{\triangle ABT} = \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

3) ABCD-трапеция (т.к $BC \parallel AD$ по накрест. углам)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{(BC + AD) \cdot h}{2} =$

$h = h_{\triangle AOD} + h_{\triangle BOC}$ (т.к. правильные)

$h = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{7 \cdot 7\sqrt{3}}{4} = \dfrac{49\sqrt{3}}{4}$

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{9\sqrt{3} \cdot 4}{49\sqrt{3}} = \dfrac{36}{49}$ ← ответ

Чистовик 6

№5 синий, красный — нарисуем карты так

~~Тогда~~ • у фокусника есть все возможные карты т.к. 15 вариантов числа на син. • 15 вар. числа на красн. $= 15^2$

• Он хочет вытянуть $\boxed{\begin{array}{c}a\\ \hline a\end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{c}b\\ \hline c\end{array}}$ где b и c могут совпадать.

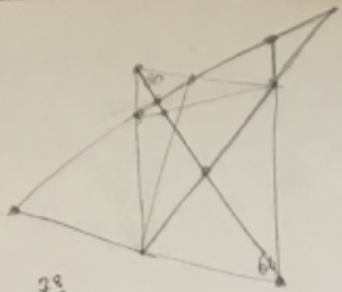
~~Вытащить ду~~ дублей всего 15

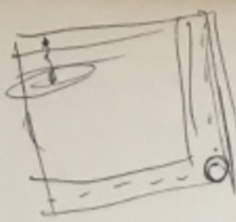
далее он должен достать карту без цифры a (их 14^2) т.к. 14 вар на син $\times$ 14 вар. на красн

и не важно в каком порядке доставать.

Итого: $\dfrac{15\cdot 14^2}{2}$

Ответ: $\dfrac{15\cdot 14^2}{2}$



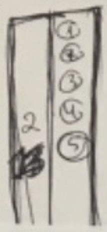


$1+2=3$

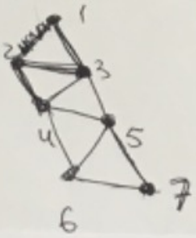
$2+2=4$

$4+3=5$

$78 \cdot 12 = 56 \quad 28 \quad 336$



$9 \cdot 7. \quad 1+2=3$



$$-\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \quad \vert 3 \end{cases}$$

$$\cancel{4x^2+8y^2=204}$$

$$37 \cdot 3 = 111 \qquad 111 - 7 = 104$$

$$2^4=16 \qquad 3^4=81 \qquad 36$$

$$3x^4+3y^4-7x^2-7y^2=111-7$$

$$3x^4+3y^4-7x^2-7y^2=104$$

$$x^2=a \qquad y^2=b$$

$$3a^2+3b^2-7a-7b=104$$

$$a^2-\frac{7}{3}a+\left(\frac{7}{6}\right)^2+b^2-\frac{7}{3}b+\frac{7}{6}^2=$$

$$a^2-(a-b)^2=37-ab$$

$$+\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases}$$

$$7(a+b)\underbrace{-2ab-a^2-b^2}_{-(a+b)^2}=-30$$

$$(a+b)(7-a+b)=-30$$

$$(a+b)(a+b-7)=30$$

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases}$$

$$b(7-3a)=7-7a$$

$$b=\frac{7-7a}{7-3a}$$

$$104$$

$$a^2(7-3a)^2+(7-7a)^2-(7-3a)(7-7a)\ldots$$

$$7a^2-42a^3-3a^4+49-2\cdot 49a+49a^2-$$

$$-$$

$$=-37$$