Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

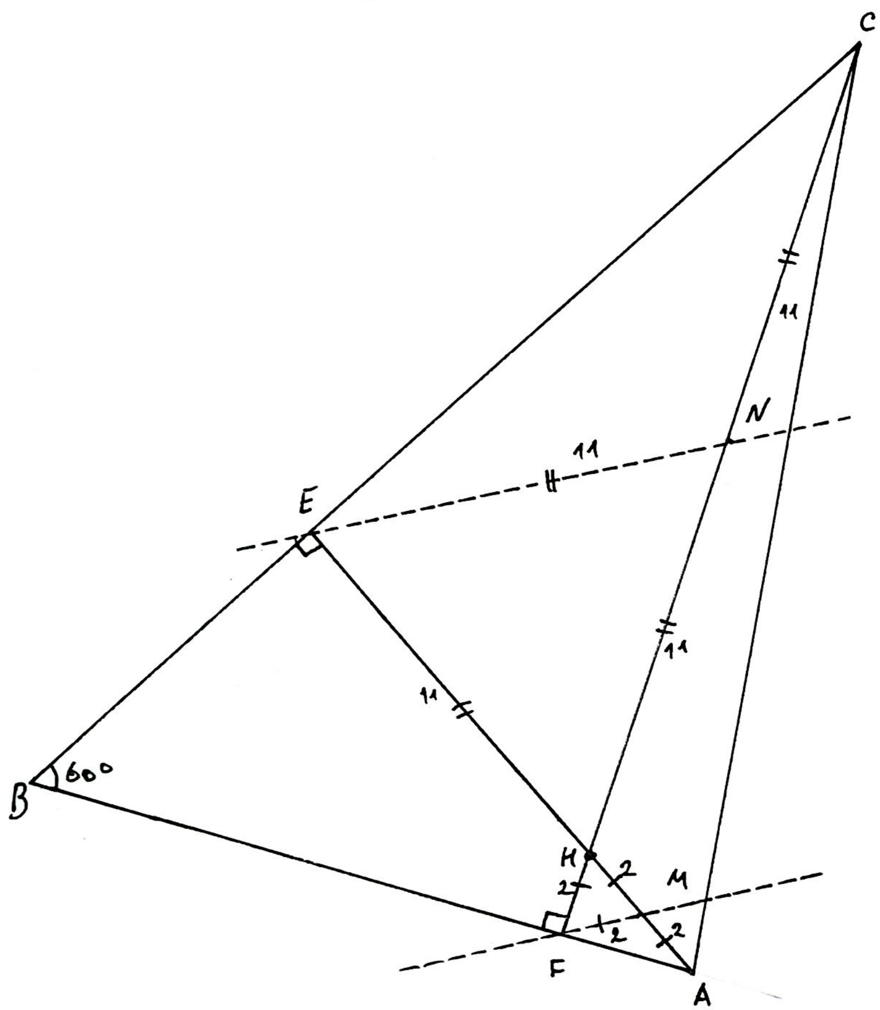
Шифр: **211007584**

ID профиля: **173118**

Вариант 14

Чистовик

№1



Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный треугольник. CF и AE - высоты

$CF \cap AE = H$, M - сер AH, N - сер CH. $FM = 2$, $EN = 11$, $FM \parallel EN$

Найти: $\angle ABC$, S_{ABC}, $R_{\text{опис окр}}$.

Решение: $\exists$ ω_1 - опис $\triangle CEH$ $\Rightarrow$ $\angle CEH = 90°$ - опир на диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ CH - диам $\Rightarrow$ N - центр ω_1 $\Rightarrow$ $EN = NC = NH$ $\Rightarrow$ Аналог: $FM = HM$

$\Rightarrow$ $CH = 2 \cdot EN = 22$, $HA = 4$. По т Фалеса (на 2х прямых):

$\frac{EH}{NH} = \frac{HM}{HF}$. т. $F \in \omega_1$, т.к. $\angle CFA = 90°$ $\Rightarrow$ $CH \cdot HF = EH \cdot HA$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} EH \cdot HF = 22 \\ \frac{EH}{HF} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} \end{cases} \overset{EH>0}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} \begin{cases} EH = 11 \\ HF = \frac{22}{EH} = 2 \end{cases} \Rightarrow \triangle ENH \text{ - равно-ет} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle EHN = 60° = \angle FHM \Rightarrow \angle EHF = 120° \Rightarrow \angle EBA = 60°$

$BF = ctg \angle CBA \cdot CF = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 24 \Rightarrow BA = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot 24 + \sqrt{3} \cdot 2 = 10\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{CF \cdot BA}{2} = 5\sqrt{3} \cdot 24 = 120\sqrt{3}$

по т Sin: $2R_{\text{опис окр}} = \frac{CA}{\sin 60°} \Rightarrow R_{\text{опис окр}} = \frac{CA}{\sqrt{3}}$

$CA = \sqrt{24^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{147} = 14\sqrt{3} \Rightarrow R_{\text{опис окр}} = 14$

Отв: $\angle ABC = 60°$, $S_{ABC} = 120\sqrt{3}$, $R_{\text{опис окр}} = 14$

№2 Чистовик

$\forall i\ (1\le i\le n)\ \ a_i \in \mathbb{N}$

$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$

$$\begin{cases} 30a_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} a_i = 450 \\ 14a_n + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i = 450 \end{cases} \overset{\ominus}{\Rightarrow} 14a_n + a_1 - 30a_1 - a_n = 0$$

$\Rightarrow 13a_n - 29a_1 = 0 \Rightarrow a_n = \frac{29}{13}a_1 \Rightarrow a_1 \vdots 13 \Rightarrow \begin{matrix} a_n = 29f \\ a_1 = 13k \end{matrix} \quad (k, f \in \mathbb{N})$

$30a_1 = 390k \Rightarrow k=1$

$14a_n = 406f \Rightarrow f=1$,

иначе $\left(\sum\limits_{i=2}^{n} + 30a_1\right)$ будет > 450 и $\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} + 14a_n\right)$

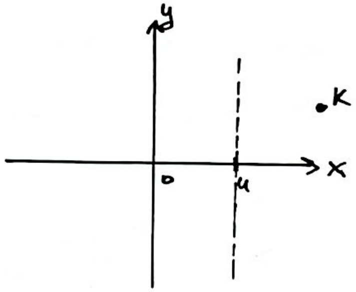
$\Rightarrow a_1 = 13,\ a_n = 29 \Rightarrow$ Я $\sum\limits_{i=2}^{n-1} a_i = t \Rightarrow 390 + 29 + t = 450 = 406 + 13 + t$ (сходится) $\Rightarrow t = 31$

$a_2 > 13 \Rightarrow \forall i \in [2; n]$ и $i \in \mathbb{N}$ $a_i > 13 \Rightarrow$ не более $2^х$ чисел между a_1 и $a_n \Rightarrow a_n = 29$ и $n = 4$
и не менее 1

$\Rightarrow$ Найдём a_2 и a_3 | $a_2 + a_3 = 31$ и $13 < a_2 < a_3 < 29$ Подходят пары чисел $(15; 16)$ и $(14; 17)$. Больше быть не может, так как если a_2 уменьш на 1, то a_3 увел на 1 $\Rightarrow$ т.к. $a_2 > 13$, то единств возм. знач – 14 и 15, иначе $a_2 > a_3$

Ответ: $(13; 14; 17; 29)$, $(13; 15; 16; 29)$

№3 Чистовик



возможно только при t_1 и $t_2 = 0$) $\frac{1}{2}(x+2a)^2$

$$A(x;y):\ 2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0 \Leftrightarrow \Big(\underbrace{\sqrt{2}y+\frac{1}{\sqrt{2}}x}_{t_1}\Big)^2+\frac{1}{2}\cdot\Big(\underbrace{x^2+4ax+4a^2}_{t_2}\Big)=0 \Rightarrow x=-2a;\ y=a \Rightarrow A(-2a;a)$$

$$B(x_1;y_1):\ a^2x_1^2+a^2y_1^2-2a^3x_1-6ax_1-2a^2y_1+a^4+9=0 \Leftrightarrow (ax_1-(3+a^2))^2+(ay_1-a)^2=7a^2$$ – уравнение окружности: центр $B(x_1;y_1) \mid ax_1-(3+a^2)=0$ и $ay_1-a=0 \Rightarrow B\left(\frac{3+a^2}{a};1\right)$

1-ый случ: $\begin{cases}-2a<4\\ \frac{3+a^2}{a}>4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a>-2\\ \text{-}''\text{-}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-2;0)\\ 3+a^2<4a\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(0;+\infty)\\ 3+a^2>4a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-2;0)\\ (a-3)(a-1)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a\in(0;+\infty)\\ (a-3)(a-1)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-2;0)\\ a\in(1;3)\end{cases}\ \varnothing\\ \begin{cases}a\in(0;+\infty)\\ a\in\mathbb{R}\setminus[1;3]\end{cases}\end{array}\right.$

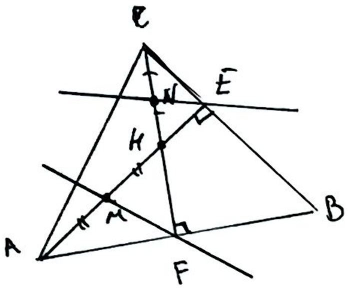
усечение мн-ва

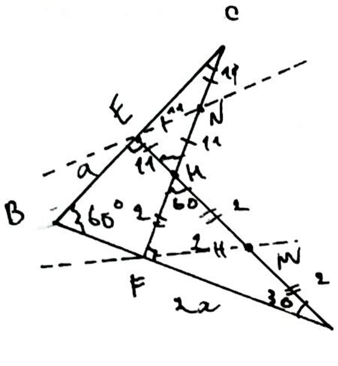
$\Rightarrow a\in(0;1)\cup(3;+\infty)$

2-ой случ: $\begin{cases}-2a>4\\ \frac{3+a^2}{a}<4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<-2\\ 3+a^2>4a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<-2\\ (a-3)(a-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<-2\\ a\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\end{cases} \Rightarrow a\in(-\infty;-2)$

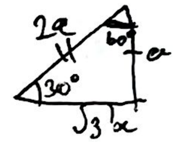
Ответ: $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(3;+\infty)$

Черновик





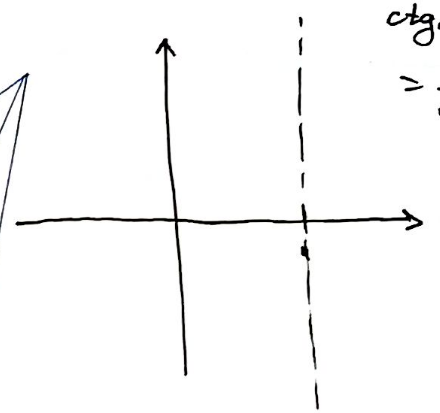
$22\cdot 2 = 4\cdot 11$



$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos}{\sin} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

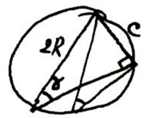
$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + y = 0$

$(ax - 3)^2$

$ay - 2a$

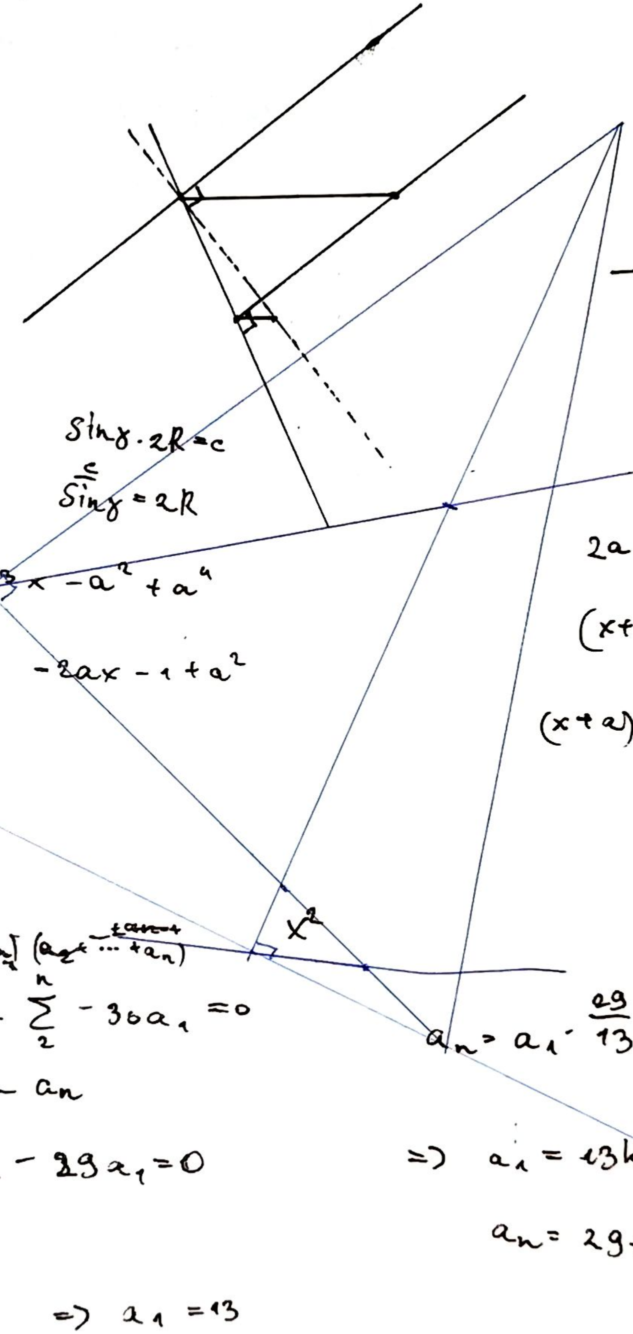
$(ay - a)^2$

$a^2y^2 - 2a^2y + a^2$



$\sin\gamma \cdot 2R = c$

$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$



$-2a^3x - a^2 + a^4$

$-2ax - 1 + a^2$

$x\cdot(2a^3 + 6a)$

x^2

$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$(x+a)^2 + \cancel{(y-x)}$

$(x+a)^2 + (y-x)^2 + y^2 - x^2 + a^2 = 0$

$(y-x)^2$

$a = \frac{1}{2}$

$24^2 = (25-1)^2 = 625 - 50 + 1$

576

$(a_1 + a_2 + \cancel{a_n}\ldots)(a_2 + \ldots + a_n)$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

$14a_n + \sum_1^{n-1} - \sum_2^{n} - 30a_1 = 0$

$a_1 - a_n$

$a_n = a_1 \cdot \frac{29}{13}$

$t = 31$

$30a_1 + \sum_2^n a_i = 450$

$14a_n + \sum_1^{n-1} a_i = 450$

$13a_n - 29a_1 = 0$

$\Rightarrow a_1 = 13k$

$a_n = 29f$

$k = 1$

$f = 1$

$29 \times 14 = 116 \ldots$

$29 \ldots 406$

12

$588 = 2\cdot 294 = 2\cdot 147\cdot 2$

$406 + 13 + t = 450$

$390 + t + 29 = 450$

$\overbrace{13\ b_1, b_2, \ldots, b_k, 29}^{t}$

$\cancel{14+15 > 21}$

2 варианта

$15 + 16$

$14 + 17$

$\max(2)$

$\Rightarrow a_1 = 13$

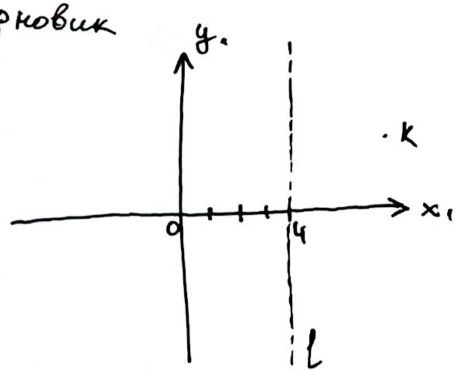
$a_n = 29$

$13 \times 30 = 390$

$280 + 14$

$3\cdot 49$

черновик



$x \neq 4$

$\cancel{a^2x^2} + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$

$x; y \mid \quad 2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$\exists \ A(x;y), k \div l \Rightarrow$

$a^2y^2 - 2a^3x - 2a^2y = a^2 \cdot (y^2 - 2ax - 2y)$

$-2a^3x - 2a^2y$

$\left(\sqrt{2}\,y + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 + \frac{1}{2}x^2 + 2ax + 2a^2$

$\parallel$

$\frac{1}{2} \cdot (x^2 + 4ax + 4a^2)$

$= \frac{1}{2} \cdot (x + 2a)^2$

$(ax - a^2)^2$

$(ay - a)^2 - a^2$

$9 - a^2 - 6ax$

$-2a^3x + a^4 - a^2$

$\left(\sqrt{2}\,y + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (x + 2a)^2 = 0$

$\sqrt{2}\,y + \frac{1}{\sqrt{2}}x = 0 \ \wedge \ x + 2a = 0$

$\Rightarrow x = -2a, \ y = \frac{1}{2}x = -a$

$\Downarrow$

$A(-2a; -a)$

$(ax - (3 + a^2))^2 + (ay - a)^2 = 7a^2$

$\cancel{2x \cdot a \cdot (3 + a^2)}$

$-\underbrace{(3 + a^2)^2 - a^2 + a^4 + 9}$

$\parallel$

$-(9 + 6a^2 + a^4) + a^4 + 9 - a^2$

$= -7a^2$

$ax - (3 + a^2) = 0 \Rightarrow \cancel{x = 3 + a}$

$x = \frac{3 + a^2}{a}$

$y = 1$

$B\left(\frac{3 + a^2}{a}; 1\right)$

$\exists \ A(x;y), k \div l \Rightarrow -2a < 4 \Rightarrow a$

$\exists \ A(x;y), k \div l$

$\Downarrow$

$-2a > 4 \Rightarrow \frac{3 + a^2}{a} < 4$

$\Downarrow a < 0 \Rightarrow 3 + a^2 > 4a \Rightarrow a^2 - 4a + 3 > 0$

$(a - 3)(a - 1) > 0$

$\Downarrow a < -2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007584**

ID профиля: **173118**

Вариант 14

№4 $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$ | Замена: $a=x^2+y^2$, $b=x^2y^2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases} \overset{(2)-(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a^2-7a=30 \\ b=\frac{-7+7a}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-10)(a+3)=0 \\ b=-\|- \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=10 \\ b=+21 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3<0 \\ b=\frac{-28}{3} \end{cases} \varnothing \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases} \underset{(*)}{\Leftrightarrow} (X^{\square}]$

* Так как это ~~очень похоже на~~ является т. Виета для переменных $k=x^2$ и $f=y^2$: $\begin{cases} k+f=10 \\ kf=21 \end{cases}$, то для данной системы уравнений $\exists$ не более 2* решений (k и f взаимозаменяемы) $\Rightarrow$ Решениями для системы $\begin{cases} k+f=10 \\ kf=21 \end{cases}$ явл. значения $(3;7)$ и $(7;3)$ $\Rightarrow (X^{\square}]: \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=7 \\ y^2=3 \end{cases} \end{array} \right.$

Отв: $(\pm3;\pm7)$ и $(\pm7;\pm3)$

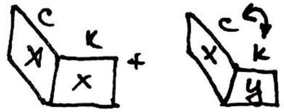
данная запись ~~включает~~ учитывает все 4 расстановки знаков: $(+3;+7)$ $(+3;-7)$ $(-3;+7)$ $(-3;-7)$

Это чистовик

Чистовик

№5

Всего вариантов вытянуть дубль и что-то : $15\cdot(15^2-1)$

Варианты выт дубль с x и карту $\boxed{x \mid y}$: 

: $15\cdot 14\cdot 2$

↑ т.к. 2 цвета сторон карты

Варианты выт. нужную комбинацию : все − пред. варианты $\Rightarrow 15\cdot(15^2-1-14-14)$

Краткая схема (для 1ой карты дубля):

все $\longrightarrow 15\cdot(15^2-1)$

$\longrightarrow \equiv 1 \longrightarrow 15\cdot 14\cdot 2$

≡ эл. на кр. ст

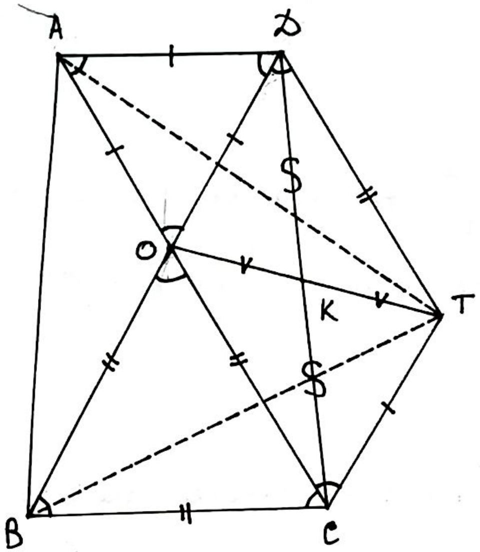
тот самый вытянутый дубль

$\longrightarrow \not\equiv$ ни $1 \longrightarrow 15\cdot(15^2-14-14-1)$

≡ элементы на синей ст

Ответ: 2940

№6 Чистовик



Дано: ABCD – выпуклый четырёхугольник. $AC \cap BD = O$. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – равност.

T симметрична т. O относительно т. K, где K – сер DC   Доп-но: б) $BC = 3$; $AD = 4$

Док-ть: а) $\triangle ATB$ – р/ст

б) Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение: а) все углы $\triangle AOD$ и $\triangle BOC = 60°$. $O \in BD$, $O \in AC \Rightarrow \angle DOC = 120°$ $(180° - \angle AOD)$

T – симметр O отн K $\Rightarrow KO = KT$ и K – сер DC $\Rightarrow$ по ~~Δ~~ признак #: ODTC – #

сторона, угол, ст. накрест лежс. углы

($\angle OKD = \angle TKC$ (верт.) $\Rightarrow \triangle DOK = \triangle CTK$ (СУС) $\Rightarrow \angle ODC = \angle DCT$ (НЛУ) $\Rightarrow DO \parallel CT$ и $DO = CT$

$\Rightarrow$ ODTC – #). $\angle AOB = 120° = \angle DOC = \angle DTC$ (внутр, одност. углы при $\parallel$ пр.) $= \angle ADT = \angle BCT$

(т.к. $\angle DOC = 120°$, то $\angle ODT = \angle OCT = 60° \Rightarrow \angle BCT = \angle ADT = 120°$)

Т.к. ODTC – #, то $DT = OC = OB$, $CT = OD = OA$ $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle ADT = \triangle TCB$ (СУС) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AT = TB \Rightarrow \triangle ABT$ – р/ст $\Rightarrow$ а) ∎

б) $\triangle DOC = \triangle CTD$ (СУС) $\Rightarrow S_{AOB} = S_{DOC} = S_{ADT} = S_{TCB} = S_{DTC} = 4 \cdot 3 \cdot \sin 120°/2 = 2 \cdot 3 \cdot \sin(60°) =$

$= 3\sqrt{3}$. $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3 \cdot \sin 60°/2 + 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sin 60°}{2} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2 \cdot 2} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} =$

$= \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABT} = S_{ABCD} + S_{DTC} - S_{ADT} - S_{BCT} = S_{ABCD} - 3\sqrt{3} = \frac{49}{4}\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \frac{37}{4}\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}$

№4

$-14 \Rightarrow +11$

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$-2 \Rightarrow +1$

$\cancel{7\cdot(x^2+y^2)}$

$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=37$

Зам: $a=x^2$, $b=y^2$ $\Rightarrow$

$7a+7b-3ab=7$

$a^2+b^2-ab=37$

$\parallel$

$(a+b)^2-3ab$

черновик

Зам: $f=a+b$, $d=ab$

$f^2-7f-30=0$

$$\begin{cases} 7f-3d=7 \\ f^2-3d=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2-7f=30 \\ -\,\text{"}\,- \end{cases}$$

$\cancel{D=49+120=169=13^2}$

$(f-10)(f+3)=0$

$d=$ ___

разл карт

14·13

15

$\cancel{225 \times 21}$

225   210

$15^2+15\cdot14$

С К

15

С К

14

№5

225

15 шт

14^2

15^2+14

15 | 15

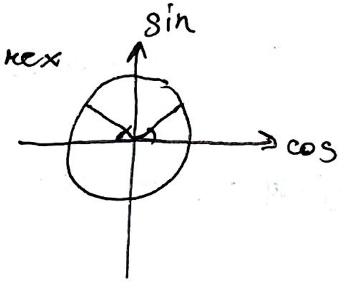
• | 14

$\frac{14!}{(14-2)!}$

x

у, кех   кеу, кех

14 · 13

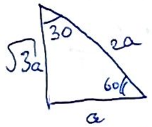


а/ 6 +

б/ +

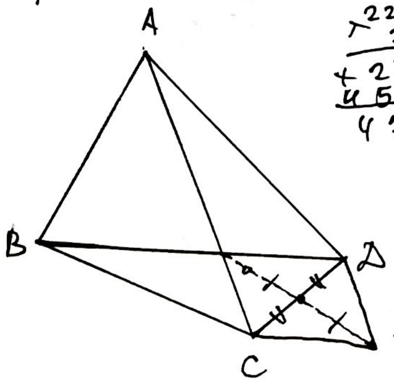
$\bullet\ 15\cdot(15\cdot14) = \begin{array}{r} 225 \\ \times\ 14 \\ \hline 900 \\ 225 \\ \hline 3150 \end{array}$

$15\cdot(14\cdot13+7)$

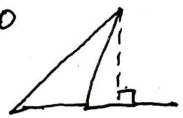


$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

№7



$$\begin{array}{r} 225 \\ \times\ 21 \\ \hline 225 \\ +\ 450 \\ \hline 4725 \end{array}$$

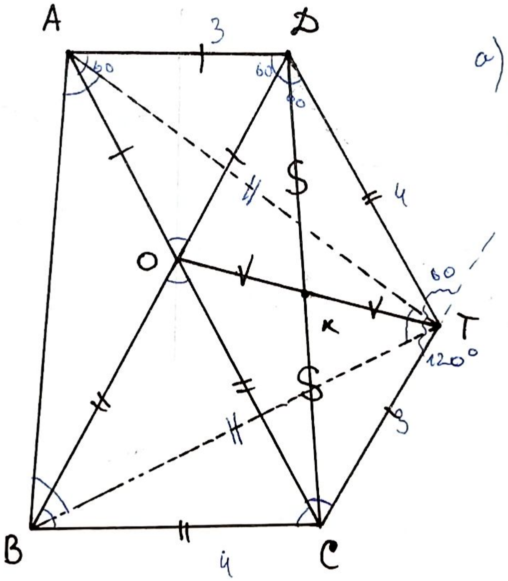


$\frac{x\cdot\sin\alpha\cdot y}{2}$

$182+7$

$189=9\cdot21=9\cdot3\cdot7$

$$\begin{array}{r} \times\ 45 \\ \hline 945 \\ +\ 189 \\ \hline 2835 \end{array}$$



а) $\triangle ADT=\triangle TCB=\triangle AOB \Rightarrow \triangle ATB$ - р/ст

б) $BC=3$ $AD=4$

$S_{DTC}=\sin 60^\circ\cdot 4\cdot 3/2 = 3\sqrt{3}$

$4\cdot3\cdot\cos(120^\circ)/2$

$S_{ABCD}=3\cdot3\cdot\sin 60^\circ/2+4\cdot4\cdot\sin60^\circ/2+2\cdot3\sqrt{3}=$

$=\frac{9\sqrt{3}}{4}+4\sqrt{3}+6\sqrt{3}=\frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S_{\triangle ABT}=\frac{49\sqrt{3}}{4}+3\sqrt{3}-6\sqrt{3}=\frac{37\sqrt{3}}{4}$

Всего: $15^2\cdot(15^2-1)=$

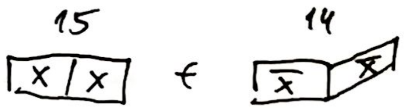
Этих: $2835 = 15^2\cdot 189$

не этих: $3150 = 15^2\cdot 14$

$225 - 29 = 196$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times\ 15 \\ \hline 980 \\ +196\ \ \\ \hline 2940 \end{array}$$

черновик



$\frac{15\cdot 14}{2} = 15\cdot 7$

$15\cdot(\underline{225-15-15}) = 15\cdot 195$

$\| $

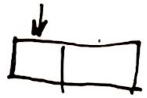
$15^2\cdot 13$

$15\cdot 14$

$15\cdot 1\cancel{5}$ $\quad + \cancel{15}\ 14\cdot 2$

$15\cdot(15^2-1) + \cancel{15}\cdot 3$

15



$14\cdot(15^2+2) + 15^2+2$

$15^2 + 14\cdot 2$

$30-2$

28

$15\cdot 14\cdot 2 \leftarrow 15^2\cdot 13 = 15\cdot(15\cdot 13 + 14\cdot 2)$

15^2-2

$15\cdot(15^2-1)$

$15\cdot(15^2-1)$

$\searrow \equiv \cancel{1} = 15\cdot 14\cdot 2$

$\searrow \not\equiv$ на $1 = 15\cdot(15^2-14-14-1)$