Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

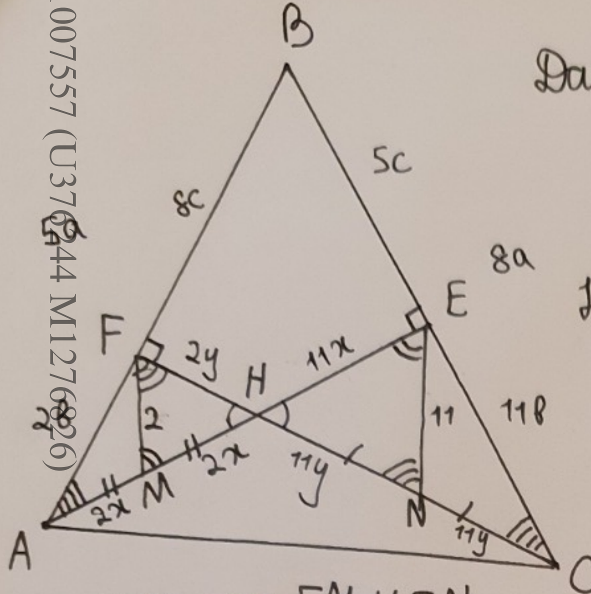
Шифр: **211007557**

ID профиля: **376244**

Вариант 14

чистовик

№1.



Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный, CF и AE – высоты; $CF \cap AE = H$

M – середина AH; N – середина HC

$FM \parallel NE$; $FM = 2$; $EN = 11$

Найти: $\angle ABC$; S_{ABC}; R.

Решение:

1) $\triangle FMH \sim \triangle NEH$ – по двум углам ($\angle FMH = \angle NEH$; $\angle MFH = \angle ENH$ – как внутренние накрест лежащие при $FM \parallel EN$ и секущих FN и ME) $\Rightarrow \frac{FM}{NE} = \frac{MH}{EH} = \frac{FH}{NH} = \frac{2}{11} \Rightarrow MH = 2x$; $EH = 11x$; $FH = 2y$; $NH = 11y$.

2) $\triangle AFH \sim \triangle CEH$ – по двум углам ($\angle AFH = \angle CEH = 90°$; $\angle FHA = \angle EHC$ – как вертикальные) $\Rightarrow \frac{AF}{CE} = \frac{FH}{EH} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{2y}{11x} = \frac{4x}{22y} = \frac{2x}{11y} \Rightarrow$

$\Rightarrow 22y^2 = 22x^2 \Rightarrow x = y \Rightarrow \frac{AF}{CE} = \frac{2}{11} \Rightarrow AF = 2b$; $CE = 11b$

3) $\triangle AEB \sim \triangle CFB$ – по двум углам $\Rightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{15y}{24y} = \frac{5}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 5a$; $CB = 8a$

4) По т. Пифагора $AF = \sqrt{16y^2 - 4y^2} = \sqrt{12y^2} = 2y\sqrt{3} = 2b$

$EC = \sqrt{484y^2 - 121y^2} = \sqrt{363y^2} = 11y\sqrt{3} = 11b$

5) $\frac{FB}{EB} = \frac{CF}{AE} = \frac{24y}{15y} = \frac{8}{5} \Rightarrow FB = 8c$; $EB = 5c$;

6) $\begin{cases} 2b + 8c = 5a \\ 5c + 11b = 8a \end{cases}$ –

$3b - c = a$

$2b + 8c = 15b - 5c$

$c = b$

$3b - b = a$

$a = 2b$

$b = y\sqrt{3}$; $a = 2y\sqrt{3}$

7) $AB = 10b = 10y\sqrt{3}$ Чистовик

$AE = 15y$

$\sin\angle ABC = \frac{AE}{AB} = \frac{15y}{10y\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

8) $\angle BAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \angle FHA = \angle EHC = 60^\circ$

9) $FH = MH \Rightarrow \angle HFM = \angle HMF = (180^\circ - 60^\circ):2 = 60^\circ \Rightarrow FM = FH = MH = 2$
$\Rightarrow y = 1$

10) $AB = 10y\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$BC = 16b = 16y\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

11) $S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = 10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 240\sqrt{3}$

12) $AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{225 + 363} = 14\sqrt{3}$

13) По т. синусов $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{14\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 28 \Rightarrow R = 14$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$; $S_{ABC} = 240\sqrt{3}$; $R = 14$

Чистовик

№2

$$\begin{cases} 30a + b + c + \ldots + n = 450 \\ a + b + c + \ldots + 14n = 450 \end{cases} \Big| -$$

$29a - 13n = 0$

$29a = 13n$

$a \in N;\ n \in N \Rightarrow a \vdots 13;\ n \vdots 29$

Если $a = 13$, то $n = 29$

$13 \cdot 30 = 390$

$14 \cdot 29 = 406$

$$\begin{cases} 13 + x + 406 = 450 \\ 390 + x + 29 = 450 \end{cases}$$

$x = 31$

Т.к. все эти числа больше a, то это 14 и 17 или 15 и 16.

Если $a = 26$, то $n = 58$

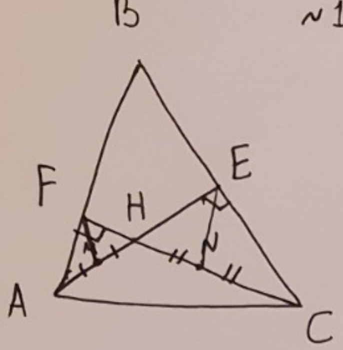
$26 \cdot 30 = 780 > 450$ – не подходит.

Значит, a и n не могут принимать другие значения.

Ответ: 13; 14; 17; 29 или 13; 15; 16; 29.

Черновик

№1.



$FM = 2$

$EN = 11$

$FM \parallel AN$

Найти: $\angle ABC$

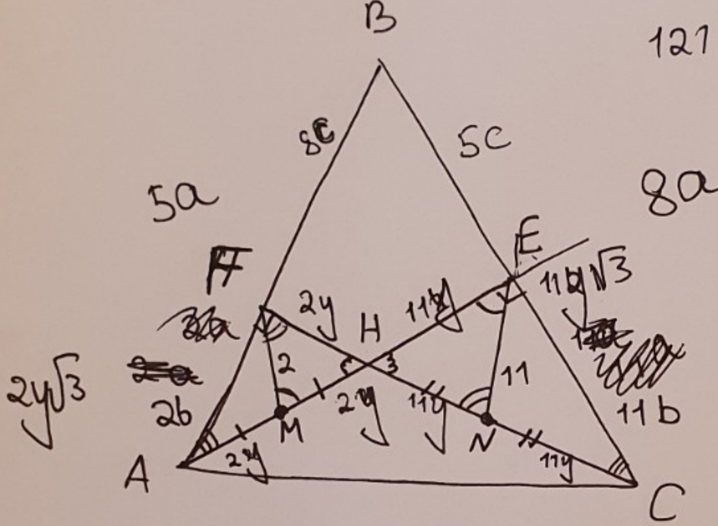
S_{ABC}

R

$362 \,|\, 3$

121

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times\, 22 \\ \hline 44 \\ +\,44 \\ \hline 484 \end{array}$$



$\sin\angle B =$

$\frac{AC}{\sin B} =$

$\triangle FMH \sim \triangle NEH$ – по двум углам $\Rightarrow \frac{FM}{NE} = \frac{MH}{EH} = \frac{FH}{NH} = \frac{2}{11}$

$MH = 2x$

$EH = 11x$

$FH = 2y$

$NH = 11y$

$\triangle AFH \sim \triangle CEH$ – по двум углам $\Rightarrow \frac{AF}{CE} = \frac{FH}{EH} = \frac{AH}{CH} =$

$\frac{2y}{11x} = \frac{4x}{22y} = \frac{2x}{11y} \Rightarrow \frac{2y}{11x} = \frac{2x}{11y} \Rightarrow 22y^2 = 22x^2 \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \frac{AF}{CE} = \frac{2}{11}$

$\triangle AEB \sim \triangle CFB$ – по двум углам

$\frac{AE}{CF} = \frac{15y}{24y} = \frac{5y}{8y} = \frac{5}{8}$

~~$AE = 5a$~~

~~$CF = 8a$~~

$AB = 5a$

$BC = 8a$

$AF = \sqrt{16y^2 - 4y^2} = \sqrt{12y^2} = 2y\sqrt{3}$

$EC = \sqrt{484y^2 - 121y^2} = \sqrt{363y^2} =$

$= 11y\sqrt{3}$

1

Черновик

$$\frac{FB}{EB}=\frac{CF}{AE}=\frac{24y}{15y}=\frac{8}{5}$$

A

$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt3}{2}$

$$\begin{cases}2b+8c=5a\\5c+11b=8a\end{cases}\Big|-$$

$9b-3c=3a \,|:3$

$3b-c=a$

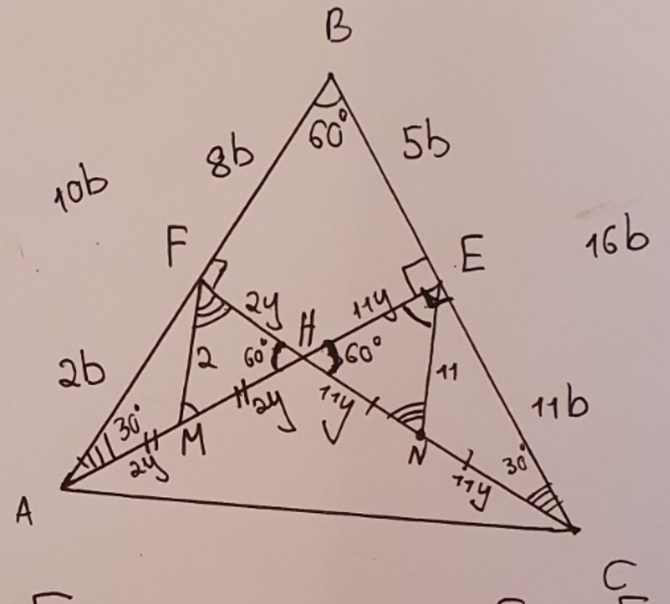
$2b+8c=15b-5c$

$13c=13b$

$c=b$

$3b-b=a$

$a=2b$



$11b=11y\sqrt3$

$b=y\sqrt3$

$AE=11b=11y\sqrt3=11\sqrt3$

$4b^2=16y^2-4y^2=12y^2$

$b^2=3y^2$

$b=y\sqrt3$ $\quad b=\sqrt3$

$$\sin B=\frac{AE}{AB}=\frac{15y}{10y\sqrt3}=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt3}=\frac{3\cdot\sqrt3}{2\cdot3}=\frac{\sqrt3}{2}\Rightarrow$$

$AB=10b=10y\sqrt3$

$AE=15y$

$\angle ABC=60^\circ$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\angle BAC=\dfrac{24y}{2b}=\dfrac{24y}{2y\sqrt3}=\dfrac{12}{\sqrt3}=\dfrac{12\sqrt3}{3}=4\sqrt3.\\[2ex]\operatorname{tg}\angle ACB=\cancel{2b}\ \dfrac{15y}{11b}=\dfrac{15y}{11y\sqrt3}=\dfrac{15}{11\sqrt3}=\dfrac{15\sqrt3}{11\cdot3}=\dfrac{5\sqrt3}{11}\end{array}\right]$$

2

$FH = MH \Rightarrow \angle HFM = \angle HMF = (180-60):2 = 60° \Rightarrow FM = FH = MH = 2 \Rightarrow y = 1$

черновик

$AB = 10y\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$BC = 16b = 16y\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = 10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 80 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 240\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{AE^2 + \cancel{AE}\,EC^2} = \sqrt{\cancel{225}\,225 + 121 \cdot 3} = \sqrt{225 + 363} =$

$= \sqrt{588} = \sqrt{3 \cdot 14^2} = 14\sqrt{3}$

$$\begin{array}{l|l} 588 & 3 \\ \underline{-3} & \overline{196} \\ \;\,28 & \\ \underline{-27} & \\ \;\;\;18 & \\ \underline{\;-18} & \\ \;\;\;\;0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\; 14 \\ \hline 56 \\ +\;14\;\; \\ \hline 196 \end{array}$$

$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \Rightarrow \frac{14\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14\cancel{\sqrt{3}} \cdot 2}{\cancel{\sqrt{3}}} = 28 \Rightarrow R = 14$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 240\sqrt{3}$; $R = 14$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\; 30 \\ \hline 780 \end{array}$$

№2. Черновик.

$a; b; c; d \ldots$

$a; b; c; d$

$$\begin{cases} 30a + b + c \ldots + n = 450 \\ a + b + c + \ldots + 14n = 450 \end{cases} \Bigg| -$$

$29a - 13n = 0$

$29a = 13n$

$a \vdots 13;\ n \vdots 29$

Если $a = 13$, то $n = 29$

$13 \cdot 30 = 390$

$14 \cdot 29 = 406$

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 29 \\ 14 \\ \hline 116 \\ +\ 29 \\ \hline 406 \end{array}$$

$13 + \ldots + 406 = 450$

$\ldots = 31$

14 и 17
15 и 16

$390 + \ldots + 29 = 450$

$\ldots = 31$

14 и 17

15 и 16

Ответ: 13; 14; 17; 29 или 13; 15; 16; 29

4

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007557**

ID профиля: **376244**

Вариант 14

Чистовик

№4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4+2x^2y^2-3x^2y^2=37 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$; $x^2y^2=b$, тогда

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases} \Big|-$$

$a^2-7a=30$

$a^2-7a-30=0$

$a_1=10 \Rightarrow 70-3b=7 \Rightarrow b=21$

$a_2=-3<0$ – не уд. усл, т.к $x^2+y^2\geqslant 0$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=9 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 3 \end{cases}$$

~~Ответ: (1;3); (1;−3); (−1;3); (−1;−3).~~

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2=7 \\ y^2=3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{7} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{7};\sqrt{3})$; $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$

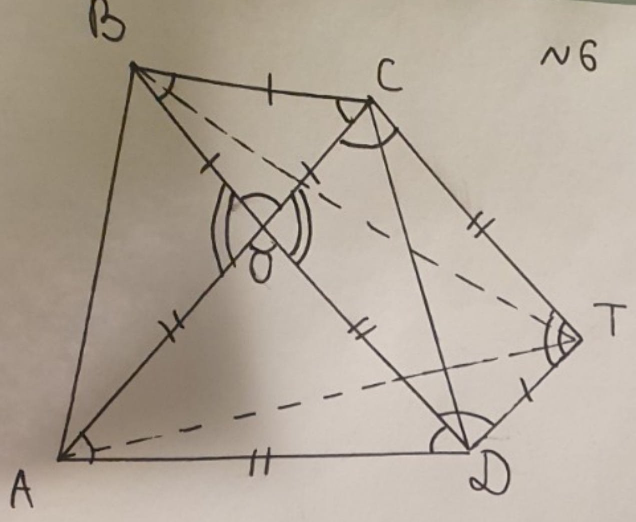
Чистовик

№5

Когда мы берём первый дубль, у нас остаётся $15^2 - 15 - 14 =$
$= 225 - 15 - 14 = 196$ вариантов, чтобы взять вторую карточку. Т.к. набор АВ и ВА – это один и тот же набор, то в следующий раз, когда мы возьмём второй дубль, у нас будет 195 вариантов, чтобы взять вторую карточку, и т.д.

$196 + 195 + 194 + \ldots + 182 = \frac{196+182}{2} \cdot 15 = \frac{378}{2} \cdot 15 = 189 \cdot 15 =$
$= 2835$

Ответ: 2835 способами



№6 Чистовик

Дано: $ABCD$ - выпуклый четырёхугольник; $AC \cap BD = O$
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные
T симметрична O относительно середины CD.
$BC = 3$; $AD = 4$

Доказать: $\triangle ABT$ - правильный

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

Решение:

1) Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные, то $\angle DAO = \angle AOD = \angle ODA = \angle BOC = \angle OBC = \angle BCO = 60°$ => $\angle BOA = \angle COD = 120°$

2) Т.к. точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD, то $OCTD$ - паралл-мм => $CT = OD$; $OC = DT$ - как противоположные стороны паралл-мма; $\angle OCT = \angle ODT = 60°$

3) $\triangle BCT = \triangle TDA = \triangle BOA$ - по двум сторонам и углу между ними ($BC = TD = BO$; $\angle BCT = \angle TDA = \angle BOA = 120°$; $CT = DA = OA$) => $BT = TA = BA$ = как соответственные стороны равных треугольников => $\triangle ABT$ - правильный.

4) Т.к. $\angle BCO = \angle DAO$, а они внутренние накрест лежащие при BC и AD и секущей AC, то $BC \parallel AD$ => $ABCD$ - трапеция.

5) $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$

По т. Пифагора
Высота $\triangle AOD$ равна $h_1 = \sqrt{AO^2 - (\frac{1}{2}AD)^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Высота $\triangle BOC$ равна $h_2 = \sqrt{BO^2 - (\frac{1}{2}BC)^2} = \sqrt{9 - 2{,}25} = \sqrt{6{,}75} = 1{,}5\sqrt{3}$

$h = h_1 + h_2 = 2\sqrt{3} + 1{,}5\sqrt{3} = 3{,}5\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{3+4}{2} \cdot 3{,}5\sqrt{3} = 12{,}25\sqrt{3} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

6) $S_{ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot BT \cdot \sin\angle ABT = AB^2 \cdot \sin 60° \cdot \frac{1}{2}$

По т. косинусов
$AB = \sqrt{BO^2 + OA^2 - 2 \cdot BO \cdot OA \cdot \cos\angle BOA} = \sqrt{9 + 16 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{37}$ 3

Чистовик

$S_{ABT} = (\sqrt{37})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{37\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$

7) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37\sqrt{3}}{\cancel{2}4} : \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{37}{49}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}$

Черновик.

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

Пусть $x^2=a;\ y^2=b$

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \quad |\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ 3a^2+3b^2-3ab=111 \end{cases} \Big| -$$

$3a^2+3b^2-7a-7b=104$

$3(a^2+b^2)-7(a+b)=104$

$x^2+y^2=a;\ x^2y^2=b$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ ((x^2)^2+(y^2)^2+2x^2y^2-3x^2y^2=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37 \end{cases}$$

~~$7a-3b=7$~~

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases} \Big| -$$

$a^2-7a=30$

$a^2-7a-30=0$

$D=49+4\cdot 30=49+120=169=13^2$

$a_1=\dfrac{7+13}{2}=10 \Rightarrow 70-3b=7 \Rightarrow b=9$

$a_2=\dfrac{7-13}{2}=-3 \Rightarrow -21-3b=7 \Rightarrow 3b=-28 \Rightarrow b=-9\frac{1}{3}$

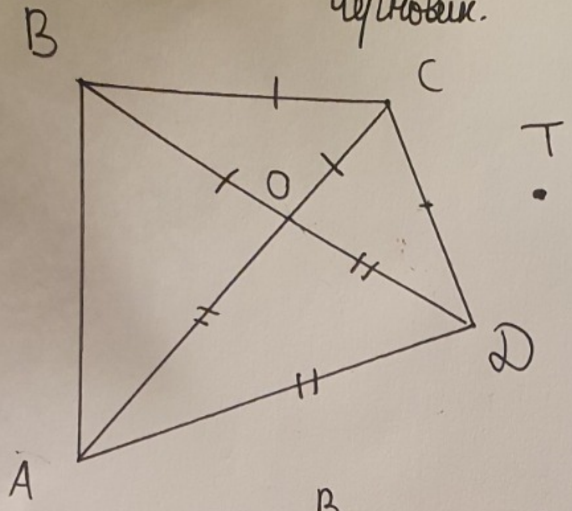
$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{u+v=10} \\ uv=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

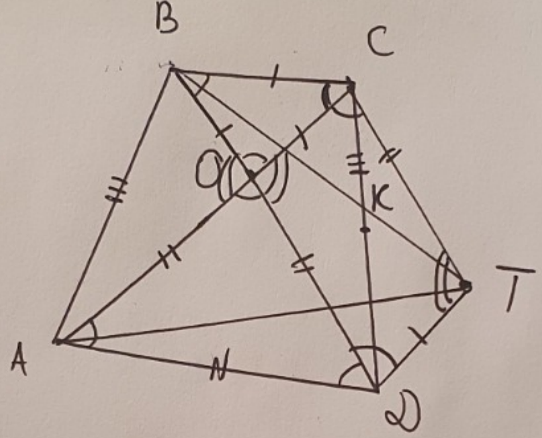
или $\begin{cases} x^2+y^2=-3 \\ x^2y^2=-9\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

1

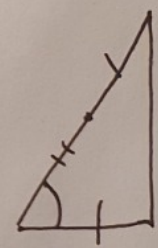
Ответ: $(3;1);(3;-1);(-3;1);(-3;-1)$

Черновик.





Док: $AB = BT = AT$

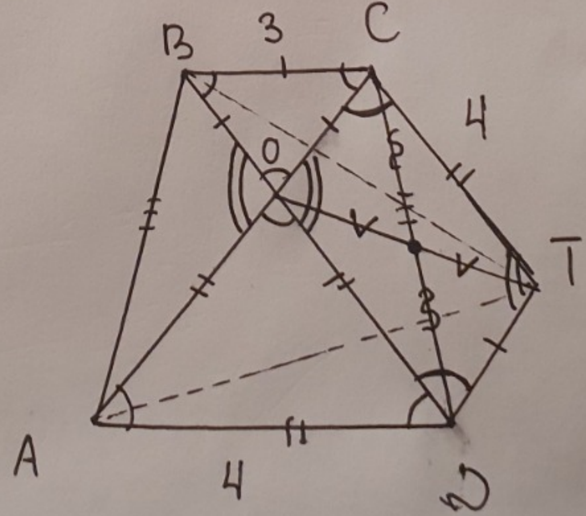


$60+60+60+60+120$

$120+\alpha+\beta=$

$AB = CD$

$\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}} =$



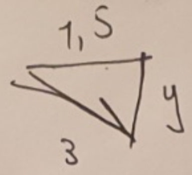
$\Delta BCT = \Delta TDA$ –
– (по СУС) $\Rightarrow$
$\Rightarrow BT = A\cancel{D}T$

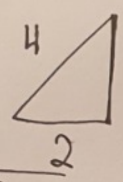
$\Delta BCT = \Delta TDA =$
$= \Delta BOA$ – по С-~~У~~-С
$\Rightarrow \Delta ABT$ – правильный

Черновик

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{3+4}{2}\cdot 3{,}5\sqrt{3} = \frac{7\cdot 3{,}5\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 3{,}5^2\sqrt{3} = 12{,}25\sqrt{3} = \cancel{\frac{50}{4}}\ \frac{49}{4}\sqrt{3}$$





$$x = \sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{9-2{,}25} = \sqrt{6{,}75} = \sqrt{3\cdot 2{,}25} = 1{,}5\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ \hline +\ 175 \\ 105\ \ \\ \hline 12{,}25 \end{array}$$

$S_{\Delta}A$

$S_{\Delta ABT} =$

$$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2\cdot BC\cdot CT\cdot \cos\angle BCT = 9+16+2\cdot 3\cdot 4\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2} = 9+16+12 = 37 \Rightarrow BT = \sqrt{37}$$

$$AB = \sqrt{9+16+2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{9+16+12} = \sqrt{37}$$

$$S_{ABT} = AB\cdot BT\cdot \sin 60\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{37}\cdot\sqrt{37}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{37\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{37}{4}\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37\sqrt{3}}{4} : \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{37\cancel{\sqrt{3}}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 49\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{37}{49}$$

3

Черновик.

15^2

1 ~~8~~ 15

15 дублей 15

1:1 225 5

к с 25

11 12 13 14 15 16 17 18 19 1

1:1 16

$n^2 - \cancel{(n-1)}\,n - (n-1) =$

$= n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$

16

$(6-1)^2 = 25$

$(15-1)^2 = 14^2 = 196$

196 · 15

196 + 195 + 194 + 193 + 192 + 191 + 190 + 189 + 188 + 187 + 186 + 185 + 184 + 183 + 182 + ~~181~~ =

=

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{196 + 182}{2} \cdot 15 =$

2835

$189 \cdot 15 = 945 + 189 = 2835$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

к	с
1	1
1	2
1	3
1	4
1	5
2	1
2	2
2	3
2	4
2	5
3	1
3	2
3	3
3	4
3	5
4	1
4	2
4	3
4	4
4	5
5	2
5	3
5	4
5	5
5	6
6	1
6	2
6	3
6	4
6	5
6	6

11 12 13 21 22 23 31 32 33

11 4

22 3

33 2

1

196 + 182 = 378

378 : 2 = 189

4

№5 Черновик

Когда мы берём первый набор карточек

$a_{15} = a_1 \cancel{+} 14d = 196$

$7 + 63 - 21$

$1 + 63 - 3 \cdot 1 \cdot 9 = 1 + 63 - 27 = 64 - 27 = 37$

$1 + 81 -$

70 7 3

$7 + 3$

$3b = 63$

$b = 21$

$49 + 21 - 3 \cdot 7 \cdot 3 = 70 - 63 = 7$

5