Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007532**

ID профиля: **285175**

Вариант 14

$a, b \dots x.$ a - с.м. $б$ - с.б. Черновик

$$\begin{cases} a + \dots + b = x. \\ x + 29a = 450. \\ x + 13b = 450. \end{cases}$$

$30a = 450.$

$a = 15.$

$29a - 13b = 0.$ $14b = 450$

$29a = 13b.$ $b = \frac{225}{7} = 32\frac{1}{7}.$

$a = 13,\ b = 29.$

$29 + 13 \cdot 30 = 29 + 390 = 419$

$450 - 419 = 31.$

$\cancel{29} + 13 + 29 \cdot 14 = 13 + 406 = 419$

$$\begin{array}{r} \times\, 29 \\ 14 \\ \hline 116 \\ +29 \\ \hline 406 \end{array}$$

$31 - 14 = 17.$

13, 14, 17, 29

13, 15, 16, 19

211007532 (U285175 M1277608)

$x^2 - 2x(y-a) + 2a^2 + 2y = 0,$

$D = (1-a)^2 \dots$

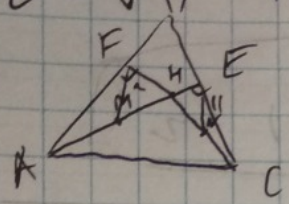
$AF = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$

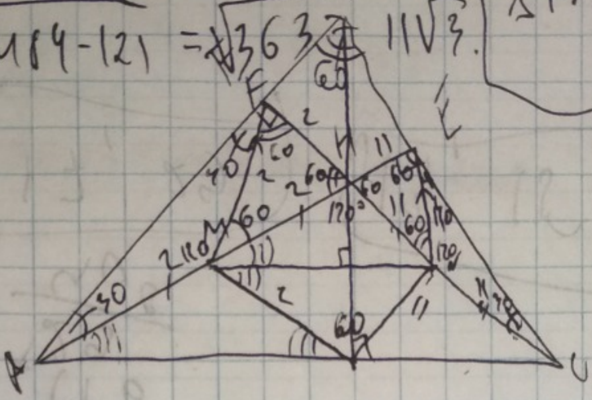
$CE = \sqrt{22^2 - 11^2} = \sqrt{484 - 121} = \sqrt{363} = 11\sqrt{3}.$

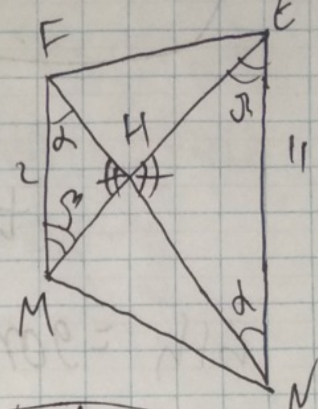
$\angle ABC = 60°$ т.к.
$\triangle FMH$ – р/с.
$\angle ABC$

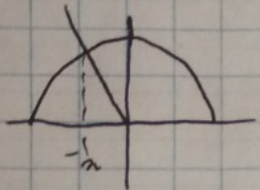
$x^2 - 2a$

$\triangle AMC$ – R_{AMC}









$\triangle FHM \sim \triangle NHE.$

$$\frac{FH}{NH} = \frac{FM}{NE} = \frac{HM}{HE}$$

$\angle FHM = 180° - \angle HFM - \angle HMF$

$\angle FHM = 180° - \alpha - \beta =$

(4)

$$\frac{FH}{11} = \frac{2}{11} = \frac{2}{HE}$$

$FH = 2,\ HE = 11.$ =

$\triangle AFH \sim \triangle CEH \quad \frac{AF}{CE} = \frac{AH}{CH} = \frac{FH}{EH}$

черновик

588 | 4
147 |

$$\frac{AF}{CE} = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$$

$$MN = \sqrt{4 + 121 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 11}{2}} = \sqrt{125 + 22} = \sqrt{147}$$

$AC = \sqrt{4^2 + 22^2 + \cancel{2} \cdot 4 \cdot 22 \cos 120°} = \sqrt{16 + 484 + 88} =$

$= \sqrt{588} = 2\sqrt{147}.$

211007532 (U285175 M1277608)

..., сумма всех чисел ...

$x^2-2x(y-a)+2a^2+2y^2=0$

$D=(y-a)^2-2a^2-2y=$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=$

$=y^2-2ay+a^2-2a^2-2y=$

$(x+y)^2-(x-y)^2+2a(a+x)=0$

$=y^2-2ay-a^2-2y=$

$(a+x)^2+a^2-2xy+y^2=0$

$=(y-a)(y+a)+$

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y\,a^4+y$

$+2y(ay-a)=$

$=(y-a)(y+a+2y)$

$x(-2a^3+a^2x-a^4)$

$(y-a)(3y+a)$

$y(a^2y-2a^2$

$x=y-a\pm\sqrt{(y-a)(3y+a)}$

Черновик

$y=-a$

a^2x^2

$x=y-a=2y$

$x=-2a$

$4a^2a^2+a^2a^2\cancel{+2}\cdot 8a^3$

211007532 (U285175 M1277608)

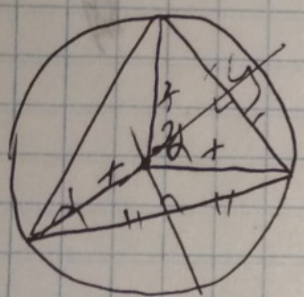
Черновик

$\Delta ABE \sim \Delta CBF$.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BE}{CF}=\frac{BE}{BF}.$$

$$\frac{2\sqrt{3}+BF}{11\sqrt{3}+BE}=\frac{15}{24}=\frac{BE}{BF}=\frac{5}{8}.$$

$$BE=\frac{5}{8}BF$$



$$\frac{2\sqrt{3}+BF}{11\sqrt{3}+\frac{5}{8}BF}=\frac{5}{8}$$

$$16\sqrt{3}+8BF=55\sqrt{3}+\frac{25}{8}BF. \quad \left(\frac{64}{8};\ =3\frac{1}{8}\right)$$

$$\begin{array}{r} 16\\ \times 16\\ \hline 96\\ 16\\ \hline 256 \end{array}$$

$$\frac{39}{8}\cancel{\left(\frac{?}{8}\right)}BF=39\sqrt{3}$$

$$100\cdot 3+256\cdot 3-160\cdot 3\sqrt{3}$$

$$y^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cos 2\alpha. \qquad \frac{1}{8}BF=\sqrt{3}$$

$$BE=\frac{5}{8}\cdot 8\sqrt{3}=5\sqrt{3}.$$

$$y^2=x^2(2-2\cos 2\alpha) \qquad BF=8\sqrt{3}.$$

$$x^2=\frac{y^2}{2-2\cos 2\alpha}. \quad x=\frac{y}{\sqrt{2-2\cos 2\alpha}}=\frac{2\sqrt{147}}{\sqrt{2-2\cdot\cos 120}}=\frac{2\sqrt{147}}{\sqrt{2+\frac{2\cdot 1}{2}}}=$$

$$AB=AF+FB=2\sqrt{3}+8\sqrt{3}=10\sqrt{3}.$$

$$BC=BE+CE=11\sqrt{3}+5\sqrt{3}=16\sqrt{3}. \qquad =\frac{2\sqrt{147}}{\sqrt{3}}=$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin 60^\circ=\frac{10\sqrt{3}\cdot 16\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\cdot 8\cdot 3\cdot\sqrt{3}=40\cdot 3\sqrt{3}=120\sqrt{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{147\cdot 3}}{3}=\frac{2\cdot\sqrt{441}}{3}=\frac{2\cdot 21}{3}=2\cdot 7=14$$

Беловик.

№7.

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0;$

$x^2-2x(y-a)+2a^2+2y^2=0;$

$\frac{D}{4}=(y-a)^2-2a^2-2y^2=y^2-2ya+a^2-2a^2-2y^2=-a^2-2ay-y^2=$

$=-(a^2+2ay+y^2)=-(a+y)^2.$

Чтобы ур-ие имело решение нужно $-(a+y)^2\geq 0;$

$(a+y)^2\leq 0;$

$(a+y)^2=0;$

$a=-y.$

$x=y-a=2y=-2a.$

4

Беловик.

№2.

Пусть самое маленькое число a, самое большое b, сумма всех чисел x.

Тогда $\begin{cases} x+29a=450 \ (1) \\ x+13b=450 \ (2) \end{cases}$

Вычтем из (1) (2): $x+29a-x-13b=450-450$;

$29a-13b=0$;

$29a=13b$, значит, т.к. a и b - натуральные,

$a \vdots 13$, $b \vdots 29$;

$a=13k$, $b=29k$.

$30a<450$.

$a<15$, значит $a=13$, $b=29$.

$450-29-13\cdot30=450-419=31$, значит сумма чисел, отличных от a и b равна 31.

Каждое из этих чисел меньше 29 и больше 13, значит возможны варианты $31=14+17=15+16$, т.к. в иных случаях одно из чисел будет меньше 13.

В итоге возможны варианты: 13, 14, 17, 29.

13, 15, 16, 29.

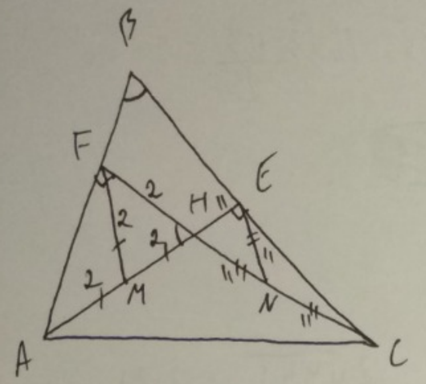
Ответ: 13, 14, 17, 29;

13, 15, 16, 29.

3

211007532 (U285175 M1277608)

Беловик.



№1.

Дано: $\triangle ABC$ – о/у. CF, AE – высоты. $CF \cap AE = H$. M – сер. AH, N – сер. CH. $FM = 2$. $EN = 11$. $FM \parallel EN$.

Найти: $\angle ABC$, S_{ABC}, R_{ABC}.

Решение.

FM – медиана в п/у Δ-ке AFH ($\angle AFH = 90°$, CF – высота), значит $AM = MH = FM = 2$. Аналогично $CN = NH = EN = 11$.

$\Delta FHM \sim \Delta NHE$ ($\angle FHM = \angle NHE$ – верт., $\angle MFH = \angle ENH$ – накрест. леж. при $FM \parallel NE$), значит $\frac{FH}{NH} = \frac{FM}{NE} = \frac{HM}{HE}$. $\frac{FH}{11} = \frac{2}{11} = \frac{2}{HE}$, значит $FH = 2$, $HE = 11$.

Т.к. ΔFMH – р/с ($FM = FH = MH = 2$), то $\angle HMF = \angle MFH = \angle FHM = 60°$.

$\angle FHM = 180° - \angle FHE = \angle FBE = \angle ABC = 60°$ ($\angle FBE = 180° - \angle FHE$, т.к. $\angle BFH + \angle BEH = 90° + 90° = 180°$, а сумма углов в четырёхугольнике $360°$).

ΔENH также р/с ($EN = NH = HE = 11$), $\angle ENH = 60°$.

$\Delta ABE \sim \Delta CBF$ ($\angle FBE$ – общ., $\angle BAE = \frac{180° - \angle FMA}{2} = \frac{180° - 180° + \angle FMH}{2} = \frac{\angle HNE}{2} = 30°$), значит $\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CF} = \frac{BE}{BF}$. $\frac{AF + BF}{CE + BE} = \frac{15}{24} = \frac{BE}{BF}$. $BE = \frac{5}{8} BF$.

$AF = \sqrt{AH^2 - FH^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$ – по т. Пифагора.

$CE = \sqrt{CH^2 - EH^2} = \sqrt{484 - 121} = 11\sqrt{3}$ – по т. Пифагора.

$\frac{2\sqrt{3} + BF}{11\sqrt{3} + \frac{5}{8} BF} = \frac{5}{8}$;

$16\sqrt{3} + 8BF = 55\sqrt{3} + \frac{25}{8} BF$;

$\frac{39}{8} BF = 39\sqrt{3}$;

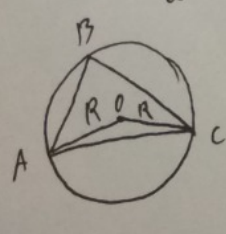
$BF = 8\sqrt{3}$. $BE = \frac{5}{8} \cdot 8\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

$AB = AF + BF = 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$.

$BC = BE + CE = 11\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot \sin 60°}{2} = \frac{10 \cdot 16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 120\sqrt{3}$.

1



$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2 \cdot AO \cdot OC \cos\angle AOC$ – по т. косинусов.

$AC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\angle AOC$. $\cos\angle AOC = \cos(2 \cdot \angle ABC)$.

$R^2 = \frac{AC^2}{2 - 2\cos\angle AOC}$. $R = \frac{AC}{\sqrt{2 - 2\cos\angle AOC}}$.

по т. косинусов:

~~$AC^2 = AH^2 + \ldots$~~

Беловик. N1 (продолжение).

$\cancel{AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B = (10\sqrt{3})^2 + (16\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\angle AHC = 180^\circ - \angle FHM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2 - 2 \cdot AH \cdot CH \cos\angle AHC} = \sqrt{16 + 484 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 22}{2}} =$

$= \sqrt{500 + 88} = \sqrt{588} = 2\sqrt{147}.$

$R_{ABC} = \frac{AC}{\sqrt{2 - 2\cos(2 \cdot \angle ABC)}} = \frac{2\sqrt{147}}{\sqrt{2 + \frac{2}{2}}} = \frac{2\sqrt{147 \cdot 3}}{3} = \frac{2\sqrt{441}}{3} = \frac{2 \cdot 21}{3} = 14.$

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$;

$S_{ABC} = 120\sqrt{3}$;

$R_{ABC} = 14$.

2

211007532 (U285175 M1277608)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007532**

ID профиля: **285175**

Вариант 14

Беловик.

№4.

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases} \quad \begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37 \end{cases}$$

Пусть $x^2+y^2=a$, $x^2y^2=b$. Очевидно, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases} \quad \begin{cases} -7a+7=-3b \\ a^2-7a+7=37 \quad (1) \end{cases}$$

Решим (1): $a^2-7a-30=0$.

$D=49+4\cdot30=169=13^2$.

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{7+13}{2} \\ a=\frac{7-13}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a=10 \\ a=-3 \text{ - пост. к.} \end{array}\right.$$

$$b=\frac{7a-7}{3}=\frac{7\cdot10-7}{3}=\frac{63}{3}=21.$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=10-y^2 \\ (10-y^2)y^2=21 \quad (2) \end{cases}$$

Пусть $y^2=c$, решим (2): $c^2-10c+21=0$.

$\frac{D}{4}=25-21=4=2^2$.

$$\left[\begin{array}{l} c=5+2 \\ c=5-2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} c=7 \\ c=3 \end{array}\right.$$

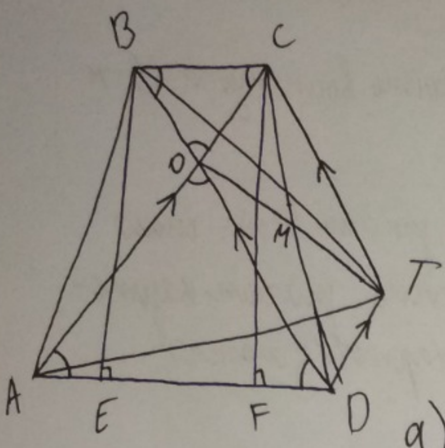
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2=7 \\ x^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2=3 \\ x^2=7 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\pm\sqrt{7} \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right.$$

1

Ответ: $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{3};\sqrt{7})$.

Беловик.

№6.



Дано: ABCD - вып. 4-ёх угольник.
$AC \cap BD = O$. $BC = 3$. $AD = 4$.
ΔBOC и ΔAOD - прав.
T сим. O отн. сер. CD, $CM = MD$, $OM = MT$.
а) Д-ть: ΔABT - прав. б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - найти.

а) Д-во.

$AD \parallel BC$, т.к. $\angle DBC = \angle BDA$ - накрест. леж.

$\Delta ABO = \Delta DOC$ ($\angle BOA = \angle COD$ - верт., $BO = OC$, $AO = DO$ - по усл.), значит $AB = CD$.

$CM = MD$, $OM = \cancel{OT}$ MT, значит OCTD - пар-м, т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Тогда $CT \parallel OD$, т.е. $CT \parallel BD$, а $CO \parallel TD$, т.е. $TD \parallel AC$. Также $TD = CO = BC$, $CT = OD = AD$.

Значит BCTD и ADTC - р/б трапеции, $CD = BT$, $CD = AT$, т.к. в р/б трапеции диагонали равны.

$CD = BT = AT = AB$, значит ΔABT - правильный. чтд

б) Решение.

$S_{ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot AT \sin\angle BAT = \frac{1}{2} AB^2 \sin 60° = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ $BE = CF$, $EF = BC$, т.к. EBCF - прямоуг-к. ($BC \parallel EF$, $BE \parallel CF$, т.к. $BE \perp EF$, $CF \perp EF$)

$AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$. $\angle AOB = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120°$
$AE = FD$, т.к. $\Delta ABE = \Delta DCF$ ($AB = CD$ - ~~катеты~~ гипотенузы, $BE = CF$ - катеты)

$AB = \sqrt{BO^2 + AO^2 - 2 \cdot BO \cdot AO \cdot \cos\angle AOB} = \sqrt{9 + 16 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2}} = \sqrt{37}$ - по т. косинусов.

$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{(\sqrt{37})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{37 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{147}{4}} = \frac{\sqrt{147}}{2}$.

$S_{ABT} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$.

$S_{ABCD} = \frac{(BC+AD)}{2} \cdot BE = \frac{(3+4)}{2} \cdot \frac{\sqrt{147}}{2} = \frac{7\sqrt{147}}{4}$.

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37\sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot 7\sqrt{147}} = \frac{37\sqrt{3 \cdot 147}}{7 \cdot 147} = \frac{37\sqrt{441}}{7 \cdot 147} = \frac{37 \cdot 21}{7 \cdot 147} = \frac{37}{49}$.

2

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}$.

211007532 (U285175 M1277609)

Беловик.

№5.

Всего дублей 15, значит первая карточка может быть вытянута 15-ю различными способами.

Каждое число встречается на каждой из сторон 15 раз, значит всего число можно встретить 30 раз, 2 из которых на одной карточке, значит карточек, содержащих каждое число 29. Значит вторую карточку можно вытащить $225-29=196$ различными способами.

$15\cdot 196=2940$ – способов выполнить желание фокусника.

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times\ 15 \\ \hline 980 \\ +\ 196 \\ \hline 2940 \end{array}$$

3

Ответ: 2940 способов.

Черновик

$$S_{ABT} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABCD} = \frac{7\sqrt{147}}{2 \cdot 2}$$

$$\frac{37\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{7\sqrt{147}} = \frac{37\sqrt{3}}{7\sqrt{147}} = \frac{37\sqrt{3 \cdot 147}}{7 \cdot 147} = \frac{37}{49}.$$

$21 \times 21 = 441$

$147 \times 3 = 441$

$225 = 15^2.$

Всего дублей 15...

1к 2к 1к 2к

$15 \cdot 196 = 2940.$

196×15: $980 + 196 = 2940$

К. см. С. см.

Ту дубль нарис. Каждое число на каждой стороне встр. 15 раз. Карт с каждым числом 29. Одна у них дубль. Ту дубля 28.

$225 - 29 = 196 \cdot 14$

$196 \cdot 10 + 196 \cdot 5 = 1960 + 980$

Чорновик

$7\cdot3+7\cdot7-3\cdot3\cdot7$
$21+49-63=$
$=70-63=7.$

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases}$$ $x^2=10-y$

$9+49-3\cdot7=58-21=37.$

$(10-y^2)y^2=21.$

$10c-c^2=21.$

$c^2-10c+21=0.$

$\frac{D}{4}=25-21=4$

$c=\frac{5\pm2}{1}$

$c=\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$

$7x^2+7y^2-3x^2y^2=7(x^2+y^2)-3x^2y^2$

$\cancel{x^4+y^4+2x^2y^2+x^2y^2=(x^2-y^2)^2+x^2y^2}$

$x^4+y^4+2x^2y^2-3x^2y^2=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2$

$$\begin{cases} y=\pm\sqrt7 \\ x=\pm\sqrt3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt7 \\ y=\pm\sqrt3 \end{cases}$$

$x^2+y^2=a.$

$x^2y^2=b.$ $7\cdot3+7\cdot7-3\cdot3\cdot7=21+49-42=$

$-3b=7-7a.$ $3b=7a-7.$

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37. \end{cases}$$

$b=\frac{7a-7}{3}$

$a^2+7-7a=37$

$b=-3\cdot7-7$

$a^2-7a-30=0.$

$$\begin{cases} a=10 \\ b=\frac{70-7}{3}=\frac{63}{3}=21 \end{cases}$$

$D=49+30\cdot4=49+120=169.$

$a=\frac{7\pm13}{2}.$ $\begin{bmatrix} a=10. \\ a=-3. \end{bmatrix}$

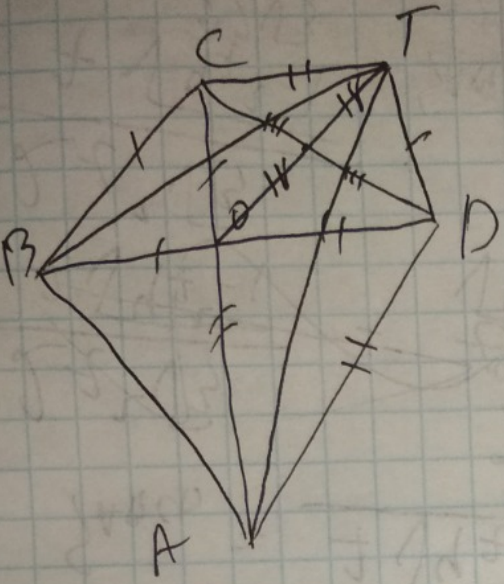
$a=-3$

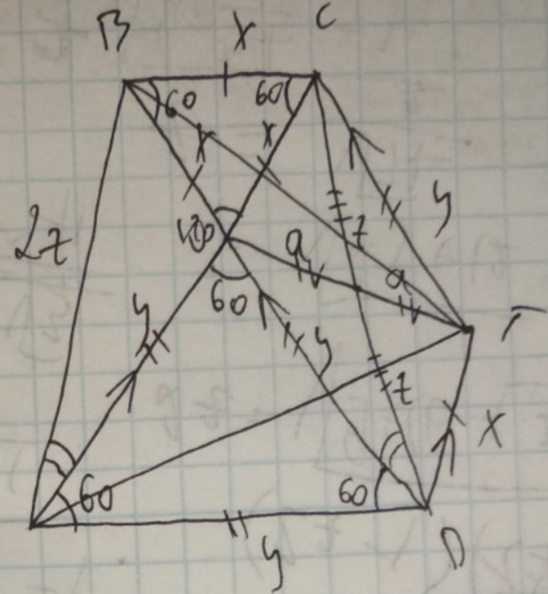
$\cancel{b=\frac{-210-7}{3}=-\frac{217}{3}=-}$

$a=-3$

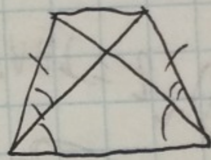
$b=\frac{-3\cdot7-7}{3}=\frac{-21-7}{3}=\frac{-28}{3}=-9\frac{1}{3}.$

Черновик





ABCD – трап. р/б.

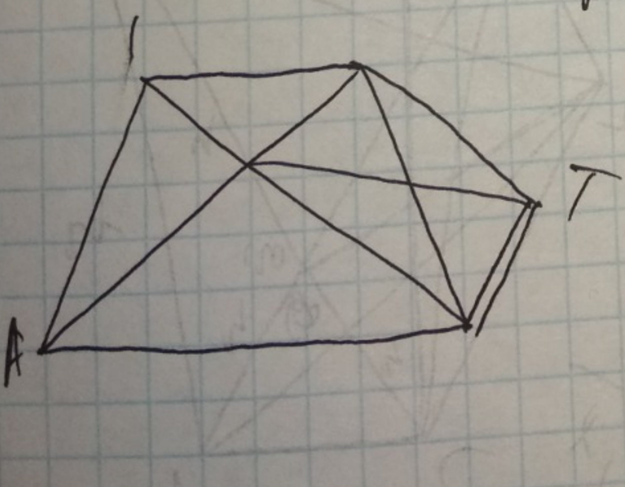


OCTD – пар-м.

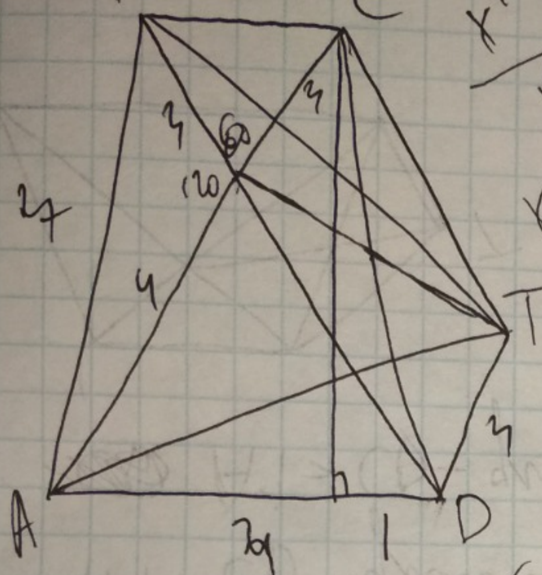
AC || DT. DB || CT

BT = CD – диагонали в р/б трап.

AT = CD – диагонали в р/б трап.



Черновик

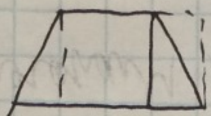


$x \cdot \frac{147}{4}$

$\frac{\sqrt{147}}{2}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} x \cdot x \sin 60^\circ = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABT} = \frac{2z \cdot 2z \sin 60}{2} = \frac{2z^2\sqrt{3}}{2} = z^2\sqrt{3}$



$\frac{(a+b)}{2} h$

$\frac{(3+4)h}{2}$

$h = \sqrt{1 + 2z^2}$

$S_{ABT} = z^2\sqrt{3} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$

$h = \sqrt{(2z)^2 - 1} = \sqrt{4z^2 - 1}$.

$2z = \sqrt{9 + 16 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2}} = \sqrt{25 + 12} = \sqrt{37}$.

$S_{ABCD} = \frac{7\sqrt{4z^2-1}}{2}$

$z = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

$\frac{2z^2\sqrt{3}}{7\sqrt{4z^2-1}}$

$S_{ABCD} = \frac{7\sqrt{4 \cdot \frac{37}{4} - 1}}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

$\frac{37\sqrt{3}}{4 \cdot 21} = \frac{37\sqrt{3}}{84}$

211007532 (U285175 M1277609)