Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007487**

ID профиля: **853825**

Вариант 14

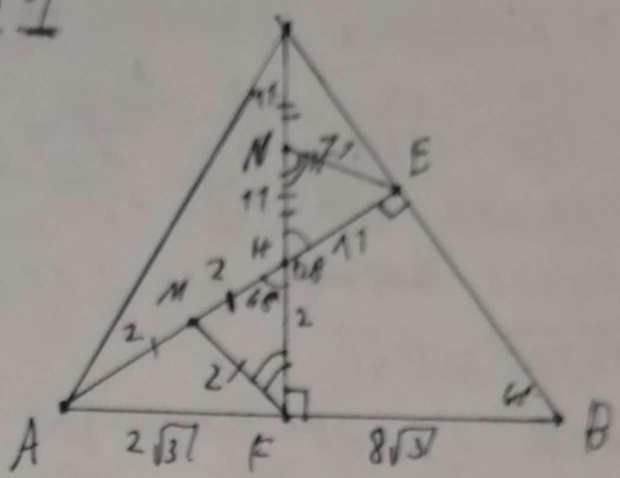
Чистовик

№ 1

Дано.
$AE \perp BC$
ΔABC.
$CF \perp AB$
$CF \cap AE = H$.
$AM = MH$.
$CN = HN$.
$FM = 2$.
$EN = 11$.
$FM \parallel EN$

Найти.
$\angle ABC$ - ?
$S_{\Delta ABC}$ - ?
R - ?

Решение



1) ΔHEC – прямоугольный; NE – медиана, проведённая из прямого угла $\angle HEC \Rightarrow CN = NE = NH$ (св-во прям-го Δ) $= 11$.

2) аналогично п1. для ΔAFH: $MF = AM = MH = 2$.

3) $\angle MHF = \angle EHN$ (вертикальные углы равны).

4) $\angle MFH = \angle ENH$ (накрест лежащие углы при $MF \parallel NE$ и секущей NF)

5) $\Delta MHF \sim \Delta EHN$ (по двум равным углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{MH}{HE} = \frac{MF}{NE} = \frac{HF}{HN}$; $\frac{2}{HE} = \frac{2}{11} = \frac{HF}{11} \Leftrightarrow HE = 11$; $HF = 2$.

6) ΔMHF – р/с ($MH = HF = MF = 2$) $\Rightarrow \angle MHF = 60°$.

7) $\angle FHE = 180° - \angle MHF = 120°$ (сумма смежных углов).

8) $\angle ABC + \angle HFB + \angle HEB + \angle FHE = 360°$ (сумма углов 4-уг-ка).

$\angle ABC = 360° - 90° - 90° - 120° = 60°$.

9) ΔABE: $\sin(\angle ABC) = \frac{AE}{AB}$ (по опред. синуса).

$\sin 60° = \frac{15}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{15}{\sin 60°} = \frac{15}{\sqrt{3}/2} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$.

10) $S_{\Delta ABC} = CF \cdot AB \cdot \frac{1}{2}$. (площадь Δ).

$S_{\Delta ABC} = \overset{12}{\cancel{24}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 10\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$.

211007487 (U853825 M1275691)

Чистовик.

№1 (продолжение).

11) ΔCFB: ~~$\sin\angle ABC$ =~~ $tg(\angle ABC) = \frac{CF}{FB}$ (по опред. тангенса).

$FB = \frac{CF}{tg60} = \frac{24}{tg60} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{\overset{8}{\cancel{24}}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 8\sqrt{3}$.

12) $AF = AB - FB = 10\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

13) По теореме Пифагора для ΔAFC: $AC^2 = AF^2 + CF^2$.

$AC = \sqrt{12 + 24^2} = 14\sqrt{3}$.

14) $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$ (теорема синусов для ΔABC).

$R = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2} = \frac{14\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 14$.

Ответ: $\angle ABC = 60$; $S_{\Delta ABC} = 120\sqrt{3}$; $R = 14$.

Чистовик

№2.

Пусть эти числа $a, b, c, d \ldots m$. расположены в порядке возрастания.

$$\begin{cases} 30a + b + c + d + \ldots + m = 450 \\ a + b + c + d + \ldots + 14m = 450 \end{cases} \ominus \quad 29a - 13m = 0. \quad 29a = 13m. \quad a; m \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = 13k$; $m = 29n$; где $k; n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} 390k + b + c + d + \ldots + 29n = 450. \\ 13k + b + c + d + \ldots + 406n = 450. \end{cases}$$

Заметим, что k и n не могут быть больше 1, в противном случае сумма оставшихся натуральных чисел будет меньше 0, что невозможно.

$$\begin{cases} 390 + 29 + b + c + d + \ldots = 450. \\ 13 + 406 + b + c + d + \ldots = 450. \end{cases} \Leftrightarrow b + c + d + \ldots = 31.$$

все числа разные и $\in \mathbb{N} \Rightarrow$ ни 1 из этих чисел не равно 13 и 29, т.к. они уже заняты.

если чисел только 4: ~~3+28=31; 4+27=31; ...~~ }.

$a_1 + a_2 = 31$. $a_1 \neq a_2 \neq 13 \neq 29$ $13 < a_1 < a_2 < 29$.

~~$a_1 \in \{14; 15; 16; \ldots; 20\}$~~.

~~$a_2 \in \{$~~ при $a_1 = 14$ $a_2 = 17$

при $a_1 = 15$ $a_2 = 16$.

если чисел только 5:

$a_1 + a_2 + a_3 = 31$.

$13 < a_1 < a_2 < a_3 < 29$.

Заметим, что такое невозможно, как и при большем кол-ве.

Ответ: при 13; 14; 17; 29 и при 13; 15; 16; 29.

Чистовик.

№3.

$2y^2-2xy+(x^2+2ax+2a^2)=0$

Рассмотрим дискриминант кв. трёхчлена относительно y:

$D=4x^2-4\cdot2(x^2+2ax+2a^2)=-4x^2-16ax-16a^2=-(2x+4a)^2$

$-(2x+4a)^2\le0$; для существования y: $D\ge0$ ⇒

⇒ $(2x+4a)^2=0$ $\quad a=-\frac{x}{2}$.

$2y^2-2xy+x^2+x^2+\frac{x^2}{2}=0$.

$2y^2-2xy+\frac{5x^2}{2}=0$

Рассм. дискриминант кв. трёхчлена относ. y:

$D=4x^2-2\cdot4\cdot\frac{5x^2}{2}=-16x^2\le0$

для существование y: $D\ge0$ ⇒ $-16x^2=0$ $\quad x=0$.

при $x=0$; $y=0$ ⇒ A – точка с коор. $(0;0)$.

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$.

$a^2x^2-2ax(a^2+3)+a^4+6a^2+9-6a^2+a^2y^2-2a^2y=0$.

$(ax-a^2-3)^2+a^2y^2-2a^2y+a^2-a^2-6a^2=0$

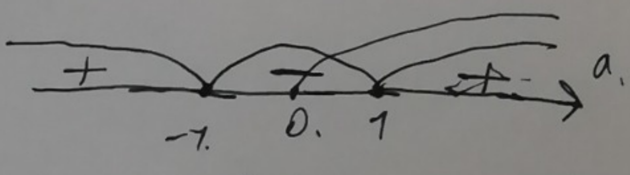
$(ax-a^2-3)^2+(ay-a)^2=7a^2$.

центр. окружности: $(a^2+3;a)$; радиус. $a\sqrt{7}$

радиус ≥0 ⇒ $a\sqrt{7}\ge0$ $\quad a\ge0$ при $a=0$; $9=0$ – неверно ⇒ $a\ne0$.

$a>0$.

центр. окружности должен лежать по разные стороны от точки $(0;0)$ прямой $x=4$ ⇒ $a^2+3>4$. $\quad a^2>1$. $\quad (a-1)(a+1)>0$.



Ответ: при $a>1$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007487**

ID профиля: **853825**

Вариант 14

Чистовик

№4.

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37. \end{cases}$$

Замена: $x^2=a$; $y^2=b$; $a\geq 0$; $b\geq 0$

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37. \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} a+b=\frac{7+3ab}{7}. \\ ab \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3ab=7(a+b-1). \\ (a+b)^2-2ab-ab=37 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3ab=7(a+b-1). \ (1) \\ (a+b)^2-7(a+b)+7.=37 \ (2). \end{cases}$$

$a+b=t$: $a\geq 0$; $b\geq 0 \Rightarrow t\geq 0$.

(2).

$t^2-7t-30=0$

$D=49+4\cdot 30=169$

$t_1=\frac{7+13}{2}=10$

$t_2=\frac{7-13}{2}=-3$ – не подходит, т.к. $t\geq 0$.

$$\begin{cases} a+b=10. \\ 3ab=7(a+b-1) \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=10 \\ 3ab=7\cdot 9\ 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=10 \\ ab=21. \end{cases} \quad \begin{cases} b=10-a \ (3) \\ 10a-a^2=21 \ (4). \end{cases}$$

(4)

$10a-a^2=21.$

$a^2-10a+21=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=7. \end{array}\right.$$

при $a=3$; $b=10-3=7$; при $a=7$; $b=3$.

Обр. замена:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=7 \\ y^2=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-\sqrt{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$; $(\sqrt{7};\sqrt{3})$; $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$.

Чистовик

№5.

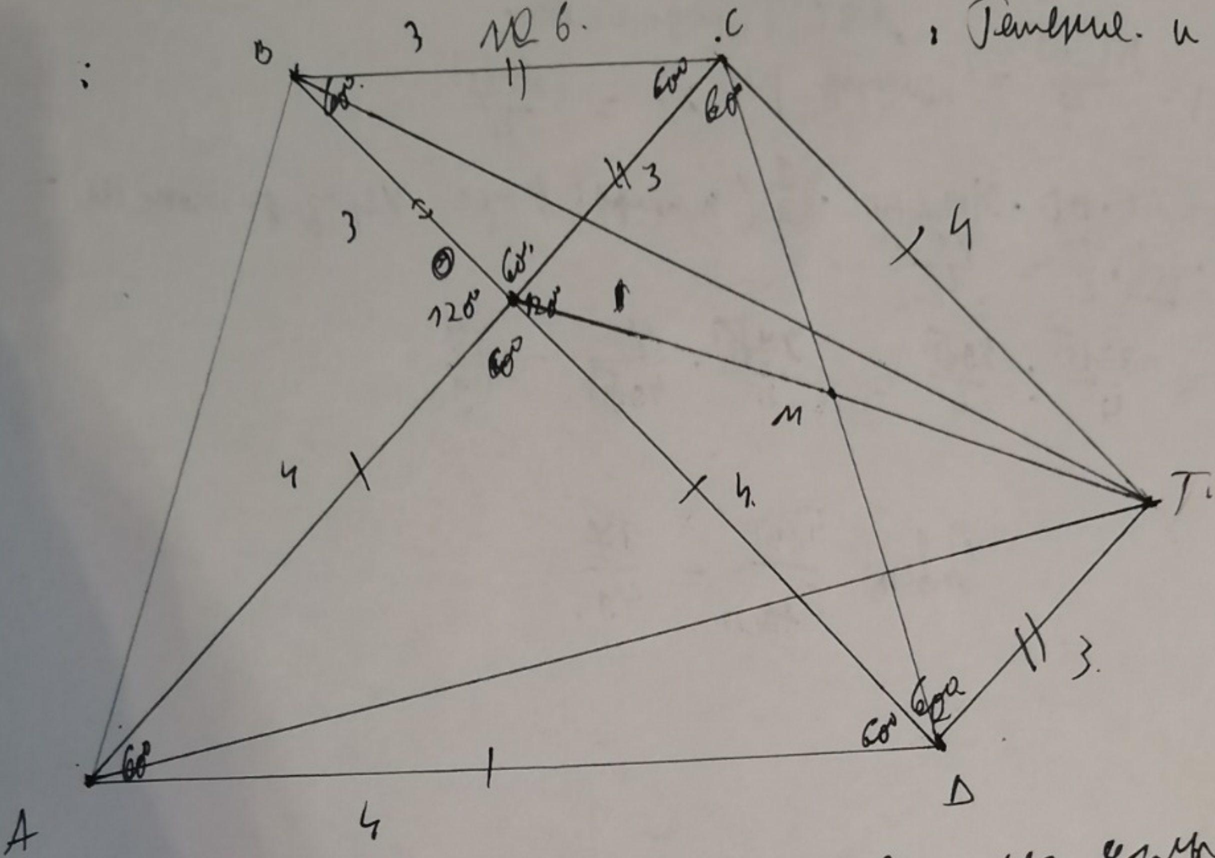
Заметим, что всего дублей – 15, значит 1 карту мы можем выбрать 15-ю способами.

1 какое-то число для второй карточки уже занято, значит мы можем выбрать на обеих сторонах только 15−1=14 чисел. Перемножая, получаем ответ: 15·14·14=2940 способов.

Ответ: 2940 способов.

Чистовик.

№ 6. : Решение и Док-ва



Дано
ABCD - вып. 4-уг.
$AC \cap BD = O$.
ΔBOC - р/с.
ΔAOD - р/с.
$OM = MT$.
$CM = MD$

Т. Д.
а) ΔABT - р/с.
Найти
б) при $BC = 3$; $AD = 4$.
Найти $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

1) $\angle BCA = \angle CAD = 60°$; накрест. леж. углы $\Rightarrow$ (признак $\parallel$ прямых). $\Rightarrow$ ABCD - трапеция.
$\Rightarrow BC \parallel AD$
2) $BO = OC$; $AO = OD$ (ΔBOC и ΔAOD - р/с).
3) $\angle BOA = 180 - \angle AOD$ (смежные углы) $= 120°$.
4) аналогично п 3. для $\angle DOC = 120°$.
5) $\Delta AOB = \Delta COD$ (II признак; $AO = OD$; $BO = OC$; $\angle BOA = \angle DOC = 120°$)
$\Rightarrow AB = CD$.
6) $AB = CD \Leftrightarrow ABCD$ - р/б трапеция
7) OCTD - параллелограмм ($OM = MT$; $CM = MD$;) ~~признак~~
8) $OD = CT$; $OC = DT$; $OC \parallel DT$; $OD \parallel CT$ (св-ва #).
9) $\angle DOC + \angle ODT = 180°$ (односторонние углы при $AC \parallel DT$ и секущей OD) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ODT = 60°$.

10) $\Delta ADT = \Delta BCT = \Delta AOB$ ($\angle AOB = \angle ADT = \angle BCT = 120°$; $AO = AD = CT$; $BC = DT = OB$) (II признак) $\Rightarrow AB = AT = BT$. $\Rightarrow \Delta ABT$ - р/с [redacted]

11) ΔBCT: $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos \angle BCT$ (теорема косинусов).
$BT^2 = 25 - (24 \cdot \cos 120°) = 25 + 12 = 37$.

№6 (продолжение).

12). $S_{ABT} = \frac{BT^2\sqrt{3}}{4} =$ (площадь р/с Δ). $= \frac{37\sqrt{3}}{4}.$

13) $S_{ABCD} = AC \cdot BD \cdot \sin\angle BOC \cdot \frac{1}{2}$ (площадь 4/уг через диагонали) $=$
$= 49 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}.$

14) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37\sqrt{3}}{4} : \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{37\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{49\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{37}{49}.$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}.$