Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

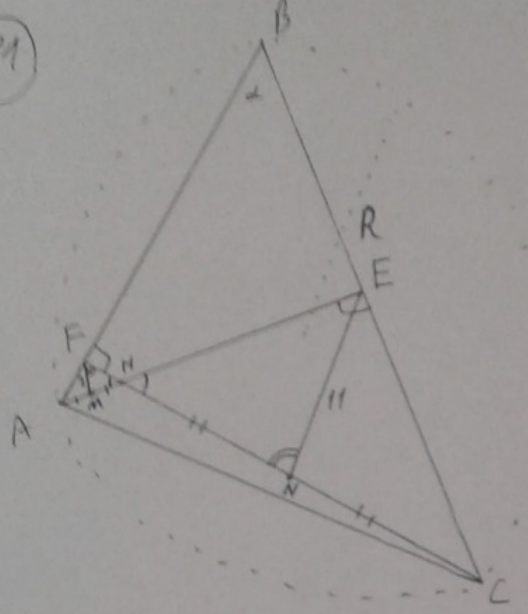
Шифр: **211007384**

ID профиля: **289692**

Вариант 14

Чистовик. ①

№1



Дано:
$FM=2$; $EN=11$; $FM \parallel EN$,
CF и AE - высоты;

Найти:
$\alpha=?$; $S_{ABC}=?$; $R=?$

Решение:

1) FM и EN - медианы в $\triangle AFH$ и $\triangle HEC$.

2) по теореме: медиана в прямоугольном треугольнике $=\frac{1}{2}$ гипотенузы.
$\Rightarrow EN=HN=NC=11$ и $FM=HM=AM=2$.

3) $\triangle MFH \sim \triangle HEN$ (по 2-ум углам) $(FM \parallel EN) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{2}{11}=\frac{2}{HE} \Rightarrow HE=11. \Rightarrow \triangle HNE$ - равносторонний $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle HEN=60^\circ \Rightarrow \angle NEC=30^\circ$.

4) т.к. $NE=NC \Rightarrow \triangle NEC$ - равноб. $\Rightarrow \angle NCE=\angle NEC=30^\circ$

5) $\alpha=180-90-\angle NCE$.
$\alpha=90-30$
$\alpha=60$.

6) Пусть $BC=2x \Rightarrow BF=x$ $(\angle NCE=30^\circ)$

7) т.к. $\triangle HEN$ - равносторонний $\Rightarrow \triangle FMH$ - равносторонний. $\Rightarrow FH=FM=2$

8) $BC^2=FB^2+FC^2$; $4x^2=x^2+(2+11+11)^2$;
$3x^2=24\cdot 24$.
$x^2=8\cdot 24$.
$x=2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}=4\sqrt{12}=8\sqrt{3} \Rightarrow BC=2x=16\sqrt{3}$.

9) $S_{\triangle ABC}=AE\cdot BC\cdot\frac{1}{2}$, $S_{\triangle ABC}=(2+2+11)\cdot 16\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=120\sqrt{3}$.

Чистовик. ②

① (продолжение)

~~10) Пусть AB = 2y~~

10) $\angle BAE = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$.

$\angle BAE = 90 - 60$

$\angle BAE = 30^\circ$

11) Пусть $AB = 2y \Rightarrow BE = y$ $(\angle BAE = 30^\circ)$

12) $AB^2 = BE^2 + AE^2$; $4y^2 = y^2 + (2+2+11)^2$

$3y^2 = 15^2$

$3y^2 = 225$

$y^2 = 75$.

$y = 5\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2y = 10\sqrt{3}$.

13) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - (AB \cdot BC) \cdot \cos\alpha$ (Теор. cos)

$AC^2 = (10\sqrt{3})^2 + (16\sqrt{3})^2 - (10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2}$.

$AC^2 = 300 + 768 - 240$

$AC^2 = 828$

$AC = 6\sqrt{23}$.

14) $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$.

$120\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{23}}{4R}$.

$120\sqrt{3} = \frac{480 \cdot 6\sqrt{23}}{4R}$.

$\sqrt{3} = \frac{6\sqrt{23}}{R}$.

$R = \cancel{6\sqrt{\frac{23}{3}}}\ 6\sqrt{\frac{23}{3}}$.

Ответ: $\alpha = 60^\circ$

$S_{\triangle ABC} = 120\sqrt{3}$.

$R = 6\sqrt{\frac{23}{3}}$

211007384 (U289692 M1274388)

Чистовик (3)

№2. x - минимальное число

y - максимальное число

z - сумма ~~осталь~~ чисел ~~не x~~ не включая x и y.

Составим уравнения:

$$\begin{cases} 30x + z + y = 450 \\ x + z + 14y = 450 \end{cases}$$

$30x + z + y = x + z + 14y.$

$29x = 13y.$

$y = \frac{29}{13}x.$

~~...~~ 13 - простое $29 \not\vdots\, 13 \Rightarrow x \vdots 13$ (y - натуральное)

$30x < 450.$ (если больше, то сумма чисел больше 450)

~~...~~ если $x \geq 26.$

$30x \geq 30 \cdot 26 = 780 > 450.$ т.е. сумма больше $450 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 26.$

если $x = 0.$

$$\begin{cases} z + y = 450 \\ z + 14y = 450 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z \in \varnothing \\ y \in \varnothing \end{matrix}$$

$x \neq 0.$

при $x = 13$ ~~...~~ $30 \cdot 13 = 390 < 450.$

$\Rightarrow x = 13.$

подставляем:

$$\begin{cases} 390 + z + y = 450 \\ 13 + z + 14y = 450 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z + y = 60 \\ z + 14y = 437. \end{cases}$$

Чистовик ④

№2. (продолжение).

$13y + 60 = 437$

$13y = 377$

$y = 29$

$z + 29 = 60$

$z = 31$

т.к. x – наименьшее, то все числа в сумме z ~~тоть~~ больше или равно 14.

если сумма z состоит из 3 чисел или больше, то минимальное

$z = 14 + 15 + 16 = 45 > 31 \Rightarrow$ сумма z состоит из 2-ух чисел (если из одного то максимальное $z = 28$ т.к. y – максимальное)

Тогда подходят только 2 пары.

(14 и 17) и (15 и 16)

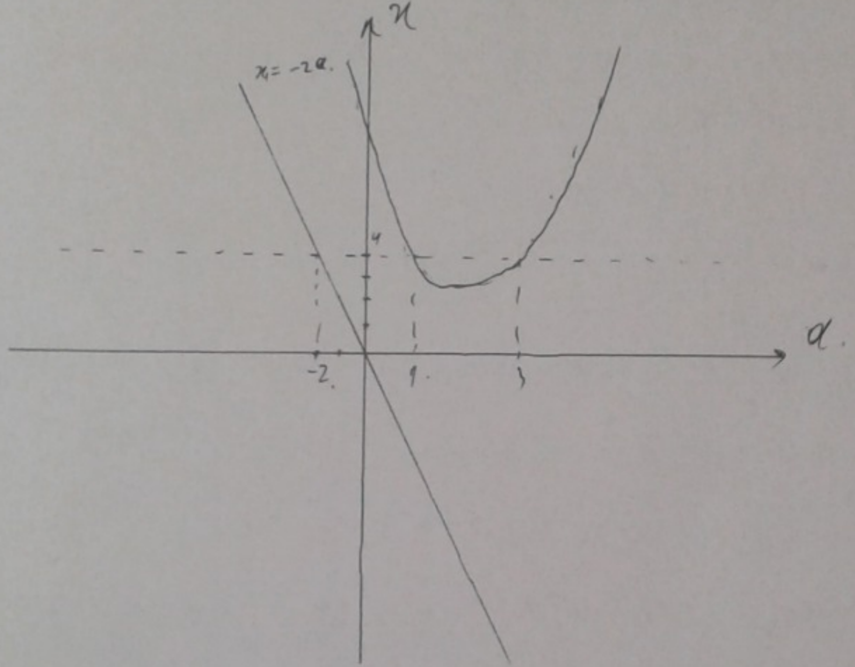
Ответ: 13; 14; 17; 29.

13; 15; 16; 29.

Чистовик (6)

№ 3 (продолжение)

Начертим графики x от a.



~~при $a < -2$~~
~~$x > 4$~~

Для прямой $x = -2a$.

$\begin{cases} \text{при } a < -2 \\ x > 4 \end{cases}$

и

$\begin{cases} a > -2 \\ x < 4. \end{cases}$

Ответ: при
$a \in (-2; 1) \cup (3; +\infty)$

Найдём пересечения графика $a + \frac{3}{a} = x$. с $x = 4$.

$a + \frac{3}{a} = 4$.

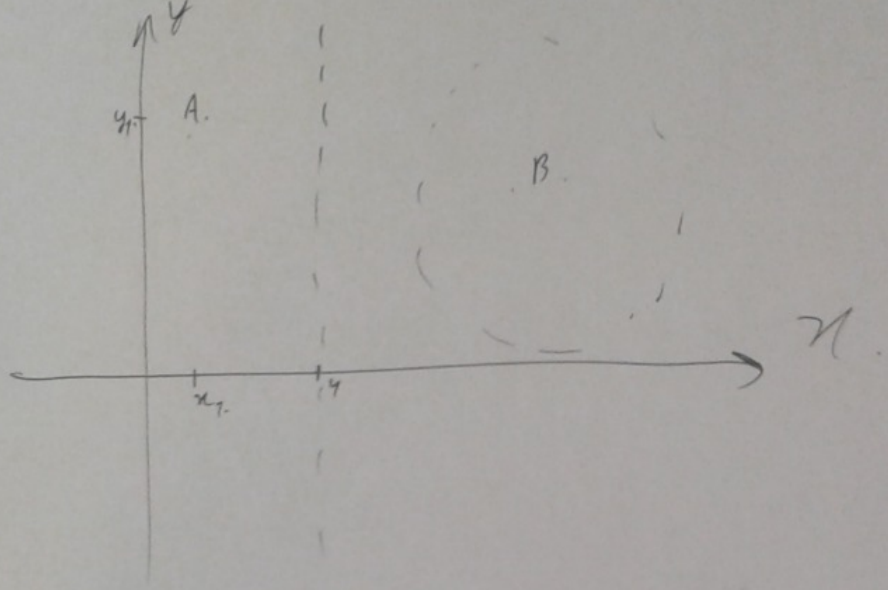
$a^2 - 4a + 3 = 0$.

$(a-1)(a-3) = 0$.

т.е. в точках $(1;4)$ и $(3;4)$

$\begin{cases} \text{если } a > 3. \\ x > 4. \end{cases}$
и
$\begin{cases} 1 < a < 3 \\ x < 4. \end{cases}$ и $\begin{cases} a < 1 \\ x > 4. \end{cases}$

Черновик:



$2a^2 + 2ax_1 + x_1^2 - 2x_1y_1 + 2y_1^2 = 0.$ (A)

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$ (окр

$a^2 + 2ax_1 + x_1^2 + x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + y_1^2 - x_1^2 + a_1^2 = 0$

$(a + x_1)^2 + (y_1 - x_1)^2 + (y_1 - x_1)(y_1 + x_1) + a_1^2 = 0.$

$(a + x_1)^2 + a_1^2 + (y_1 - x_1) \cdot 2y_1 = 0.$

$\cancel{a^4x^2 - 2a^3x + a^2(x^2 + y^2 - y) - 6ax + 9 = 0}$

$\cancel{(x - a^2)^2}$

$a^2x^2 - 2x(a^3 + 3a) + (a^4 + 6a^2 + 9) + a^2y^2 - 2a^2y + a^2 = 3a^2$

$(ax - a^2 - 3)^2 + (ay - a)^2 = 7a^2.$

$x - a - \frac{3}{a}$

$a + \frac{3}{a} = x_B$

$\cancel{2(a)^2 + 2a x_1 + (x_1 - y_1)^2 + y_1^2} = 0$

$2a^2 + 2a x_1 + x_1^2 - 2x_1 y_1 + 2y_1^2 = 0$

$x_1^2 + 2x_1(a - y_1) + \cancel{2(a^2 + y_1^2)} = 0$

$+ a^2 + 2ay + y^2 + a^2 - 2ay + y^2 = 0$

$x_1^2 + 2x_1(a - y_1) + (a + y_1)^2 + (a - y_1)^2 = 0$

$(x_1 + a - y_1)^2 + (a + y_1)^2 = 0$

$\begin{cases} x_1 + a - y_1 = 0 \\ a + y_1 = 0 \end{cases}$

$x_1 + 2a = 0$

$x_1 = -2a$ – координаты x.

211007384 (U289692 M1274388)

Черновик.

2. $\overset{1\,м.}{x}$ z $\overset{1\,д.}{y}$.

$30x + z + y = 450$
$x + z + 14y = 450$.
$30x + z + y = x + z + 14y$.
$29x - 13y = 0$.
$29x = 13y$.
$y = \frac{29}{13}x$.

$z + \frac{14 \cdot 29x + 13x}{13} = 450$.

$z + \frac{419}{13}x = 450$.

$z = 450 - \frac{419}{13}x$

$x \vdots 13$.

$30\underset{13}{x} < 450$

~~390 m~~.

$x = 13$.

$\begin{array}{r} \overset{3}{29} \\ \cdot\,14 \\ \hline 116 \\ 29 \\ \hline 406 \\ +\;13 \\ \hline 419 \end{array}$

$z = 31$.

14 17
15 16

$390 + z + y = 450$.
$13 + z + 14y = 450$

$z + y = 60$.
$z + 14y = 437$.
$60 + 13y = 437$.
$13y = 377$.

$377 \mid 13$
$26 \quad 29$
117

$y = 29$.

если $x = 26$ или больше.
$30 \cdot 26 = 780 < 450$ не верно
$\Rightarrow 30x > 450$

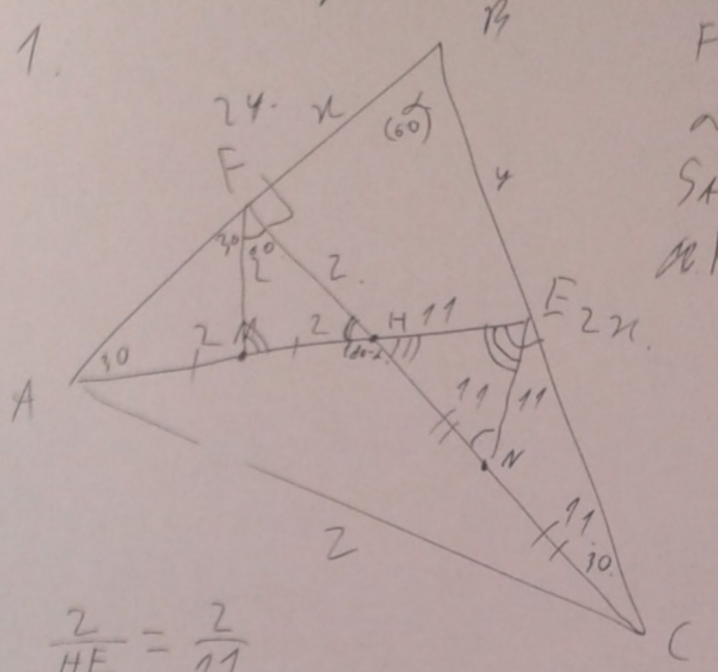
$\Rightarrow x < 26$.

если $x = 0$.

$\begin{cases} z + y = 450 \\ z + 14y = 450 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z \in \emptyset \\ y \in \emptyset \end{array}$

Черновик

1.



$FM \parallel EN$.

$\angle = ?$

S_{ABC}.

$R = ?$

$\frac{2}{HE} = \frac{2}{11}$

$HE = 11$

$z^2 = 300 + 768 - 480 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$4x^2 = x^2 + 24^2$

$1068 - 240$.

$3x^2 = 24^2$

$828 \mid 2^2$

$207 \mid 3^2$

$x^2 = 24 \cdot 8$.

$x = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$.

$z = 6\sqrt{23}$.

$S_{ABC} = AE \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \cancel{15\sqrt{2}}\ 120\sqrt{3}$

$120\sqrt{3} = \frac{24 \cdot 2x \cdot z}{4R}$.

$3y^2 = 225$.

$y^2 = 75$

$y = 5\sqrt{3}$.

$2y = 10\sqrt{3}$.

$2x = 16\sqrt{3}$

Чистовик (5)

№3

$a^2x^2+a^2y^2-\underline{2a^3x-6ax}-2a^2y+a^4+9=0$ (окр.)

$a^2x^2-2ax(a^2+3x)+(a^4+6a^2+9)+a^2y^2-2a^2y+a^2=7a^2$

$a^2x^2-2ax(a^2+3x)+(a^2+3)^2+(ay-a)^2=7a^2.$

$(ax-a^2-3)^2+(ay-a)^2=7a^2.$

$a^2(x-a-\frac{3}{a})^2+a^2(y-1)^2=7a^2.$

$a+\frac{3}{a}$ – это координата x точки B.

$2a^2+2ax_1+x_1^2-2x_1y_1+2y_1^2=0.$ (A)

$x_1^2+2x_1(a-y_1)+2a^2+2y_1^2=0.$

$x_1^2+2x_1(a-y_1)+a^2+2ay_1+y_1^2+a^2-2ay_1+y_1^2=0.$

$x_1^2+2x_1(a-y_1)+(a-y_1)^2+(a+y_1)^2=0.$

$(x_1+a-y_1)^2+(a+y_1)^2=0.$

$\begin{cases} x_1+a-y_1=0 \\ a+y_1=0. \end{cases}$

$x_1+2a=0$

$x_1=-2a$ – это координата x точки A.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007384**

ID профиля: **289692**

Вариант 14

Чинтек 1

№4)
$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ x^4+2x^2y^2+y^4-3x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37 \end{cases}$$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \quad (2) \\ a^2-3b=37 \quad (1) \end{cases}$$

(1) − (2):

$a^2-3b-7a+3b=37-7$

$a^2-7a=30$

$a^2-7a-30=0$

$D=49+120=169=13^2$

$a_1=\frac{7+13}{2}=10$

$a_2=\frac{7-13}{2}=-3$

$a_1^2-3b_1=37$

$100-3b_1=37$

$3b_1=63$

$b_1=21$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=10-y^2 \\ x^2y^2=21 \end{cases}$$

или:

$x^2+y^2=a_2$

$x^2+y^2=-3$

$x\in\varnothing;\ y\in\varnothing$

Чистовик №2.

№4 (продолжение)

$(10-y^2)y^2=21$

$-y^4+10y^2=21$

$y^4-10y^2+21=0$

$D=100-84=16=4^2$

$y_1^2=\frac{10+4}{2}=7$

$y_2^2=\frac{10-4}{2}=3$

$y_1=\pm\sqrt{7}$

$y_2=\pm\sqrt{3}$

$x_1^2=3$

$x_2^2=7$

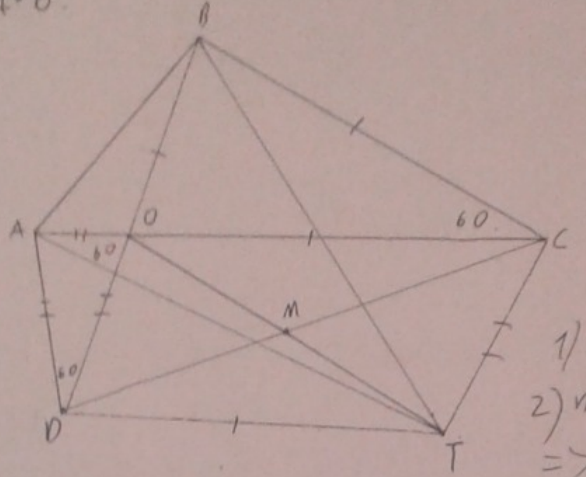
$x_1=\pm\sqrt{3}$

$x_2=\pm\sqrt{7}$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$, $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$.

Чистовик ③

№6



Дано:

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – прав.

$OM = MT$

$DM = MC$.

Найти: Док-ть

ABT – прав

Решение:

1) Проведём TC и TD

2) т.к. $OM = MT$ и $DM = MC \Rightarrow$

$\Rightarrow DOCT$ – параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow OC = DT$ и $DO = TC$

3) Т.К $OC \parallel DT \Rightarrow \angle ODT = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADT = 120^\circ$

4) Т.К. $DO \parallel TC \Rightarrow$ ~~AOD~~ $\angle ACT = 60^\circ \Rightarrow \angle BCT = 120^\circ$

5) $\angle AOB = 120^\circ$ (внешний

6) $\triangle AOB = \triangle ADT = \triangle BCT$ (по 2-ум сторонам и углу)

$\Rightarrow AB = BT = DT. \Rightarrow \triangle ABT$ – прав

Дано:

$BC = 3$

$AD = 4$.

Найти:

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = ?$

Решение:

1) $DB = 4 + 3 = 7$.

2) $AC = 4 + 3 = 7$.

3) $S_{ABCD} = AC \cdot DB \cdot \sin(\angle AOD) = 7 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{2}$.

4) $BT^2 = BC^2 + TC^2 - BC \cdot TC \cdot \cos(\angle BCT)$

$BT^2 = 16 + 9 - 3 \cdot 4 \cdot \cos(120)$

$BT^2 = 25 + 12 \cos(60)$. = ~~…~~ ~~…~~ $25 + 6 = 31$.

Чистовик 4

№6 (продолжение)

5) $S_{\triangle ABT} = BT \cdot AT \cdot \sin(\angle BTA) = BT^2 \cdot \sin 60 =$

$= 31 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{31\sqrt{3}}{2}.$

6) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{31\sqrt{3}}{2}}{\frac{49\sqrt{3}}{2}} = \frac{31}{49}.$

Ответ: $\frac{31}{49}.$

Чистовик 4 5

№5. Т.к. все карты разные $\Rightarrow$ всего 15 дублей $\left(\frac{1}{1}; \frac{2}{2}; \frac{3}{3}; \dots \frac{15}{15}\right)$

~~Оба Вар~~ Кол-во ~~вар~~ вариантов взять 2 любые карты $\frac{225\cdot 224}{2} = 25200$.

Кол-во вариантов взять 2 не дубля:

$\frac{210\cdot 209}{2} = 21945$.

Кол-во вариантов взять дубль и любую карту:

$25200 - 21945 = 3255$.

Кол-во вариантов взять дубль и карту, где есть число в дубле.

$15\cdot 28 = 420$.

$\left(\frac{15}{1}\ \frac{15}{2} \dots \frac{15}{14}\right) + \left(\frac{1}{15}\ \frac{2}{15} \dots \frac{14}{15}\right)$

Кол-во вариантов взять дубль и карту где нет числа в дубле.

$3255 - 420 = 2835$.

Ответ: 2835.

Черновик.

~~221~~ ~~224~~ 225.

$\frac{15}{15}$

$\frac{14}{14}$

3255 - 420

135

15 · 28 = 420

140 · 28 = 420

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

15 · 224 = 3360

3360 - 3255 = 105

$\frac{15}{15}$ $\frac{15}{14}$ $\frac{14}{15}$

$\underbrace{1\,2\,3\,4 \ldots 14}$ · 15

15 · 224

224

15 : 224

15 · 28

$\frac{225 \cdot 224}{2}$

15

$\frac{210 \cdot 209}{2}$

15 · 217

105 · 210 = 21050

225 · 112 = 25200

209 · 105 = 21945

25200 - 21945 = 3255

3255 : 15 = 217

3705 : 15 = 247

25650 - 21945 = 3705

22050

225 · 112 = 25200

247 - 28 = 219

Черновик.

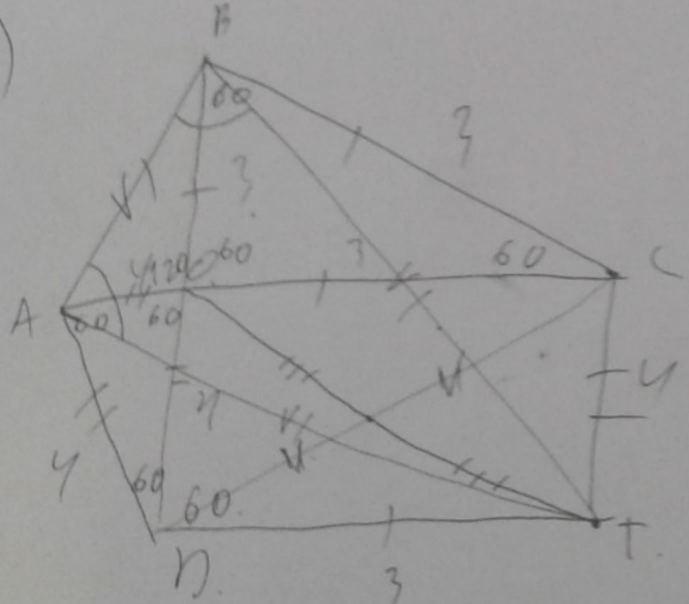
1) $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$

$\begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ x^4+2x^2y^2+y^4-3x^2y^2=37 \end{cases}$

$\begin{cases} \\ \end{cases}$

5) 225.

6)



211007384 (U289692 M1274389)