Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

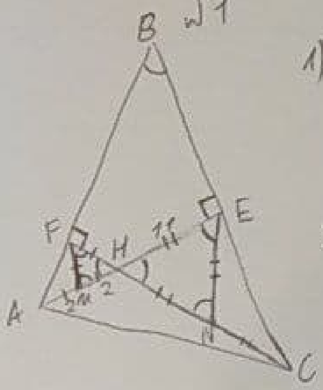
Шифр: **211007311**

ID профиля: **169185**

Вариант 14

Чистовик

№1



1) $BEHF$: $\angle CFB = \angle AEB = 90° \Rightarrow \angle FHE = 180° - \angle ABC$;

$\angle FHA$ и $\angle FHE$ − смежные $\Rightarrow \angle FHA = \angle ABC$

~~$\angle FHA$ и~~ аналогично $\angle EHC = \angle ABC$

2) $\triangle AFH$ − прямоуг; $FM = 2$ − медиана $\Rightarrow FM = MH = AM \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle MFH$ − р/б $\Rightarrow \angle MFH = \angle FHM = \angle ABC$

аналогично $\angle HEN = \angle ABC$

3) $FM \parallel EN \Rightarrow \angle HEN = \angle FMH \Rightarrow$ в $\triangle FHM$ все углы равны $\Rightarrow \triangle FHM$ − р/с и каждый угол равен $60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\angle ABC = 60°}$

4) $\left.\begin{matrix}\angle FAE = \angle AFH = 90° - 60° = 30° \\ \angle AEB = 90°\end{matrix}\right\} BE = \dfrac{AE}{\sqrt{3}} = \dfrac{2+2+11}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

5) $\left.\begin{matrix}\angle EHC = 60° \\ \angle HEC = 90°\end{matrix}\right\} EC = HE \cdot \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

$BC = 16\sqrt{3}$

6) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AE \cdot BC}{2} = \dfrac{15 \cdot 16\sqrt{3}}{2} = 120\sqrt{3}$

7) $\triangle AHC$: $AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2\cos\angle AHC \, AH \cdot HC = 4^2 + 22^2 + 44 =$

$= 4(4 + 121 + 11) = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 34 \Rightarrow AC = 4\sqrt{34}$

8) $2R = \cancel{4\sqrt{34}} \; \dfrac{AC}{\sin 60°} \Leftrightarrow R = \dfrac{4\sqrt{34}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2} = \dfrac{4}{3}\sqrt{102}$

Ответ: $\angle ABC = 60°$; $S_{ABC} = 120\sqrt{3}$; $R = \dfrac{4}{3}\sqrt{102}$.

Чистовик

№2

Пусть сумма выписанных чисел равна A; меньшее число равно a и большее число равно z.

Тогда: $\begin{cases} A + 29a = 450 \\ A + 13z = 450 \end{cases} \Rightarrow 29a = 13z \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 13 \\ z \vdots 29 \end{cases}$

a, z – натур.

$a \le \frac{450}{30} = 15$

$z < \frac{450}{14} = 32\frac{1}{7}$

$\Rightarrow a = 13; z = 29$

Тогда $A - a - z = 450 - 13 \cdot 29 - 13 - 29 = 450 - 390 - 29 = 31$

На доске написаны $13; \underbrace{\ldots}_{x \text{ чисел}}; 29$, сумма x чисел $= 31$.

При $x = 1$: Написано 31, но $31 > 29$, чего быть не может

При $x = 2$: Либо 14 и 17, либо 15 и 16. При любом другом первом числе второе будет < 13, чего быть не может.

При $x = 3$: минимальная сумма x чисел $= 14 + 15 + 16 = 45 > 31$, чего быть не может. Тогда x может быть равен только 2, и возможные ряды чисел: $\{13, 14; 17; 29\}$ и $\{13; 15; 16; 29\}$.

Ответ: $\{13; 14; 17; 29\}$; $\{13, 15; 16; 29\}$.

211007311 (U169185 M1274174)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007311**

ID профиля: **169185**

Вариант 14

Чистовик

№ 4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases} ;\quad x^2+y^2=a;\ x^2y^2=b$$

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-7)=30 \\ 7a-3b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=10 \\ b=21 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3 \\ b=-9\frac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=21 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=-3 \\ x^2y^2=-9\frac{1}{3} \text{ - не мож. быть} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=7 \\ y^2=3 \end{cases} \\ \cancel{\begin{cases} x^2=\frac{-3\pm\sqrt{46\frac{1}{3}}}{2} \\ y^2=\frac{-3-\sqrt{46\frac{1}{3}}}{2} < 0 \text{ - не мож. быть} \end{cases}} \\ \cancel{\begin{cases} x^2=\frac{-3-\sqrt{46\frac{1}{3}}}{2} < 0 \text{ - не мож. быть} \\ y^2=\frac{-3+\sqrt{46\frac{1}{3}}}{2} \end{cases}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\sqrt{7} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{7}); (\pm\sqrt{7}; \pm\sqrt{3})$

Чистовик

№ 5

$$\begin{array}{r} 189 \\ \times\ 15 \\ \hline 945 \\ +\ 189 \\ \hline 2835 \end{array}$$

Всего $15^2 = 225$ карточек, из них 15 - дубли. Из оставшихся 210 $(14\cdot1)+(1\cdot14)=28$ карточек с каким-то x $(1\le x\le 15)$.

Тогда способов вытащить дубль и недубль:

$15\cdot(210-28) = 15\cdot 182$

Способов вытащить 2 дубля:

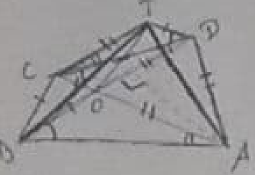
$\frac{15\cdot 14}{2} = 15\cdot 7$

$15\cdot 189 = 2835$ вариантов

Ответ. 2835 способов.

Чистовик

№7



а) $\angle BOC = 60°$ – внешний при $\triangle OCD \Rightarrow \angle OCD + \angle ODC = 60°$;

~~Тогда т.к. O симм T отн. середины CD, то~~;

~~$CT = OD$, $TD = OA$~~ O симм $T \Rightarrow TD = CO$; $CT = OD$

Тогда в $\triangle BCT$; $\triangle TDA$ и $\triangle BOA$:

1) $BC = TD = BO$

2) $CT = DA = OA$

3) $\angle BCT = 60° + 60° = 120° = \angle TDA = \angle BOA$

$\left.\right\} \Rightarrow \triangle BCT = \triangle TDA = \triangle BOA$.

Тогда $BT = TA = BA \Rightarrow ABT$ – правильный треугольник $\blacksquare$

б) $BA^2 = BO^2 + OA^2 - 2\cos 120° \cdot BO \cdot OA = 9 + 16 + 12 = 37$;

$BA = \sqrt{37} \Rightarrow S_{ABT} = \dfrac{\sqrt{37}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9{,}25\sqrt{3}$

~~S_{AB}~~ $S_{\triangle BOA} = \dfrac{3 \cdot \frac{4}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} = S_{\triangle COD}$, т.к.

$\triangle BOA = \triangle COD$ по двум сторонам и углу между ними.

$S_{\triangle COB} = \dfrac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2{,}25\sqrt{3}$

$S_{\triangle AOD} = \dfrac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COB} + S_{\triangle BOA} + S_{\triangle COD} =$

$= 3\sqrt{3} \cdot 2 + 4\sqrt{3} + 2{,}25\sqrt{3} = 12{,}25\sqrt{3}$

$\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{9{,}25\sqrt{3}}{12{,}25\sqrt{3}} = \dfrac{37}{49}$

Ответ: б) $\dfrac{37}{49}$.