

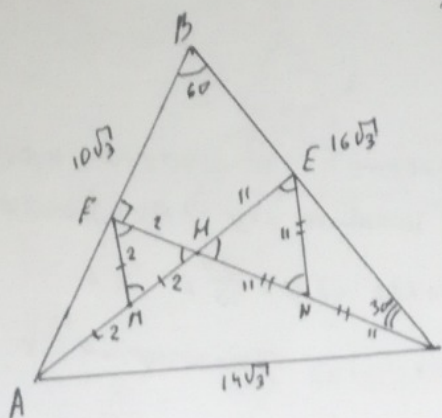
# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211007281**

ID профиля: **306333**

Вариант 14



№1. Дано  $\triangle ABC$ ;  $AE \perp BC$ ;  $CF \perp AB$ ;  $CF \perp AE = H$

$M$  - середина  $AH$ ;  $N$  - середина  $HC$ .

$EN \parallel FM$ ;  $EN = 11$ ;  $FM = 2$ .

Найти  $\angle ABC$ ;  $S_{ABC}$ ;  $R$  - радиус окружности около  $ABC$ .

Решение:

①  $M$  к  $CF$  высота  $\Rightarrow \angle MFA = 90^\circ \Rightarrow \triangle AFH$  кр/уг  
 $FM$  - медиана  $\triangle AFH$ , проведенная к гипотенузе  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow AM = MH = FM = 2$ .

② Аналогично в  $\triangle HEC$  (кр. к  $AE \perp$ )  $HN = NC = EN = 11$

③ Рассмотрим  $\triangle FHM$ :  $MH = MF \Rightarrow \triangle FHM$  р/б  $\Rightarrow \angle MFH = \angle FHM$ .  
 $\angle FHM = \angle EHN$  как вертикальные; в прямоугольнике  $ENH$ :  $EN = NH \Rightarrow \triangle ENH$  р/б  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle NHE = \angle HEN$

$\angle ENF$  и угол  $MFH$  н.л. при  $EN \parallel FM$  и сек  $FN \Rightarrow \angle MFH = \angle HNE$   
 $\angle FMH$  и  $\angle HEN$  н.л. при  $EN \parallel FM$  и сек  $ME \Rightarrow \angle FMH = \angle HEN$ .

в  $\triangle FHM$  все углы равны  $\Rightarrow$  он р/ст  $\Rightarrow FH = 2$

в  $\triangle ENH$  все углы равны  $\Rightarrow$  углы по  $60^\circ$  в  $\triangle ENH$  р/ст  $\Rightarrow HE = 11$

④  $\angle HNE$  внешний для  $\triangle ENC \Rightarrow \angle ENH = \angle NEC + \angle NCE$   
 в  $\triangle ENC$ :  $EN = NC \Rightarrow$  р/б  $\Rightarrow \angle NEC = \angle ECN$

⑤ в  $\triangle CFB$   $\angle CFB = 90^\circ$  (кр. к высоте)  
 $\angle BCF = 30^\circ$  }  $\Rightarrow$  по теор. о сумме углов в  $\Rightarrow \angle FBC = 180 - 90 - 30 = 60^\circ$   
 $\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

⑥  $BC = FC \cdot \sin \angle FBC = (11+11+2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

$BC = FC : \sin \angle FBC = (11+11+2) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3}$

$S_{ABC} = AE \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = (2+2+11) \cdot 16\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 15 \cdot 8\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$

$BA = EA : \sin \angle ABC = 15 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$

из  $\triangle CHE$ :  $EC = HC \cdot \cos \angle HCE = 22 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 11\sqrt{3}$

$\triangle AEC$  - прямоугол  $\Rightarrow$  по теореме Пифагора  $AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{225 + 363} = 14\sqrt{3}$

⑦  $R = \frac{abc}{4S} = \frac{14\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}}{4 \cdot 120\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 14 \cdot 3}{12} = 14$

Ответ  $\angle ABC = 60^\circ$ ;  $S_{ABC} = 120\sqrt{3}$ ;  $R_{ок} = 14$ .

1

Пусть самое маленькое число -  $x$   
самое большое число -  $y$   
сумма всех чисел -  $S$

- ① ~~меньше~~ <sup>меньше</sup> число увеличим в 30 раз  $\Rightarrow$  к  $S$  добавим  $29x \Rightarrow 29x + S = 450$   
② большее число увеличим в 14 раз  $\Rightarrow$  к  $S$  добавим  $13y \Rightarrow 13y + S = 450$   
③ из 1 и 2  $\Rightarrow 29x + S = 13y + S \Rightarrow 29x = 13y \Rightarrow y = \frac{29}{13}x$  т.к

числа натуральные  $\Rightarrow 29x : 13 \Rightarrow x : 13$  (т.к  $29 \nmid 13$ )  $\Rightarrow$  рассмотрим  $x$

④  ~~$x > 0$  не под~~  $x > 0$  по условию

$x = 13$  - первое число  $: 13 \Rightarrow y = \frac{29}{13} \cdot 13 = 29 \Rightarrow 13 \cdot 30 + 29 + S'$ , где  $S'$  сумма всех кроме наиб и наим.  $\Rightarrow 390 + 29 + S' = 450 \Rightarrow S' = 450 - 419 = 31$

мы знаем что в последовательности наим число  $x$  а наиб  $y \Rightarrow$  все остальные числа  $> 13$  и  $< 29$

пусть кроме наших чисел есть еще одно (а оно есть т.к  $S' > 0$ )

наиб из возможных это 28  $\Rightarrow$   ~~$S'$~~   <sup>$S'$</sup>  не подходит т.к не доходит до  $S'$   
Пусть ~~наших~~ чисел кроме  $x$  и  $y$  3, тогда наименьшие

14 15 16 (не повторяются)  $15 + 14 + 16 = 45$   $45 > S' \Rightarrow$  3 числа кроме  $x$  и  $y$  не может быть т.к их сумма  $> S' \Rightarrow$  то чисел кроме  $x$  и  $y$  - 2  $\Rightarrow$

$\Rightarrow a > b$  (мы можем так сделать т.к числа не равны  $\Rightarrow$  1 больше другого)

пусть  $b = 14 \Rightarrow a = S' - b = 31 - 14 = 17 \Rightarrow$  послед: 13 14 17 29

пусть  $b = 15 \Rightarrow a = S' - b = 31 - 15 = 16 \Rightarrow$  послед: 13 15 16 29

пусть  $b = 16 \Rightarrow a = S' - b = 31 - 16 = 15 \Rightarrow$  противореч т.к  $a > b$

если  $b > 15 \Rightarrow a < b \Rightarrow$  только 2 случая: 13; 14; 17; 29

13; 15; 16; 29

$> 3$  чисел кроме  $x$  и  $y$  може не подходит т.к их сумма будет еще больше т.к минимальная

$$13 + 15 + 16 + (\dots) = 45 + (\dots)$$

$$45 > 31$$

⑤  $x > 13 \Rightarrow$  наибольшее  $x = 26 \Rightarrow y = 26 \cdot \frac{29}{13} = 58$

$26 \cdot 30 + 29 + S' = 450$ , где  $S'$  - сумма всех кроме  $x$  и  $y$

$809 + S' = 450 \Rightarrow S' < 0$  противореч

если  $x > 13$ , то мы не получим последовательность т.к  $450 - 30x - \frac{29}{13}x$  будет

$< 0$  и будет равняться  $S'$ , но  $S' > 0$  т.к сумма натуральных чисел

Ответ 13; 17; 14; 29  
13; 15; 16; 29

②

$$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0.$$

$$x^2 - 2x(y-a) + 2a^2 + 2y^2 = 0 \quad | \pm(y-a) |.$$

$$(x^2 - 2x(y-a) + (y-a)^2) + 2a^2 + 2y^2 - y^2 + 2ay - a^2 = 0.$$

$$\begin{matrix} x+y-a \\ (x-y+a)^2 + (a+y)^2 = 0. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a+y=0 \\ x-y+a=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-y \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{x}{2} \Rightarrow x = -2a.$$

$$a^2 x^2 + a^2 y^2 - 2a^3 x - 6ax - 2a^2 y + a^4 + 9 = 0$$

$$(ax)^2 - 2ax(a^2+3) + (a^4 + 6a^2 + 9) - 6a^2 + a^2 y^2 - 2a^2 y = 0.$$

$$(ax - a^4 + 6a^2 + 9)^2 + (a^2 y^2 - 2a^2 y + a^2) = 6a^2 + a^2.$$

$$(ax - a^4 + 6a^2 + 9)^2 + (ay - a)^2 = 7a^2.$$

$ax - a^4 + 6a^2 + 9$  - позиция центра по  $x$

$$-2a^2 - a^4 + 6a^2 + 9 = -a^4 + 4a^2 - 4 + 13 = -(a^2 - 2)^2 + 13$$

$$\textcircled{1} -(a^2 - 2)^2 + 13 > 4 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x - 2a \Rightarrow a > 2.$$

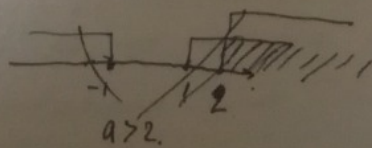
$$-(a^2 - 2)^2 > -9$$

$$(a^2 - 2)^2 > 0$$

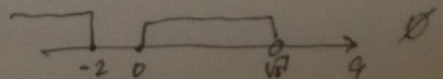
$$\begin{cases} a^2 - 2 > 3 \\ a^2 - 2 < -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 < -1 \\ a^2 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < -1 \\ a > 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{2} & -(a^2 - 2)^2 + 13 < 4 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow a < 2. \\ & -(a^2 - 2)^2 < -9 \\ & -3 < a^2 - 2 < 3 \\ & -1 < a^2 < 5. \\ & 0 \leq a < \sqrt{5} \end{aligned}$$



Объем  $(-2; 1) \cap (1; +\infty) \cap (0; \sqrt{5}) = (-2; -1) \cap (1; +\infty) \cap (0; \sqrt{5})$

**(3)**

Черновик

~~Черновик~~

Вариант 14.

13.

$$2a(x-a) - (x-y)^2 + y^2$$

$$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$$

$$2a(a+x) = (x-y)^2 - y^2$$

$$x < 4$$

$$x^2 - 2x(y-a) + (y-a)^2 = -y^2$$

$$y^2 - 2ay + a^2$$

$$(x+y+a)^2 + a^2 + y^2 - 2ay$$

$$(\cancel{x+y+a})^2$$

$$(x-y+a)^2 + (a-y)^2 = 0$$

$$(x-y+a)^2 + (y-a)^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$y = a$$

$$x = -2(y-a)$$

$$x = 0$$

$$a^4 - 2a^3 + a^4 - a = 0$$

$$2a^4 + 2a^3 - a = 0$$

$$2a(a^2)$$

①

③

Пусть 1 число  $x$  последнее число  $y$ , а сумма всех =  $S$

Черновик

Черновик

$$S + 29x = S + 13y$$

$$29x = 13y$$

~~x~~

$$y = \frac{29}{13}x$$

$$x:13$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 13 \\ \hline 87 \\ 29 \\ \hline 377 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 30 \\ \hline 780 \end{array}$$

$$13 \Rightarrow y = 29$$

$$\begin{array}{r} 450 \\ - 377 \\ \hline 73 \end{array}$$

$$450 - 377 = \cdot$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ - 28 \\ \hline \end{array}$$

$$56 + 17 = 73$$

13

28 29

$$14 + 15 = 29$$

13 14

$$29 + 16 = 45$$

$$45 + 17 = 55 + 7 = 62$$

$$14 + 15 + 16 + 28$$

$$14 \ 16 \ 17 \ 26$$

$$14 + 15 + 17 + 27$$

$$14 \ 16 \ 18 \ 25$$

$$14 \ 15 \ 18 \ 26$$

$$19 \ 24$$

$$19 \ 25$$

$$20 \ 23$$

$$20 \ 24$$

$$14 \ 17 \ 18 \ 24$$

$$21 \ 23$$

$$19 \ 23$$

$$22 \ 22 \ x$$

$$20 \ 22$$

$$x > 0 \Rightarrow a = 0$$

~~x-2~~

$$(x-y)^2 + y^2 = 0$$

$$x = y = 0$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9$$

$$14 \ 18 \ 19 \ 22$$

$$14 \ 18 \ 20 \ 21$$

$$a^2x^2 - 2a^3x - 6ax$$

$$14 \ 19 \ 20 \ 20 \ x$$

$$15 \ 16 \ 17 \ 25$$

$$\frac{32}{9} - \frac{8}{3}x + y^2$$

$$(ax)^2 - 2ax(a^2+3) + a^4 + 6a^2 + 9 - 6a^2 + a^2y^2 - 2a^2y$$

$$15 \ 16 \ 18 \ 24$$

$$19$$

$$(ax - a^4 + 6a^2 + 9)^2 + (a^2y^2 - 2a^2y + a^4) = 6a^2 + a^2$$

$$ay - a$$

$$(4a - a) < 4$$

$$(ax - a^4 + 6a^2 + 9)^2 + (ay - a)^2 = 7a^2$$

$$(y-1)a$$

$$3a < 4$$

$$a < \frac{4}{3}$$

~~x~~

$$a^2(y-1)^2$$

$$y > 4$$

(2)



# Часть 2

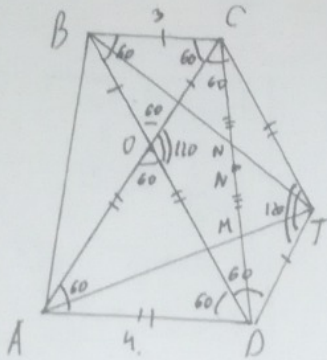
Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007281**

ID профиля: **306333**

Вариант 14





Дано. ABCD.

AC ⊥ BD = O.

Δ BOC - прав

Δ AOD - прав

T симметрична точке O относительно BD.

Решение.

① т.к. T симметрична к O относительно BD, то

$CO = DT$ ;  $OP = CT$ ;  $CT \parallel OP$ ;  $TP \parallel CO$  (N середина;  $NT = NO$ ;  $CN = NP$ ;  $\angle ONP = \angle ONT \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta OND = \Delta ONT \Rightarrow \angle DCT = \angle CPO$  (н.д.)  $\Rightarrow CT \parallel OP$  и  $CT = OP \Rightarrow COPT$  - параллелограмм

$\Rightarrow CP = OP$ ;  $TP = CO$ ;  $\angle COP = \angle CTP$ .

$\angle COP = 180 - 60 = 120$  т.к. он смежен с  $\angle BOC = \angle CTP$

$\angle OCT = 180 - 120 = 60$  т.к. параллелограмм  $\Rightarrow \angle BCT = 60 + 60 = 120 = \angle ADT$ .

$\angle ADT = \angle BCT$

$CT = AD$

$BC = DT$

$\Rightarrow \Delta ADT = \Delta BCT \Rightarrow BT = TA$ .

$\angle BOA = \angle COP$  как верт.

$BO = OC$

$OP = OA$

$\Rightarrow \Delta BOA = \Delta COP \Rightarrow BA = CO$

$\Rightarrow BA = AT = TB \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABT$  - равносторонний

$CT = AD$

TD - общ.

$\angle CTD = 120 = 60 + 60 = \angle ADT$

$\Rightarrow \Delta CTD = \Delta TDA \Rightarrow CD = AT$

$\Rightarrow BA = AT$

② высота  $\Delta OBC = CO \cdot \sin 60 = BC \cdot \sin 60 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\Delta OBC} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 : 2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

высота  $\Delta OAD = OP \cdot \sin 60 = AD \cdot \sin 60 = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta OAD} = 2\sqrt{3} \cdot 4 : 2 = 4\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{4}$

$\angle BCA$  и  $\angle CAD$  и т.д. при BC и AD и сек CA

$\angle BCA = \angle CAD$  и т.д.

$\Rightarrow BC \parallel AD = BCDA$  трапеция  $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BCDA} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$

$h = h_{OBC} + h_{OAD}$

$\Rightarrow \frac{(3+4) \cdot 4\sqrt{3}}{4} = \frac{40\sqrt{3}}{4}$

①

Продолжение на стр. 2.

в продолжение.

$$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOP} + S_{COP} + S_{BOA}$$

$$\Delta BOA = \Delta COP \Rightarrow S_{BOA} = S_{COP} \Rightarrow S_{BOA} = S_{COP} = \left( \frac{49\sqrt{3}}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{16\sqrt{3}}{4} \right) : 2 = \frac{12\sqrt{3}}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta BCT = \Delta TPA = \Delta CPT \\ \angle COP = \angle BCT \\ BC = CD \\ CT = DP \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta COP = \Delta BCT \Rightarrow \Delta BCT = \Delta TPA = \Delta CPT = \Delta COP = \Delta BOA \Rightarrow S_{BCT} = S_{TPA} = S_{CPT} = S_{COP} = S_{BOA} = \frac{12\sqrt{3}}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{ABCD} = S_{BNMA} + S_{BCN} + S_{ADM} \\ S_{BCT} = S_{BCN} + S_{CNT} \\ S_{CTD} = S_{CNT} + S_{DMT} + S_{NMT} \\ S_{ADT} = S_{AMP} + S_{MTD} \\ S_{ABT} = S_{ANMA} + S_{NMT} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{ABCD} - S_{BCT} - S_{ADT} + S_{CTD} = S_{BNMA} + S_{BCN} + S_{ADM} - S_{BCN} - S_{CNT} - S_{AMP} - S_{MTD} + S_{CNT} + S_{DMT} + S_{NMT} = S_{BNMA} + S_{NMT}$$

$$\Rightarrow S_{ABT} = S_{ABCD} - S_{BCT} - S_{ADT} + S_{CTD} \Rightarrow S_{ABT} = \frac{49\sqrt{3}}{4} - \frac{12\sqrt{3}}{4} - \frac{12\sqrt{3}}{4} + \frac{12\sqrt{3}}{4} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37\sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot 49\sqrt{3}} = \frac{37}{49}$$

Ответ:  $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}$ ;  $\Delta ABT$  - равнобедренный

т.к. у фокусов 15<sup>2</sup> - карт, то нам присутствуют все карты.

Вытаскивая карту дубль, он может 15 способами

11	6 6	11 11
22	7 7	12 12
33	8 8	13 13
44	9 9	14 14
55	10 10	15 15

То условие среди этих карт —

То условие фокусник вытаскивает 2 карты.

т.к. 1 уже дубль, то на 2 неважно дубль или нет.

Рассмотрим сколько цифр может быть на синей стороне.

14 т.к. 1 цифра — цифра из дубля и ее не может быть

Рассмотрим красную сторону.

Нам неважно совпадение с синей стороной.

Значит на кол-во вариантов зависит от дубля ⇒

⇒ 14 вариантов. Итого 2 карта — это один из 14<sup>2</sup> вари-

антов и на каждый выбранный дубль этих вариантов

14<sup>2</sup> ⇒ всего 15 · 14<sup>2</sup> вариантов

14<sup>2</sup> · 15 = 196 · 15 = 2940 вариантов

Ответ 2940 вариантов.

Т.к. АВ и ВА один и тот же набор, то мы берем дубль как первую карту.

Числовик

Вариант 14

4

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 3x^2y^2 = 7 \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 37 \end{cases}$$

Пусть  $x^2 = a$ ;  $y^2 = b$ .

$$\begin{cases} 7a + 7b - 3ab = 7 \\ a^2 + b^2 - ab = 37 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 - ab - 7a - 7b + 3ab = 30 \quad (1)$$

$$7a + 7b - 3ab = 7 \quad (2)$$

$$(1) \quad (a^2 + 2ab + b^2) - 7(a+b) = 30$$

$$(a+b)^2 - 7(a+b) = 30$$

$$(a+b)(a+b-7) = 30$$

из 2  $7a + 7b - 3ab = 7$

$$7(a+b) = 7 + 3ab$$

$$a+b = 1 + \frac{3}{7}ab$$

$$(1 + \frac{3}{7}ab)(1 + \frac{3}{7}ab - 7) = 30$$

$$(1 + \frac{3}{7}ab)(\frac{3}{7}ab - 6) = 30$$

$$\frac{3}{7}ab + \frac{9}{49}a^2b^2 - 6 - \frac{18}{7}ab = 30 \quad | \cdot 49$$

$$9a^2b^2 - 105ab - 36 \cdot 49 = 0$$

$$3a^2b^2 - 35ab - 12 \cdot 49 = 0$$

пусть  $ab = F$

$$3F^2 - 35F - 12 \cdot 49 = 0$$

$$F_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$F_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 + 12 \cdot 49 \cdot 3}}{6}$$

$$F_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 + 9056}}{6}$$

$$F_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{8281}}{6}$$

$$F_{1,2} = \frac{35 \pm 91}{6}$$

$$F_1 = \frac{35+91}{6} = \frac{126}{6} = 21$$

$$F_2 = \frac{35-91}{6} < 0; \text{ но } ab = x^2 \cdot y^2 \text{ неотрицательно}$$

$$ab = 21$$

$$7a + 7b - 3 \cdot 21 = 7$$

$$a^2 + b^2 - 21 = 37$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a^2+b^2=58 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^4+y^4=58 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a^2+b^2=58 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a^2-2ab+b^2=58-42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ (a-b)^2=16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a-b=4 \\ a+b=10 \\ a-b=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a=14 \\ a+b=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a=6 \\ a+b=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=7 \\ b=3 \\ a=3 \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{7} \\ y = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

Ответ  $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}) (\sqrt{3}; -\sqrt{3}) (-\sqrt{7}; \sqrt{7}) (\sqrt{7}; \sqrt{7})$   
 $(-\sqrt{3}; \sqrt{3}) (-\sqrt{7}; -\sqrt{7}) (-\sqrt{3}; \sqrt{7})$   
 $(\sqrt{3}; -\sqrt{7}) (\sqrt{3}; \sqrt{7}) (\sqrt{7}; \sqrt{3})$  3

