Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

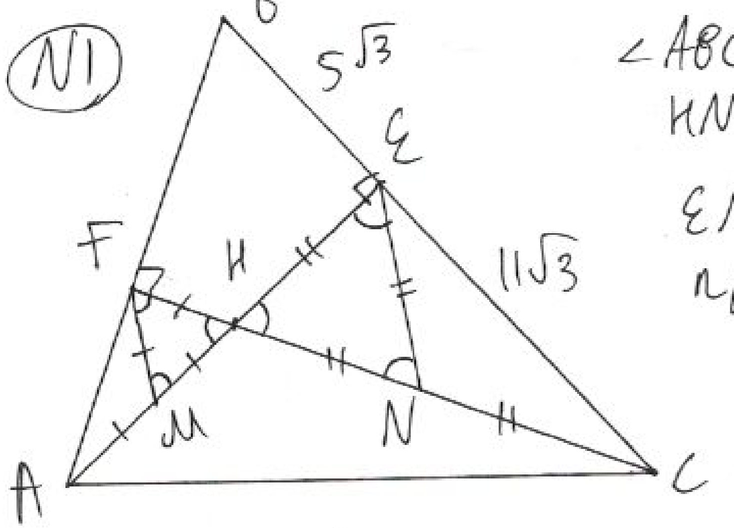
Шифр: **211007121**

ID профиля: **216981**

Вариант 14

Чистовик. стр. 1. Дано: $FM=2$ $EN=11$.

№1



$\angle ABC$? $S_{\triangle ABC}$? R?

$HN=NC$; $HM=MA$.

EN и FM – медианы в п/у $\triangle AFH$ и EHC $\Rightarrow$

$FM=\frac{1}{2}AH$ и $EN=\frac{1}{2}CH$.

$\Rightarrow HN=NC=EN=11$

$AM=MH=MF=2$.

$\Rightarrow$ в р/б $\triangle MFH$ и $\triangle HEN$,

$\angle MFH=\angle FHM$ и $\angle HEN=\angle NEH$.

$MF \parallel EN \Rightarrow \angle ENF=\angle HFM$. $\angle EHN=\angle FHM$, как вертикальные $\Rightarrow \triangle HEN$ – равносторонний и $\triangle HMF$, подобный $\triangle HEN$ по 2 углам также р.с.

$\Rightarrow FH=FM=2$ и $HE=HN=11$.

$\angle EHF=180^\circ-EHN=120^\circ$. В $BEHF$,

$\angle ABC=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+120^\circ)=60^\circ \Rightarrow \underline{\angle ABC=60^\circ}$.

$$BE=\frac{AE}{tg\angle ABC}=\frac{AE}{\sqrt{3}}=\frac{AM+MH+HE}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}.$$

$$EC=\sqrt{CH^2+HE^2}=\sqrt{3}\,HE=11\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow BC=EC+BE=16\sqrt{3}$. $\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AE\cdot BC=$

$=\frac{1}{2}(AM+MH+HE)\cdot(5\sqrt{3}+11\sqrt{3})=15\cdot 8\sqrt{3}=\underline{120\sqrt{3}}$.

По теореме синусов, $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2R$.

$\Rightarrow R=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}$. В п/у $\triangle AEC$, $AC=\sqrt{EC^2+AE^2}=\sqrt{588}$.

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{588}}{2\cdot\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{588}}{2\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{588}{3}}=\sqrt{196}=14.$$

Ответ: $\angle ABC=60^\circ$; $S_{\triangle ABC}=120\sqrt{3}$; $R=14$.

Чистовик. стр. 2.

№2 Пусть изначальная сумма всех чисел $= S$, a_1 = минимальное число; b_1 – max. число.

$\Rightarrow S = a_1 + a_2 + \ldots + b_1$. Из условий,

$S_1 = 30a_1 + a_2 + \ldots + b_1 = S + 29a_1 = 450$.

$S_2 = a_1 + a_2 + \ldots + 14b_1 = S + 13b_1 = 450$

$\Rightarrow S + 29a_1 = 450 = S + 13b_1$.

$\Rightarrow 29a_1 = 13b_1$. 29 и 13 – взаимно простые $\Rightarrow$

$\begin{cases} b_1 \vdots 29 \\ a_1 \vdots 13. \end{cases}$ $a_1; b_1 \in \mathbb{N} \rightarrow a_1 = 13k; k \in \mathbb{N}$

$b_1 = 29m;\ m \in \mathbb{N}$.

$S + 13b_1 = S + 13 \cdot 29m = 450 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13 \cdot 29m < 450$. $377m < 450 \Rightarrow m < 2$.

При $m \geqslant 2$ $377m > 700 > 450$.

$\Rightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow m = 1$.

Аналогично, $29(13k) < 450 \Rightarrow k = 1$.

$\Rightarrow a_1 = 13$ $b_1 = 29 \Rightarrow \forall a_i\ (i \neq 1) = (13; 29)$.

$S_1 = 30a_1 + a_2 + \ldots + b_1 = 390 + a_2 + \ldots + 29 = 450$.

$\Rightarrow a_2 + \ldots + a_n = 31$. Если в левой части более 2 переменных ($a_i > 13$), то их сумма $> 13 \cdot 3 > 39$, что не равно 31. $a_i < 29 \Rightarrow$ 1 слагаемое невозможно; $29 < 31$. $\Rightarrow$ 2 слагаемых

$\begin{cases} a_2 + a_3 = 31 \\ a_2, a_3 = (13; 29). \end{cases}$ Также, $a_2, a_3 \in \mathbb{N}$. (из условий.)

Чистовик. стр. 3.

№2

$\begin{cases} a_2+a_3=31 \\ a_2, a_3 \geq 14 \\ a_2, a_3 \leq 28 \end{cases}$

При $a_1 \geq 18$ $S_1 \geq 18+14 \geq 32 > 31 \Rightarrow a_1 < 18$.

Рассмотрим все варианты, где $14 \leq a_2 < 18$, $a_3 = 31 - a_2$.

1) $\begin{cases} a_2 = 14 \\ a_3 = 31-14=17 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_2 = 15 \\ a_3 = 31-15=16 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a_2 = 16 \\ a_3 = 31-16=15 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a_2 = 17 \\ a_3 = 31-a_2=14 \end{cases}$

Из этих вариантов получаются 2 пары разных чисел: (15; 16) и (14; 17).

Учитывая, что $b_1 = 29$ и $a_1 = 13$ получаем ответ:

Ответ: (13; 15; 16; 29) или (13; 14; 17; 29).

Чистовик. стр. 4.

№3 $A(x;y)$: $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$.

B - центр Ω_B: $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+$

$+9=0$. $a=?$; A и B - по разные стороны от $x=4$.

Преобразуем Ω_B: $(ax)^2-2ax(a^2+3)+(ay)^2-2a^2y+$

$+a^4+9=0 \Leftrightarrow (ax)^2-2ax(a^2+3)+(a^2+3)^2-(a^2+3)^2+(ay)^2-$

$-2a^2y+a^2-a^2+a^4+9=0$.

$\Leftrightarrow (ax-a^2-3)^2-a^4-6a^2-9+(ay-a)^2-a^2+a^4+9=0$.

$\Leftrightarrow (ax-a^2-3)^2+(ay-a)^2=5a^2$. $(5a^2 \geqslant 0 \ \forall a)$.

Тогда центр Ω_B, точка B, будет сдвинута

на (a^2+3) по оси x от начала координат.

$\Rightarrow x_B=a^2+3$.

Преобразуем $A(x;y)$: $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$.

$x^2+2x(a-y)+2a^2+2y^2=0$.

$x^2+2x(a-y)+a^2+y^2-2ay+a^2+y^2+2ay=0$.

$(x+a-y)^2+(y+a)^2=0$. $n^2 \geqslant 0 \Rightarrow$

сумма двух квадратов $=0$ только при случае, где

они одновременно равны 0.

$\Rightarrow \begin{cases} x+a-y=0 \\ a+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-a \\ y=-a \end{cases} \Rightarrow x=x_A=-2a$.

A и B лежат по разные стороны от $x=4$ при:

$\begin{cases} x_A>4 \\ x_B<4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_A<4 \\ x_B>4 \end{cases}$.

211007121 (U216981 M1274574)

Чистовик. стр. 5.

№3 ... Рассмотрим 1) случай: $\begin{cases} x_A > 4 \\ x_B < 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2a > 4 \\ a^2+3 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -2 \\ a^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = (-\infty; -2) \\ a = (-1; 1) \end{cases}$

$\Rightarrow a = (-\infty; 2) \cap (-1; 1) = \varnothing.$

2) случай: $\begin{cases} x_A < 4 \\ x_B > 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2a < 4 \\ a^2+3 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2 \\ a^2 > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (-2; +\infty) \\ a = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$

$\Rightarrow a = (-2; +\infty) \cap ((-\infty; -1) \cup (1; +\infty)) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = (-2; -1) \cup (1; +\infty).$

Ответ: $a = (-2; -1) \cup (1; +\infty).$

Черновик.

$A(x;y)$: $2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

центр. $B(\omega_B)$: $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax+a^4+9=0$

a? A и B по разные стороны от $x=4$.

ω_B. $a^2x^2-x(2a^3-6a)=(ax)^2-2ax(a^2-3)$.

$\Leftrightarrow$ $a^2x^2-2xa(a^2-3)+(a^2-3)^2-(a^2-3)^2=$

$=(ax-a^2+3)^2-a^4-9+6a$.

$\Rightarrow$ $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax+a^4+9=0 \Leftrightarrow$ $-2a^2y$

$(ax-a^2+3)^2+6a+a^2y^2-2a^2y$

$a^2y^2-2a^2y=(ay)^2-2a\cdot ay+a^2-a^2=$

$=(ay-a)^2-a^2$.

$\Rightarrow$ $(ax-a^2+3)^2+(ay-a)^2=a^2-6a$.

$a\in(-\infty;0]\cup[6;+\infty)$.

~~A. $(x+a)^2+a^2-2$~~

$x_B=a^2-3$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_A<4\\ x_B>4\end{cases}\\ \begin{cases}x_A>4\\ x_B<4\end{cases}\end{array}\right.$

$x(2a+x-2y)+2(y^2+a^2)=0$.

$x^2+2x(a-y)+2(a^2+y^2)$

$x^2+2x(a-y)+a^2+y^2-2ay+a^2+y^2+2ay=0$

$(x+a-y)^2+(a+y)^2=0$.

211007121 (U216981 M1274574)

$\Rightarrow\begin{cases}a+y=0\\ x=y-a\end{cases}$ $\Rightarrow$ $y=-a$. $\Rightarrow$ $x=-2a$.

$x_A=-2a$
$x_B=a^2-3$

Черновик.

1) $\begin{cases} x_A < 4 \\ x_B > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a < 4 \\ a^2 - 3 > 4 \end{cases}$

$[6; +\infty)$

$\begin{cases} a > -2 \\ a^2 > 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -2 \\ a = (-\infty; -\sqrt{7}); (\sqrt{7}; +\infty). \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_A > 4 \\ x_B < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a > 4 \\ a^2 - 3 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -2 \\ a^2 < 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad a = (-\sqrt{7}; -2).$

Ответ: $a = (-\sqrt{7}; -2) \cup [6; +\infty).$

черновик

№2 $S + 29a = S + 19b = 450$

$\Rightarrow 29a = \cancel{S} + 19b$

$\Rightarrow a = 13$ и $b = 29$?

$29 \cdot 13 < 450$ ✓.

При $a \geq 26$ или $b \geq 58$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{13}{29} \\ 29a < 450. \end{cases}$

$29 \cdot \overset{a}{13} = 290 + 60 + 27 = 377.$

$a = 13$ $b = 29 \Rightarrow$ $30a + b = 419 \Rightarrow c + d + \ldots = 31.$

$c_i > 13 \Rightarrow$ c_1 и c_2

$c_1 + c_2 = 31 \Rightarrow$ 13 14 17 29
13 15 16 29

A: $2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

B: $a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$

$x > 4 \Rightarrow 2a^2 + 8a + \underline{8 - 8y + 2y^2} = 0.$

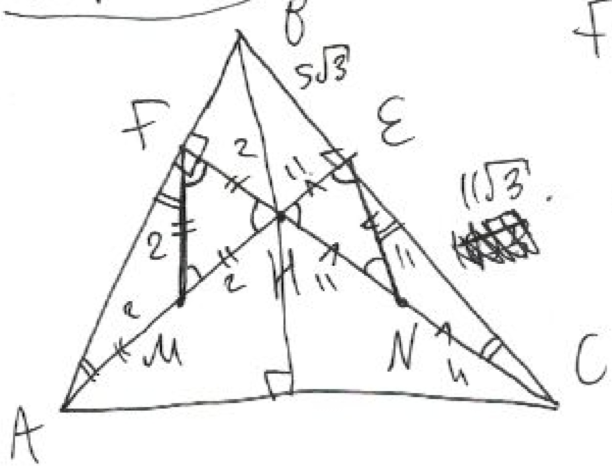
$(y - 2)^2 + a^2 + 4a = 0.$

$\Rightarrow (y-2)^2 + (a+2)^2 - 4 = 0.$

$\cancel{290+}$ $390 - 13 = 377.$

211007121 (U216981 M1274574)

Черновик.



$FM = 2 \quad EN = 11.$

$FM \parallel EN.$

$\angle ABC? \quad S_{\Delta ABC}? \quad R?$

$EN = \frac{1}{2} HC = 11$

$FM = \frac{1}{2} AH = 2.$

$AH \cdot HE = CH \cdot HF$

$\Rightarrow \quad 4HE = 22HF \Rightarrow HE = \frac{11}{2} HF.$

$EN \parallel MF \Rightarrow \angle MFN = \angle FNE \Rightarrow \Delta HNE$ и ΔMHF — р/с.

~~⇒ AF ⇒~~ $\angle FHE = 120^\circ$ и $\angle BFH = \angle BEH = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle B = 60^\circ. \Rightarrow \frac{BE}{AE} = tg\, 30 \Rightarrow BE = \frac{AE}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

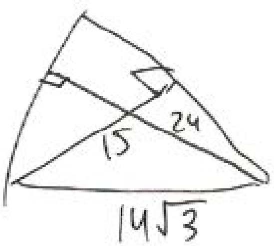
$EC = \sqrt{3} HE = 11\sqrt{3} \Rightarrow BC = 16\sqrt{3}.$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AE \cdot BC = 8 \cdot 15\sqrt{3} = 120\sqrt{3}.$

$2R = \frac{AC}{\sin\angle B} \quad AC = \sqrt{EC^2 + AE^2} = \sqrt{15^2 + (11\sqrt{3})^2} =$

$= \sqrt{225 + 363} = \sqrt{588} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{588}}{\sqrt{3}} =$

$= 2\sqrt{196} = 28 \quad AC = 14\sqrt{3}$



$AC^2 = \sqrt{(11\sqrt{3})^2 + 15^2} = \sqrt{363 + 225} = 14\sqrt{3}.$

$\frac{AE}{\sin\angle B} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{\sin\angle B \cdot 2} = 14.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211007121**

ID профиля: **216981**

Вариант 14

Чистовик. стр. 1.

№4 $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$ Подстановкой получаем $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7 \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2-x^2y^2=37 \end{cases}$

Выполним замену $x^2+y^2=\omega$; $x^2y^2=\varphi$.

$\Rightarrow \begin{cases} 7\omega-3\varphi=7 \\ \omega^2-3\varphi=37 \end{cases}$ Вычтем из 2-ого уравнения первое.

$\Rightarrow \omega^2-3\varphi-7\omega+3\varphi=37-7.$

$\omega^2-7\omega-30=0 \Leftrightarrow (\omega-10)(\omega+3)=0.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \omega=10 \\ \omega=-3. \end{array}\right.$ Но $\omega=x^2+y^2 \Rightarrow \omega \geq 0.$ $\Rightarrow \omega=-3$ не подходит.

$\Rightarrow \omega=10.$ $70-3\varphi=7 \Rightarrow \varphi=21.$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\omega=10 \\ x^2y^2=\varphi=21 \end{cases} \Leftrightarrow y^2=\frac{21}{x^2}.$

$\Rightarrow x^2+\frac{21}{x^2}-10=0. \quad | \cdot x^2.$

$x^4+21-10x^2=0.$ $x^2=t.$

$t^2-10t+21=0;$ $(t-3)(t-7)=0.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=t=3 \\ x^2=t=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm\sqrt{7} \end{array}\right.$

1) $x=\pm\sqrt{3}.$

$\Rightarrow y^2+3=10 \Rightarrow y=\pm\sqrt{7}.$

2) $x=\pm\sqrt{7} \Rightarrow y+7=10 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}.$

Получено 8 корней: Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(\sqrt{3};-\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};\sqrt{7})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{7})$; $(\sqrt{7};\sqrt{3})$; $(\sqrt{7};-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{7};-\sqrt{3})$.

Чистовик. стр. 2.

№5. Рассмотрим, сколько всего существует различных карточек. Стороны карточки разного цвета, значит, карточки $(x;y)$ и $(y;x)$ - разные. Тогда всего их будет $15^2 = 225$. Т.е. у фокусника есть по одному (ровно) экземпляру каждой карточки из возможных.

Из них $\frac{1 \cdot 15 + 15 \cdot 1}{2} = 15$ дублей. Рассмотрим, как фокусник мог выбрать 2 карточки указанным способом. Одной из карточек должен быть дубль. Рассмотрим 2 случая.

1) Фокусник выбрал 1 дубль.

Тогда выбрать другую карточку он может ~~$15^2 - (15 \cdot 2 - 1) = 196$ способами~~. $15^2 - (15 \cdot 2 - 1) - 14 =$
$= 182$ способами. (Т.к. нельзя повторяющиеся числа на синей или красной карточках (сторонах) и нельзя брать другие дубли, т.к. мы смотрим случай, когда только 1 дубль.)

$\Rightarrow$ Всего вариантов, по правилу произведения, будет $15 \cdot 182$.

2) Фокусник выбрал 2 дубля.

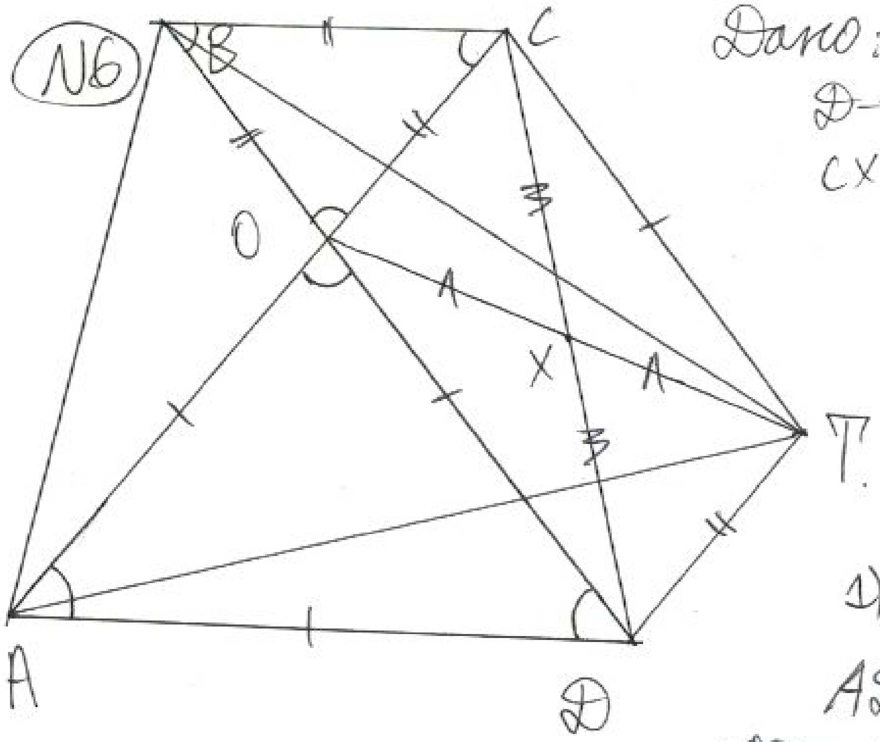
Тогда, способов будет $\frac{15 \cdot 14}{2}$, т.к. у разных дублей нет одинаковых чисел, но тут считают варианты $(А;Б)$ и $(Б;А)$ как 2 разных, значит надо разделить на 2. Согласно правилу суммы,

$\Rightarrow$ Всего вариантов $15 \cdot 182 + \frac{14 \cdot 15}{2} = 15(182+7) =$
$= 15 \cdot 189 = 2835$ вариантов.

Ответ: 2835 вариантов.

Чистовик. стр. 3.

№6



Дано: 1) $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ − р/с.
Д-ть $\triangle ABT$ − р/с если $CX = XD$ и $OX = XT$, где $X \in OT$.
2) $AD = 4$ $BC = 3$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = ?$$

Решение:

1). Из условий, $AD = OD = AO$; $BO = OC = BC$ и $\angle OBC = \angle BOC = \angle BCO = \angle ODA = \angle ADO = \angle AOD = 60^\circ$. $\angle OBC = \angle ODA$ как вн. накр. лежащие при BC и AD и секущей $BD \Rightarrow AD \parallel BC$.

$OX = XT$ и $CX = XD \Rightarrow OCTD$ − пар-м и $OD = CT$; $OC = DT$. Пусть $BC = u$; $AD = w$.

$\Rightarrow DT = OC = u$; $OD = CT = w$.

$\angle COD = \angle CTD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$.

$\Rightarrow \angle OCT = \angle ODT = 180^\circ - \angle AOD = 60^\circ$ (т.к. в пар-ме противоположные углы равны.)

$\Rightarrow \angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

$\angle AOB = 180^\circ - \angle AOD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle ADT$.

$AD = AO$ по условию; $u = OC = DT = OB$ по доказанному.

$\angle AOB = \angle ADT = 120^\circ$. $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle ADT$ по I признаку.

Тогда $AB = AT$

211007121 (U216981 M1274575)

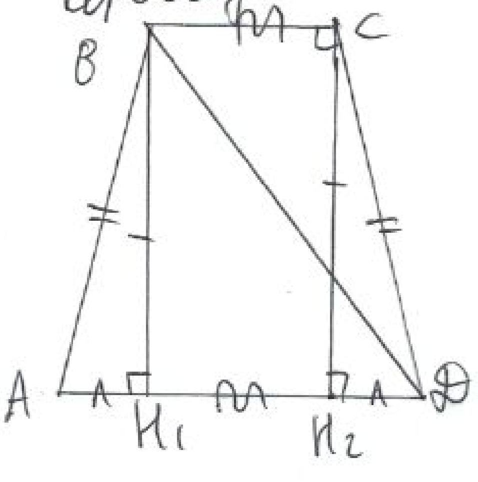
Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle TCB$. $OB = BC$ по условию

$w = CT = OD = AO$ по доказанному. $\angle AOB = \angle BCT = 120^\circ$.

Чистовик. стр. 4.

№6 ... Тогда $\triangle AOB = \triangle BCT$ по I признаку.
(I признак = по 2 сторонам и углу между ними.)
И $\Rightarrow AB = BT$. Тогда $AB = AT = BT \Rightarrow$
$\triangle ABT$ – равносторонний. ч.т.д.

г) $BC = 3$ $AD = 4$. $\dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = ?$
Рассмотрим $\triangle ABD$. $BD = BO + OD = BC + AD$. $\angle ADB = 60°$.
$\Rightarrow$ По теореме косинусов,
$$AB^2 = AD^2 + (AD+BC)^2 - 2 \cdot AD(AD+BC)\cos 60°.$$
$$\Leftrightarrow AB^2 = 4^2 + (3+4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (3+4)\cos 60° \Leftrightarrow$$
$$AB^2 = 16 + 49 - 2 \cdot 28 \cdot \tfrac{1}{2} = 37 \Rightarrow AB = \sqrt{37}$$
Проведём высоту BH_1 к AD и CH_2 к AD.

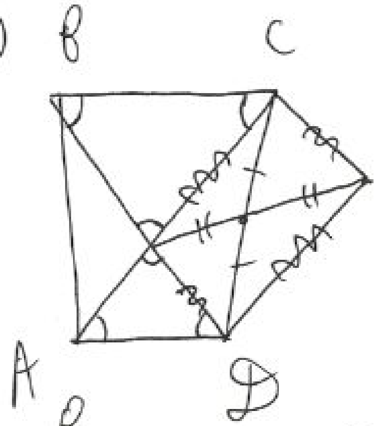


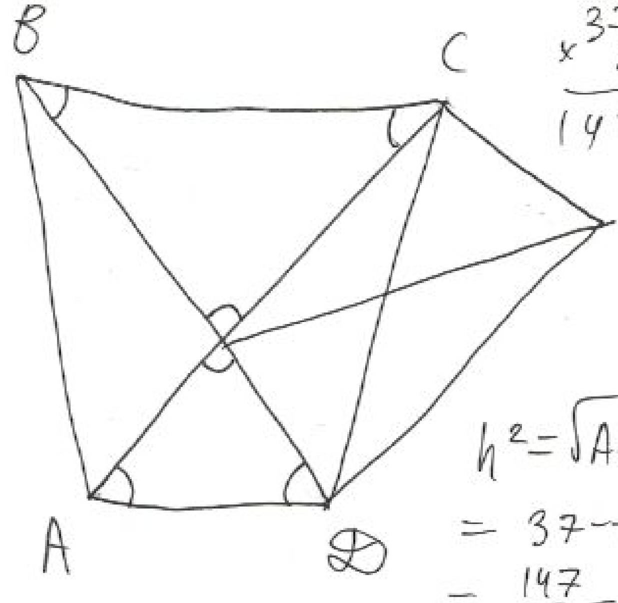
$BC \parallel AD \Rightarrow H_1BCH_2$ – прямоугольник и
$BC = H_1H_2$; $BH_1 = CH_2$.
$\triangle AOB = \triangle COD$ ($OB = OC$; $AO = DO$;
$\angle AOB = \angle COD = 180° - 60° = 120°$)
по I признаку $\Rightarrow AB = CD$.
$\Rightarrow \triangle CH_2D = \triangle ABH_1$ по I признаку.
$\Rightarrow AH_1 = DH_2$.
$$AH_1 + DH_2 = 2AH_1 = AD - H_1H_2 = AD - BC = 1.$$
$$\Rightarrow AH_1 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow BH_1 = \sqrt{AB^2 - AH_1^2} = \sqrt{37 - \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{147}{4}} = \tfrac{7\sqrt{3}}{2}.$$
(по теореме Пифагора в $\triangle AH_1B$).
Тогда площадь трапеции $ABCD$, $S_{ABCD} = \dfrac{AH_1(AD+BC)}{2} =$
$= \dfrac{\frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot 7}{2} = \dfrac{49\sqrt{3}}{4}$ По формуле площади р/с $\triangle$,

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{37\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{ABCD}} = \dfrac{37\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{4}{49\sqrt{3}} = \dfrac{37}{49}$.
Ответ: $\dfrac{37}{49}$.

Черновик.

№3



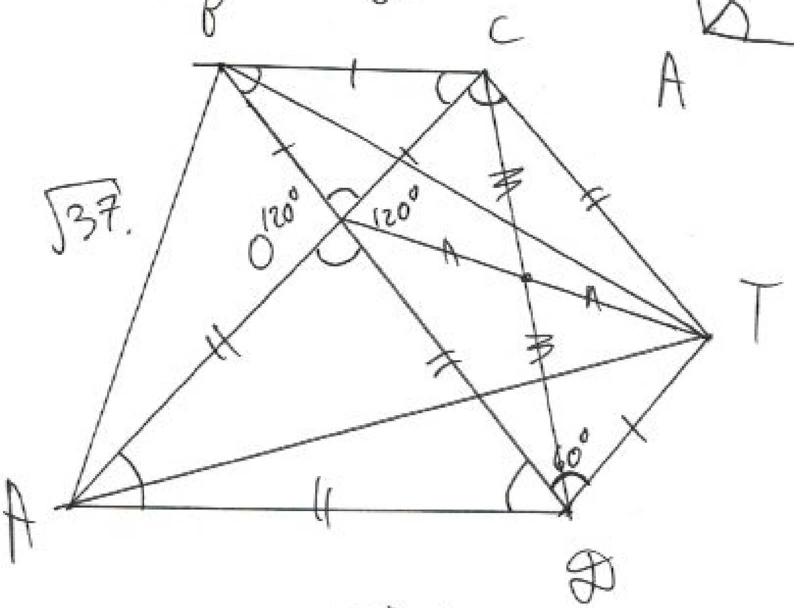


$$\begin{array}{r} \overset{2}{37} \\ \times\ 4 \\ \hline 148 \end{array}$$

$h^2 = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}^{\,2} =$

$= 37 - \frac{1}{4} =$

$= \frac{147}{4} = \frac{7}{2}\sqrt{3}.$



$\triangle AOB = \triangle BCT$

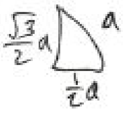
$\Rightarrow AB = BT$

$\triangle AOB = \triangle ADT$

$\Rightarrow AT = AB$

$BC = 3 \quad AD = 4.$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$. $\quad S_{ABCD} = \frac{7\sqrt{3} \cdot 7}{2 \cdot 2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}.$



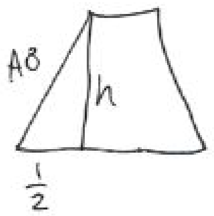
$AB^2 = AO^2 + BO^2 + 2AO \cdot BO \cos 60 = 4^2 + 3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$?

$\cancel{AB^2 =} \quad 25 + 12 = 37.$

$AB^2 = 4^2 + 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2\cos 60 = 4^2 + 3^2 + 12 \Rightarrow \sqrt{37} = AB.$

$\Rightarrow S_{\triangle ABT} = \frac{\sqrt{3}\,AB}{4} = \frac{\sqrt{111}}{4}.$

S_{ABCD}?



$h = \sqrt{AB^2 - \frac{1}{2^2}} = 111 - \frac{1}{4} =$

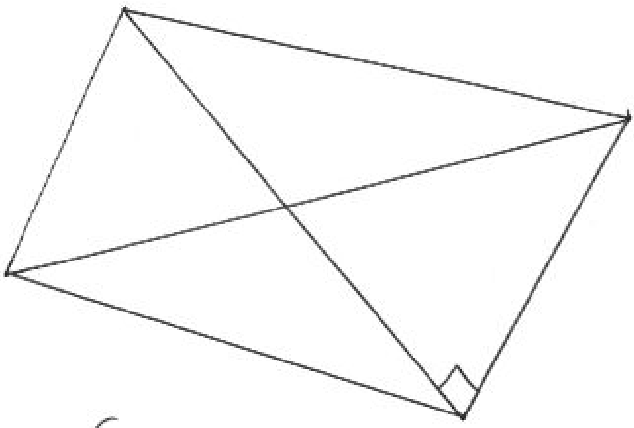
$= \frac{443}{4}$?

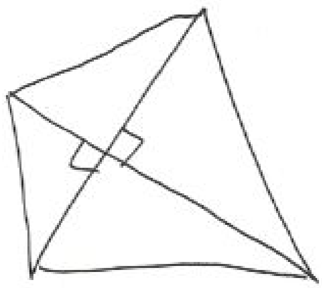
$AB^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 16 + 49 - 28 = 16 + 21 = 37.$

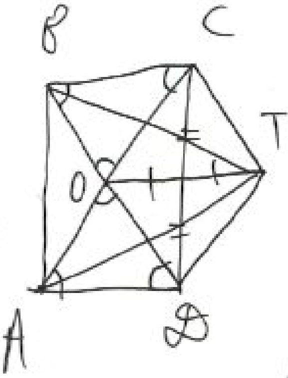
$S = \frac{\sqrt{111}}{4} \cdot \sqrt{37} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$ $\quad \Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}.$

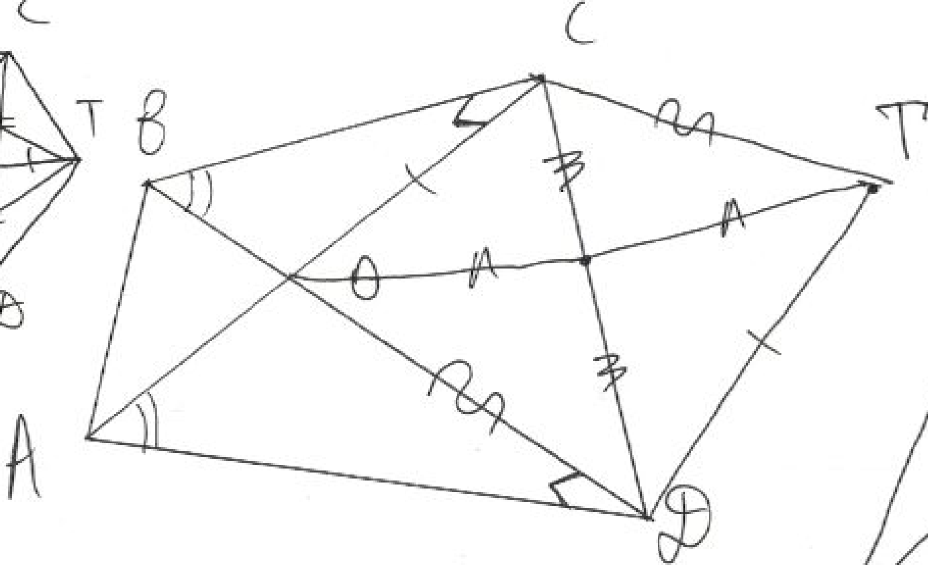
Черновик.

AOD и BOC.

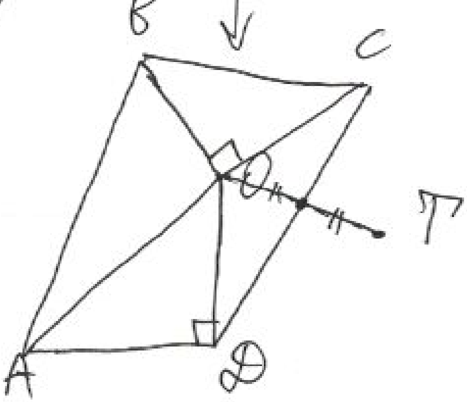


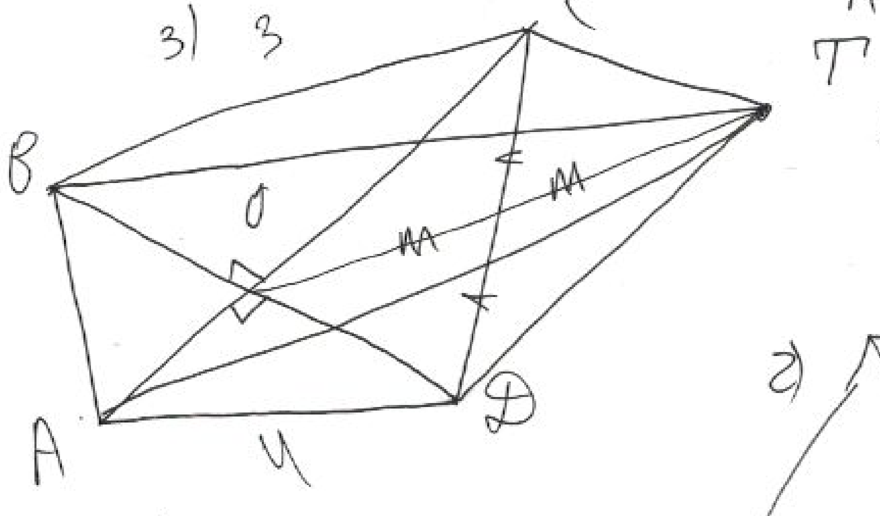


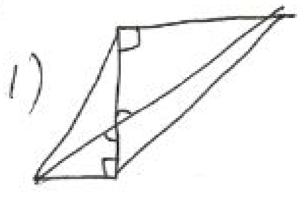


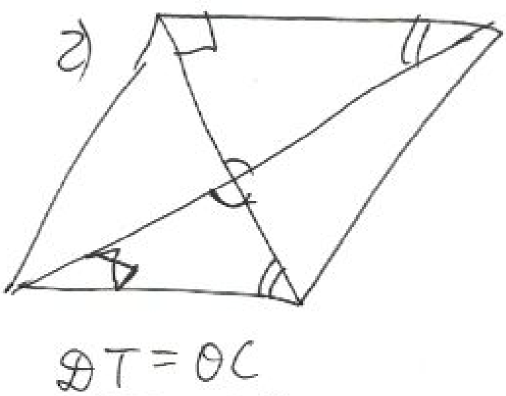


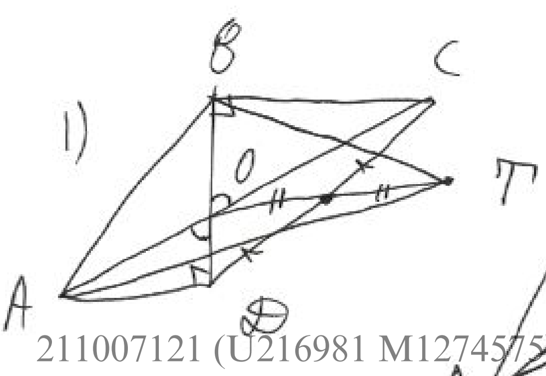
невозможна

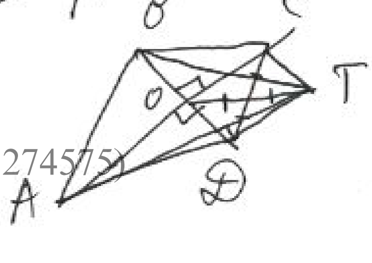












DT = OC
CT = OD.

Черновик.

№1 $\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=37 \end{cases}$

АОТ – ?
ВС = 3 АД = 4
S_{AOT}/S_{ABCD}?

$x^2+y^2=w$ $x^2y^2=\varphi$

$\Rightarrow \begin{cases} 7w-3\varphi=7 \\ w^2-3\varphi=37 \end{cases}$ $w^2-7w-30=0$
$(w-10)(w+3)=0$

$\Rightarrow w=10$ или $w=-3$.
$w=x^2+y^2 \Rightarrow w\geq 0 \Rightarrow w=10$.

$\varphi = 7w-7=\frac{63}{3}=21$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2=10$
$(xy)^2=21 \Rightarrow y^2=\frac{21}{x^2}$

$x^4+21-10x^2=0$ $x^2=t$ $t^2-10t+21=0$

$(t-7)(t-3)=0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} t=7 \\ t=3 \end{matrix}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{matrix} x=\sqrt{7} \\ x=\sqrt{3} \end{matrix}\right. \Rightarrow$ $y=\sqrt{\frac{21}{x^2}}=\sqrt{3}$
$y=\sqrt{\frac{21}{x^2}}=\sqrt{7}$.

$\begin{array}{r} 4 \\ \times 189 \\ 15 \\ \hline 945 \\ +189 \\ \hline 2835 \end{array}$

$\Rightarrow$ Ответ: $(\sqrt{7};\sqrt{3})$ или $(\sqrt{3};\sqrt{7})$

№2 $15^2 \Rightarrow$ все есть по 1шт. Дублей = 15.

$(x;y)$ и $(y;x)$ – разные пары!!!

$\Rightarrow C^1_{15}$ – дубли. 2: всего $15^2-C^1_{15}=210$.

– 14·2 вариантов → (од. числа)

$\Rightarrow C^1_{15}(15^2-C^1_{15}-2(15-1))=15\cdot(225-15-14\cdot2)=$
$=15\cdot(196-14)=15\cdot 182$ вар

Черновик.

$\boxed{C^{1}_{15}}\ \boxed{?}$ ~~2) ? → S − 15·2~~

~~⇒ 15(225 15² − 15·2) = 15²·13 вар?~~

$\binom{15}{15} - 1$ $\boxed{15 \mid 15}$

с камд. цифрой:

$\frac{15(225-29)}{2} = 15\cdot 98 = \underline{1470}$ $\boxed{1 \mid 15} + \boxed{14 \mid 1} = \underline{29}$ карт.

(гиила)

⇒ Другие цифры: $S - 29$?

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 7 \\ \hline 112 \end{array}$

$\Rightarrow 15(225-29) = \boxed{\frac{15\cdot 196}{2}}$? → $15\cdot 7$.

$15\cdot 98.$

$\boxed{\frac{15\cdot 196}{2}}$

C^{1}_{15} (aa). $\left.\begin{matrix} aa & aa \\ aa_1 & a_1a \\ \dots & \dots \\ aa_i & a_ia \end{matrix}\right\} 30 - 1 = 29$

$209 \mid 7$, 14, 69

$\Rightarrow \frac{15(225-29)}{2} = 15\cdot 98 = ?$

$1500 - 30 = \underline{1470}$

Общ: $C^{1}_{225}\cdot C^{1}_{224} = \frac{15^2\cdot 32\cdot 7}{2} = 15^2\cdot 16\cdot 7.$

где 0: $\frac{C^{1}_{210}\cdot C^{1}_{209}}{2} = \frac{210\cdot 209}{2} = 7\cdot 15\cdot 209.$

$\Rightarrow X = 15\cdot 7(15\cdot 16 - 209) = 15\cdot 7(240 - 208) = \underline{15\cdot 7\cdot 31}.$

$\Rightarrow 7\cdot 15^2\cdot 16 - 7\cdot 15\cdot 209 = 7\cdot 15(240 - 209) = 7\cdot 15\cdot 31.$

Хотя бы 1 = Всё − ни одного.

$= C^{2}_{225} - C^{2}_{210} = \frac{225\cdot 224}{2} - \frac{210\cdot 209}{2} =$

211007121 (U216981 M1274575)

$= 15^2\cdot 7\cdot 16 - 7\cdot 15\cdot 209 = 7\cdot 15(15\cdot 16 - 209) = 7\cdot 15\cdot 31.$

$= 217\cdot 15 = \dots\dots?$