Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

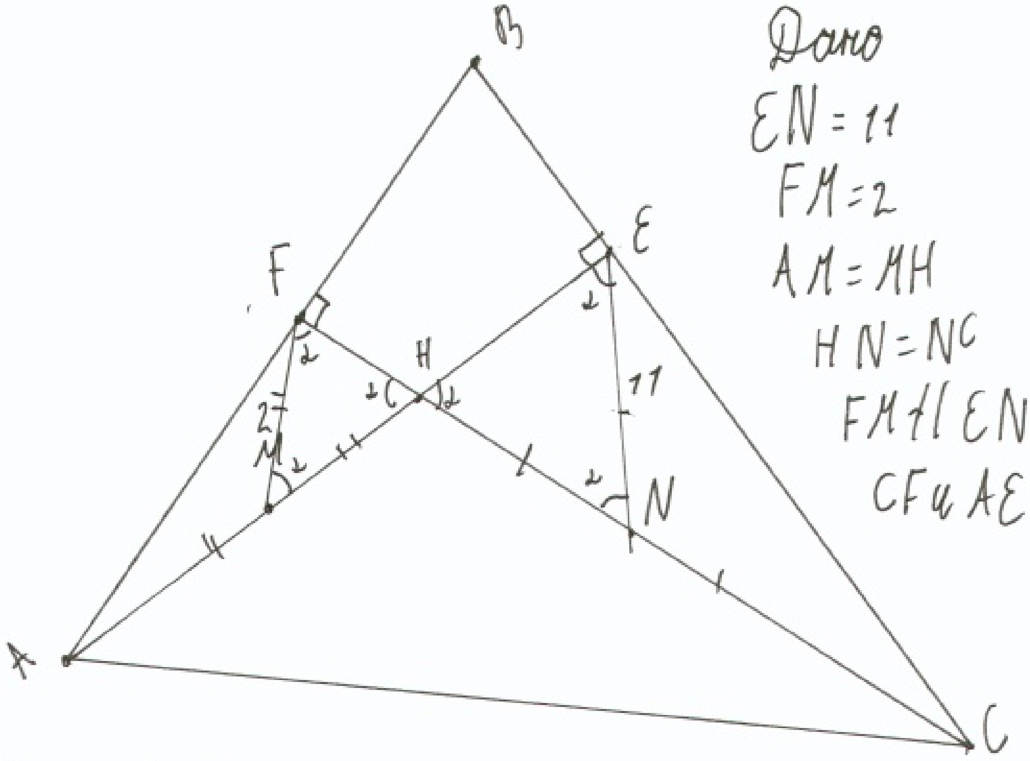
Шифр: **211006731**

ID профиля: **170124**

Вариант 14

Чистовик

№1



Дано
$EN = 11$
$FM = 2$
$AM = MH$
$HN = NC$
$FM \parallel EN$
CF и AE - выс

т.к $\angle CFA = \angle AEC = 90° \Rightarrow$ т. M и т. N - серед. гипот в $\triangle EEH$ и $FHA \Rightarrow FM = AM = MH = 2$; $EN = HN = NC = 11$

т.к $EN \parallel FM \Rightarrow \angle HFM = \angle FNE$ как х леж. и $\angle FHM = \angle EHN$ как верт.

⇓

$\triangle FHM \sim \triangle HEN$ по 3 $\angle \Rightarrow \dfrac{FM}{EN} = \dfrac{FH}{HN} = \dfrac{HM}{HE} = \dfrac{2}{11} \Rightarrow FH = 2$ и $HE = 11$

т.к $\triangle FHM$ и HEN - равносторон. $\Rightarrow$ их $\angle = 60°$ $\alpha = 60° \Rightarrow$

по т. Пифагора в $\triangle AFH$ и $\triangle HEC$ $EC = \sqrt{484 - 121} = \sqrt{363}$

$AF = \sqrt{12}$

т.к Σ острых $\angle$ в $\triangle = 90° \Rightarrow \angle HAF = 30° \Rightarrow$ в $\triangle ABE$ $AB = 2BE = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $\triangle ABC$ $\sqrt{3}x = 15$ $x = 5\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 5\sqrt{3} + \sqrt{363} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = AE \cdot BC : 2 = \dfrac{15 \cdot (5\sqrt{3} + \sqrt{363})}{2}$;

$\angle EHF = 120°$ как смежк $\angle EHN$; по $\Sigma \angle 4$-х $\angle$ $\angle ABC = 60°$

по т. Пиф $\triangle AEC$ $AC = \sqrt{588} \Rightarrow$ т.к $S_{\triangle} = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S}$

211006731 (U170124 M1275729)

$R = \dfrac{2x \cdot (5\sqrt{3} + \sqrt{363}) \cdot \sqrt{588}}{30(5\sqrt{3} + \sqrt{363})} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{588}}{3} = 14$ Ответ $\angle ABC = 60°$ $R = 14$ $S_{\triangle} ABC = \dfrac{15 \cdot (5\sqrt{3} + \sqrt{363})}{2}$

№2 Чистовик Числа запис на доске: $x_1 \dots x_n \in \mathbb{N}$ (1)

$x_1 \dots x_n$; $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (2)

$\Sigma x = x_1 + \dots + x_n$

по усл.

$$\begin{cases} \Sigma x + 29x_1 = 450 \\ \Sigma x + 13x_n = 450 \end{cases} \quad \Sigma x = 450 - 29x_1 \Rightarrow 29x_1 = 13x_n \quad x_1 = \frac{13}{29}x_n$$

из (1) $\Rightarrow x_n \vdots 29$ и $x_n > 0$

Если $x_n > 29 \Rightarrow x_n \geq 29 \cdot 2 \geq 58$, но тогда $13 \cdot 58 > 450 \Rightarrow \Sigma x < 0$ - неуд

$\Downarrow$

$x_n = 29$; $x_1 = 13 \Rightarrow \Sigma x = 450 - 29 \cdot 13 = 73$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 73$ (3) $x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} = 35$ ~~т.к~~ из (2) $\Rightarrow$ т.к $13 \cdot 3 > 35$

~~$n-2 \leq 2$~~ чисел кроме x_1 и x_n - z; $z \leq 2$

I случ $z = 0$; неуд т.к $\Sigma x = 29 + 13 \neq 73$

II случ $z = 1$; из (3) $\Rightarrow$ $x_2 = 35$ и $x_2 > x_n$ - неуд

III случ $z = 2$ $x_2 + x_3 = 35$ $13 < x_2 < x_3 < 29$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_2 = 14 \\ x_3 = 21 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 15 \\ x_3 = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 16 \\ x_3 = 19 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 17 \\ x_3 = 18 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ 13, 14, 21, 29 / 13, ~~20~~, 15, 20, 29 / 13, 16, 19, 29 / 13, 17, 18, 29

Чистовик №3

при $a>0$ $8a^2+32a>0$ $-8ka \geq 0$ => мин знач при $k=0$

$8a^2+32a \geq 48$ $\quad D = 16+24 = 40$

$a^2+4a-6 \geq 0$

$\Downarrow$

$(a+2+\sqrt{10})(a+2-\sqrt{10}) \geq 0$

$a \in (-\infty; -2-\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}-2; +\infty)$

т. D нах-ся справа от прям $x=4 \Leftrightarrow \frac{a^2+3}{a} < 4$ $\quad a^2-4a+3<0$ $\quad D=4$

$(a-3)(a-1)<0$

$a \in (1;3)$

т.к $-2-\sqrt{10}<1$ и $\sqrt{10}-2>1$ и $\sqrt{10}-2<3$

$\Downarrow$

при $a \in (\sqrt{10}-2; 3)$

Ответ $a \in (\sqrt{10}-2; 3)$

~~Чистовик~~ Черновик

Если хотя бы один из гр-ков ур-ний пересек, но не кас-ся прям $x=4$, то сущ т A и B: они лежат по одну сторону от прям

$\Downarrow$

при $x=4$ - y должны быть $\in \mathbb{Q}$ или

1) $2a^2+8a+16-8y+y^2=0$ $\quad y^2-8y+2a^2+8a+16=0$

$y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow D \leq 0$ $\quad 8a^2+32a+64 \geq 64$

$8a^2+32a \geq 0$

$a^2+4a \geq 0$

$a(a+4) \geq 0$

-4 0

\+ - +

$a \in (-\infty;-4) \cup (0;+\infty)$

$x>4$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$

$a+\frac{3}{a}<4$

$a^2-4a+3<0$

$(a-3)(a-1)$

$1 \; ; \; 3$

$8+4x+x^2-2xy+2y^2=0$

~~x~~ a

$4-k$

$(4-k)^2+8a-2ka+2a^2-8y+2ky+2y^2=0$

$8a^2 - 8ka+32a+4(4-k^2)>$

$2y^2+(8-2k)y$ $\quad 8ka=8a^2+32a$

211006731 (U170124 M1275729)

$2+2x+x^2-2xy+2y^2=0$ Черновик

~~$y-x$~~

~~$2(y-x)^2-x^2+2xy$~~

~~t~~ $n=\frac{y}{x}$ $m=\frac{a}{x}$

$2\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}+1+2\frac{a}{x}+2\left(\frac{a}{x}\right)^2=0$

$2n^2-2n+1+2m+2m^2=0$

$2(n^2+m^2)+2(m-n)+1$

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9$

$2mb=$

$=4\,ta^{2}+6a$ $\frac{1}{\sqrt{2}}ax+$

$\frac{4}{5}ax-$

~~$(m+n)(2m$~~

$\frac{3}{5}ax-$

$(m-n)(2m-2n+2)+4mn+1$

$2ab=$ $(x-b)^2+(y-c)^2=$

211006731 (U170124 M1275729)

$ax-$

$2+2x+x^2-2xy+2y^2=0$ Черновик

$\cancel{y-x}$

$\cancel{2(y-x)^2-x^2+2xy}$

$\cancel{t}$ $n=\frac{y}{x}$ $m=\frac{a}{x}$

$2\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}+1+2\frac{a}{x}+2\left(\frac{a}{x}\right)^2=0$

$2n^2-2n+1+2m+2m^2=0$

$2(n^2+m^2)+2(m-n)+1$

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9$

$2mb=$

$=4\,2a^{2}+6a$ $\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}ax+}$

$\frac{4}{5}ax-$

$\cancel{(m+n)(2m}$

$\frac{3}{5}ax-$ [illegible] -3

$(m-n)(2m-2n+2)+4mn+1$

$2ab=$ $(x-b)^2+(y-c)^2=$

211006731 (U170124 M1275729)

$ax-$

Черновик

$x_1 \ldots x_n$

$29x_1 = 13x_n$

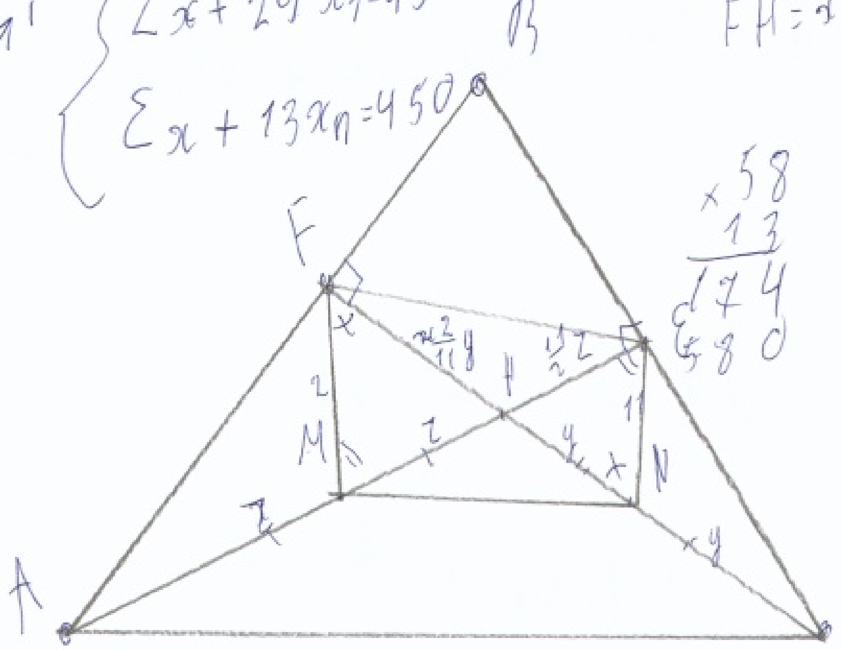
$x_1 = \frac{13}{29} x_n$

$FH = x$

x_1: $\begin{cases} \sum x + 29x_1 = 450 \\ \sum x + 13x_n = 450 \end{cases}$

$x_n = 29$

$x_1 = 13$

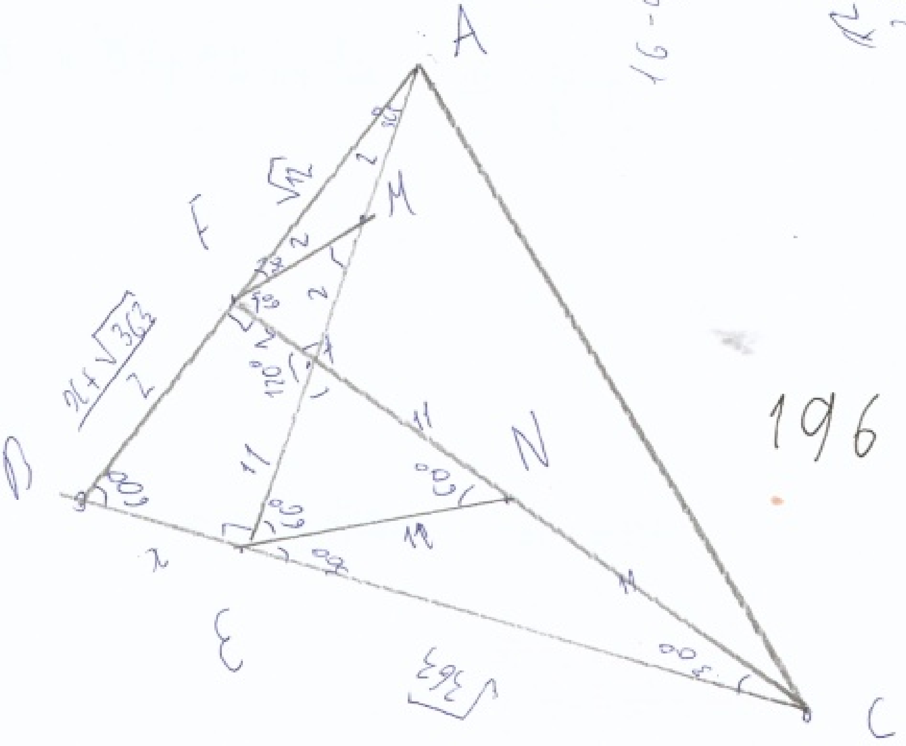


$\frac{2}{11} = \frac{x}{y}$

$58 \times 13 = 174 + 580$

$29 \times 13 = 87 + 290 = 377$

$450 - 377 = 73$



196

363 + 225

588

211006731 (U170124 M1275729)

Черновик

№3

т. A $(x-y)^2+y^2+2ax+2a^2=0$

$a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

$ax(ax-2a^2-6a$

$ay(ay-2a$ a x

$(ay-a)^2$

$(ay-a)^2=a^2+6ax+2a^3x-a^4-9-a^2x^2$

a

$(ay-a)^2+(ax-a^2)=$

211006731 (U170124 M1275729)

x $\cancel{3z+9x}$ $2a^2+8a+16-8y+2y^2=0$

Черновик

$-x^2+x^2$

$(y-x)^2+y^2+2ax+a^2=0$

$(y-x)^2+(x+a)^2+y^2-x^2$

$(y-x)(\cancel{+}2y=-(x+a)^2$

$\cancel{y \quad 2y}$

$(2y+x+2a)(y\pm a$

$2y \quad x \quad a \qquad y \quad x \quad 2a$

a^2

$\cancel{a^2}$

x

211006731 (U170124 M1275729)

$2a^2+$

Чистовик №3

$a^2x^2 + a^2 y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$

$(ax - (a^2+3))^2 = a^2x^2 - 2a^3x - 6ax + a^4 + 9 + 6a^2$

$(ax - (a^2+3))^2 - 6a^2 + a^2y^2 - 2a^2y = 0$

$(ax - (a^2+3))^2 + (ay - a)^2 - 7a^2 = 0$

$(ax - (a^2+3))^2 + (ay - a)^2 = (\sqrt{7}a)^2$

$\Downarrow$

это окр с ц вт с коор. $\left(\frac{a^2+3}{a}; 1\right)$

I случ $x<4$

Расс-м при каких a ~~то~~ при $x<4$ ($x=4-k$; $k>0$) - $y \in \varnothing$ в I-ой ур-нии т.е т A - справа ~~от~~ от прям $x=4$ всегда

Под-м ~~вместо~~ $x=4-k$

$16 - 8k + k^2 + 8a - 2ka + 2a^2 - 8y + 2ky + 2y^2 = 0$

$y \in \varnothing \Leftrightarrow D<0$ при люб. k

$4k^2 + 64 - 32k < 8a^2 - 8ka + 32a + 4k^2 - 32k + 16$

$8a^2 - 8ka + 32a > 48$ => ~~при люб a - найдется~~

=> при $k = a+4$ - $8a^2 - 8ka + 32a = 0 < 48$ - неуд => $a \in \varnothing$

II случ аналогич, но расс-м при каких a и $x>4$ - $y \in \varnothing$ т.е т A слева Под-м $x=4-k$; ($k<0$) после аналог действий

$\underbrace{8a^2 - 8ka + 32a > 48}_{\text{т.к } k<0 \Rightarrow}$ | $-8ka > 32a + 8a^2$ и $8a^2 - 8ka + 32a < 0$ - неуд

~~мин зна~~ Если $a<0$ то при бесконеч. большая k

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006731**

ID профиля: **170124**

Вариант 14

Чистовик

№14 т.к ~~$x=0$ и $y=0$ – не корень~~ Введем замену $a=x^2$, $b=y^2$

~~$x^4+y^4-x^2y^2=37$~~

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \ (2) \end{cases} \quad \cancel{a(7-3b)=7-7b} \quad \cancel{a=\frac{7-7b}{7-3b}} \ (1)$$

Введем замену $a+b=n$, $ab=m$

(1) в (2) $\cancel{(7-7b)^2+b^2(7-3b)^2-(7-3b)^2b=37}$

$$\begin{cases} 7n-3m=7 \ (2) \\ n^2-3m=37 \ (1) \end{cases} \quad (1)-(2) \quad n^2-7n-30=0$$

$D=169$

$$\left[\begin{array}{l} n=+10 \\ n=-3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=+10 \\ m=21 \end{cases} \\ \begin{cases} n=-3 \\ m=-\frac{28}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=10 \\ ab=21 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-3 \\ ab=-\frac{28}{3} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=10 \quad x^2=10-y^2 \\ x^2y^2=21 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=-3 \\ x^2y^2=-\frac{28}{3} \end{cases} \text{– неуд т.к } x^2+y^2\geq 0 \end{array}\right.$$

$10y^2-y^4=21$

$D=16$

$b^2-10b+21=0$

$$\left[\begin{array}{l} y^2=\cancel{\sqrt{7}}\ 7 \\ y^2=\cancel{\sqrt{3}}\ 3 \end{array}\right.$$

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\sqrt{7} \\ x=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{3} \\ x=\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right.} \quad \cancel{\begin{cases} y=\pm\sqrt{7} \end{cases}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\sqrt{7} \\ x=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{7} \\ x=\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{7} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{7} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{3} \\ x=\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\pm\sqrt{7} \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Чистовик

№25

I случ он вытягивает два дубля т.к дублей всего 15 =>

=> это можно сделать $\frac{15 \cdot 14}{2}$ спос т.к порядок не важен

II случ он вытягивает дубль и недубль

недублей - всего 210 и т.к на кажд недубле - 2 числа =>

=> после его вытягивания по правилам нам запрещенно

вытягивать 2 дубля с этими числами => ост. дублей - 13 =>

=> спос. $210 \cdot 13$ (не делаем на 2 т.к дубли и не дубли - разн. карточки)

$\Downarrow$

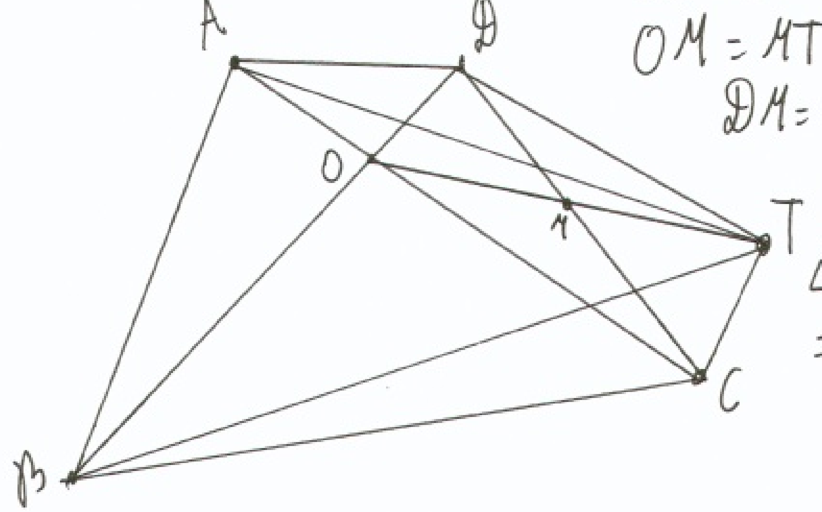
Всего способов I случ + II случ $= 15 \cdot 7 + 210 \cdot 13 = 2835$

Ответ. 2835

211006731 (U170124 M1275730)

Чистовик №6

Дано $\triangle AOD$ - правильный
т.е $AO = OD = AD$
$BO = OC = BC$
$OM = MT$
$DM = MC$
D-ть
$\angle TAB = \angle ABT =$
$= \angle ATB$



т.к признак пара-мма: диаг. т. пересечения дел-ся пополам =>
=> $ODTC$ - ▱ $DT \parallel OC$; $DT = OC$; $TC \parallel OD$; $TC = OD$ =>
=> $TC = OD = OA = AD$; $DT = OC = OB = BC$; $TC \parallel OD \parallel BD$ (BOD - прям.)
аналогич $DT \parallel AC$ => $ADTC$ и $BDTC$ - равнобед. ⏢ =>
=> их можно вписать в окр.; но т.к ч/з 3 точки можно провести единст. окр => $ADTCB$ - лежат на одной окр. =>
=> т.к ~~раз~~ по св-ву окр. $\angle ACD = \angle TAC$ (равн. хорды ограничи равн. дуги) (1)
$\angle DCT = \angle BAC$ аналогич. $\angle ABD = \angle ACD$; $\angle DBT = \angle DCT$ => $\angle BAT = \angle ABT =$
$= \angle ACT$ ~~по пр-ку биссектрисы~~ ⏢ $\angle BOC = \angle OCT = \angle ACT$ (как х леж $\{DB \parallel CT\}$ $= 60^\circ$ => $\angle TAB = \angle ABT = 60^\circ$ - уд => $\triangle BAT$ равносторонний (по $\Sigma \angle$ в $\triangle$ $\angle ATB = 60^\circ$) => $AT = TB = AB$

211006731 (U170124 M1275730)

Чистовик №6

Теорема 1 S_Δ с равными $\angle$ относ. как произ. сторон огранич. этим $\angle$

из (1) $\Rightarrow \angle ABD = \angle TBC = \angle ATD$

Доп. Дано
$BC=3$; $AD=4$

$$\frac{S_{ABO}}{S_{TBC}} = \frac{AB\cdot OB}{TB\cdot BC}, \quad \frac{S_{TBC}}{S_{ATD}} = \frac{TB\cdot BC}{AT\cdot DT}$$ из ранее доказ. $\Rightarrow 1 : 1 : 1 \Rightarrow S_\Delta ABO = S_\Delta TBC = S_\Delta ATD = 2S$

по Теореме 1 т.к $\angle AOB = \angle DOC$ как х леж $\Rightarrow S_{DOC} = 2S$

Теорема 2. S_Δ с общ. верш. и противоположными сторонами леж. на одной прям. относ как длины этих сторон

по Теореме 2 $S_\Delta ODM = S_\Delta OMC = S_{DMT} = S_\Delta TMC = S$ по

по Теореме 1. т.к $\angle ACT = \angle OCB = 60^\circ \Rightarrow \frac{S_\Delta BCO}{S_{OCT}} = \frac{OC\cdot BC}{OC\cdot CT} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$S_{OCT} = S_{COM} + S_{MCT} = 2S$, $CT = 4$

$\Rightarrow S_\Delta BOC = \frac{3}{2}S$

по Теореме 1.

$S_\Delta AOD = \frac{16}{9} S_\Delta BOC = \frac{8}{3}S \Rightarrow S_{ADTCB} = S_\Delta AOD + S_\Delta BOC + S_\Delta BOA + S_{DOCT} = \frac{8}{3}S + \frac{3}{2}S + 2S + 4S = \frac{25}{6}S + 6S = 10\frac{1}{6}S$

$S_{DOCT} = S_{DOM} + S_{OMC} + S_{MTC} + S_{MDT}$

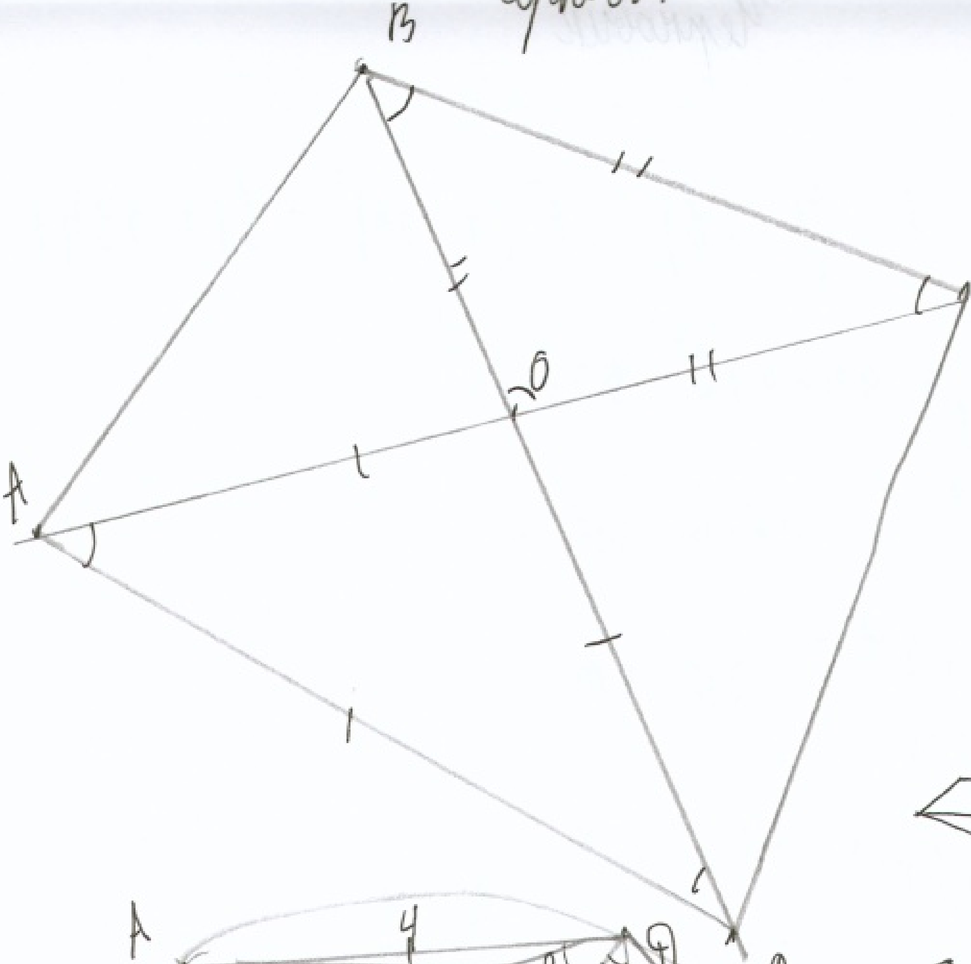
$S_\Delta ATB = S_{ADTCB} - S_\Delta ATD - S_\Delta TBC = 10\frac{1}{6}S - 4S = 6\frac{1}{6}S$

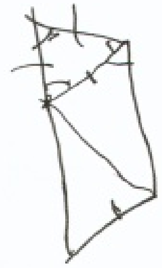
$S_{ABCD} = S_{ADTCB} - S_{DTC} = 8\frac{1}{6}S \Rightarrow \boxed{\frac{S_\Delta ATB}{S_{ABCD}} = \frac{37}{49}}$

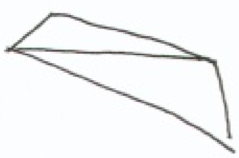
$S_{DTC} = S_{DTM} + S_{TCM}$

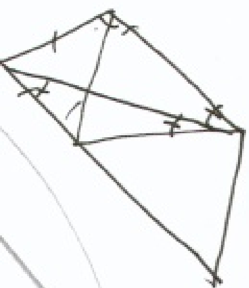
Ответ $\frac{37}{49}$

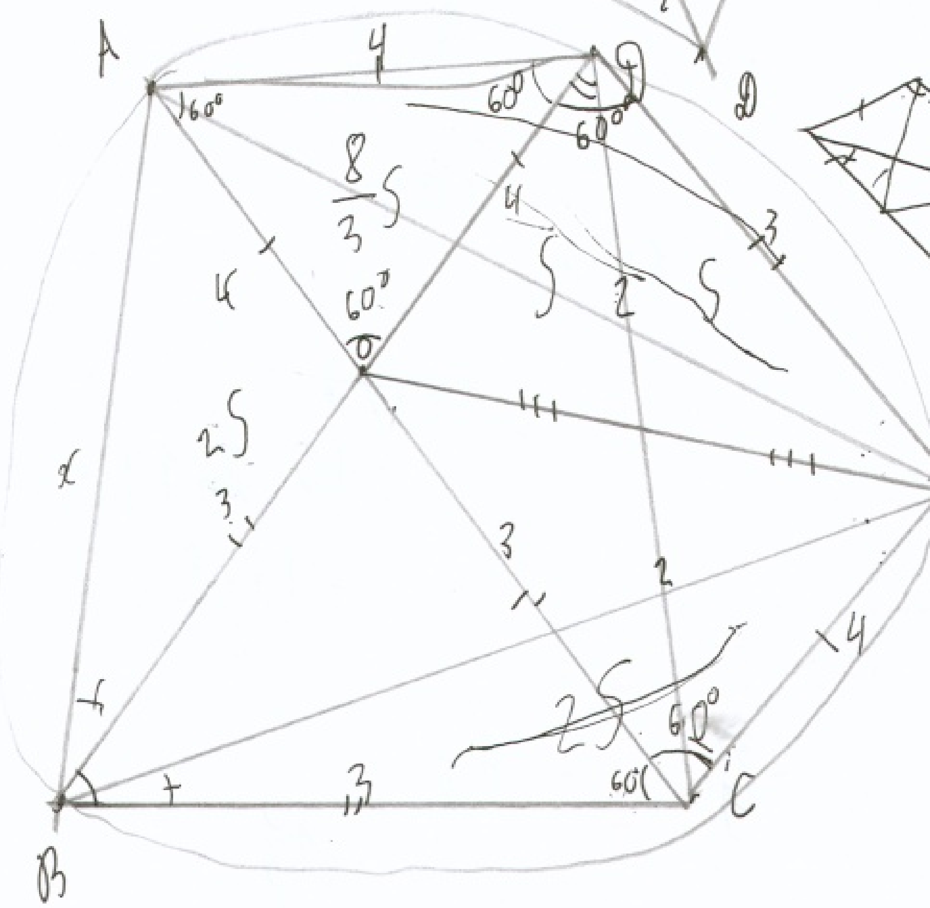
211006731 (U170124 M1275730)











25.4

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\,25 \\ \hline 61 \end{array}$$

Черновик

7 $(7-7b)^2+b^2(7-3b)^2-b(7-7b)(7-3b)=37$

$7x^2+7y^2-49+49b^2-98b+$

$-3x^2y^2=7$ $ab=m$ $a+b=n$

$49+21-$ $7n-3m$

-63

$49+9-21$ 15^2

$-\frac{224}{28}$

14

198

14 15

~~200~~

$210\cdot 13+$

$+\frac{15\cdot 14}{2}$

$-\frac{37}{9}$ 28

$\times\frac{15}{7}$

$\times\frac{210}{13}$

630 105

211006731 (U170124 M1275730)

210 2835

2730

Черновик

7 $(7-7b)^2+b^2(7-3b)^2-b(7-7b)(7-3b)=37$

$7x^2+7y^2-49+49b^2-98b+$

$-3x^2y^2=7$

$ab=m \quad a+b=n$

$49+21-$

-63

$7n-3m$

$49+9-21$ $\quad 15^2$

-224
28

14

198

14

150

~~200~~

$210 \cdot 13+$

$+\frac{15\cdot 14}{2}$

-37
9

28

$\times 210$
13

630

210

2730

$\times 15$
7

105

2835

~~Чистовик~~ Черновик

№2

т. к на карточках напис. числа от 1 до 15 => 7 дублей всего 15

⇓

карточку кот. явл дублем он может. выб. 15 спос. после чего карточек на кот. есть это число - 29 т.к 15 когда это число с красн. стороны, 15 с синей и -1 т.к кар-ка 15/15 в обоих случ. есть

⇓

всего способов $15 \cdot (225 - 29) = 15 \cdot 196$