Часть 1

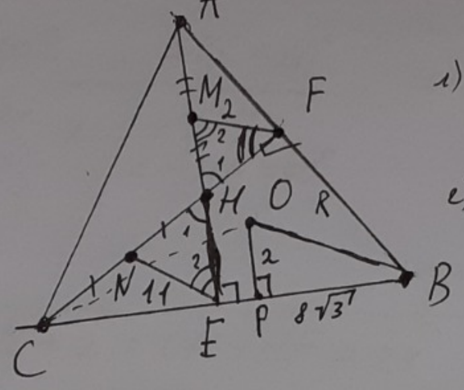
Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006692**

ID профиля: **855500**

Вариант 14

№1. Чистовик. начало.



Решение:

1) $FM \parallel NE \Rightarrow \angle NEH = \angle HMF$ (секущ. ME)

Обозн. $\angle NEH = \angle HMF = \angle 2$

2) $\angle NHE = \angle MHF$ (вертикал.)

обозн. $\angle NHE = \angle MHF = \angle 1$

3) $\triangle AHF$ - прямоугол

$\Downarrow$

его гипотенуза - ~~лежит на~~ диаметр. опис. окр. (впис. $\angle 30°$ опирается на диаметр)

$\Downarrow$

т. F лежит на окр, из точки F провели (FM) → медиану к гипотенузе (диаметру), значит она попала в центр. опис. окр. около $\triangle AHF \Rightarrow FM$ = радиус $= \frac{1}{2}$ диаметра $= \frac{1}{2}$ гипотенузы $\Rightarrow AH = 4$

$\Downarrow$ $MH = MF$ = радиусы $= 2$

$\Downarrow$ $\triangle MHF$ - р/б ($MH = MF$)

$\Downarrow$ $\angle MHF = \angle HFM$ (св-во р/б тр-ка)

! $\angle MHF = \angle 1 = \angle HFM$

4) ~~$\triangle AHF$~~ → $\triangle CHE$ - прямоугол.

EN - медиана, провед. к гипотенузе из вершины прямого угла $\Rightarrow NE = \frac{1}{2} CH =$

$= NH = CN$ (доказано в п. 3)

$\Downarrow$ $CH = 22$ $\Downarrow$ $EN = HN = NE = NH = 11$

$\Downarrow$ $\triangle NEH$ - р/б ($NE = NH$)

$\angle NEH = \angle NHE$

$\Downarrow$

$\angle 1 = \angle 2$

5) из $\triangle MFH$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 1 = 180°$, но $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \angle 1 = \frac{180°}{3}$ (по т. о сумме $\angle\triangle$)

$\angle 1 = 60° = \angle AHF$

6) $\triangle AHF$ - прямоуг. $\angle AFH = 90° \Rightarrow \angle AHF + \angle HAF = 90°$

$\Downarrow$ $\angle HAF = 30°$

в $\triangle CHE$ аналогично $\angle CEH = 90° \Rightarrow \angle HCE = 30°$

7) $\triangle CBF$ - прямоугол $\Rightarrow \angle HCB + CBA = 90°$

$\angle HCB = \angle HCE = 30°$

$\Downarrow$

$\angle ABC = 60°$

см. продолжение далее

№1. Чистовик продолжение.

Решение:

~~$\angle ABB = 60^\circ$~~ $\angle ABC = 60^\circ$

8) $HF = AC \cdot \cos\angle AHF$ $\angle AHF = 60^\circ$

$HF = 4 \cdot \frac{1}{2}$

$HF = 2$

$HE = CH \cdot \cos\angle CHE$ $\angle CHE = 60^\circ$

$HE = 22 \cdot \frac{1}{2}$

$HE = 11$

9) $CF = 11 \cdot 2 + 2 = CH + HF = 24$

$CB = \frac{CF}{\sin\angle ABC} = \frac{24 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 16 \cdot \sqrt{3}$

10) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AE \cdot CB$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16\sqrt{3}$

$S_{\Delta ABC} = 120\sqrt{3}$

H – ортоцентр. ~~по св-ву ортоцентра~~

O – центр окр., опис. около ΔABC

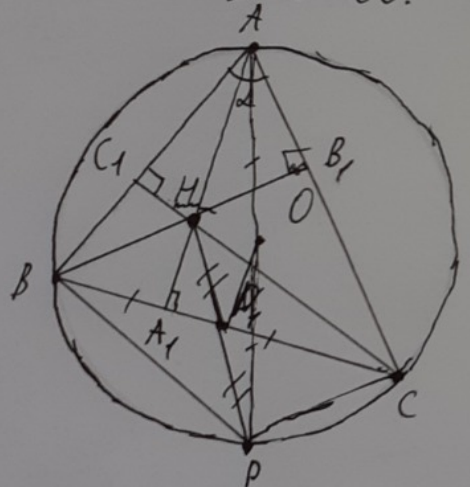
11) $OB = R$; $OP = \frac{1}{2} AH$; $PB = \frac{1}{2} CB = 8\sqrt{3}$

$R^2 = OP^2 + PB^2$ $R = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 2^2}$ $R = \sqrt{196}$ $R = 14$

$OP \perp CB$ и делит CB пополам, т.к. O лежит на сер. пер-ре к CB

по св-ву ортоцентра $OP = \frac{1}{2} AH$

Док-во:



Отразим H относительно P_1 – середины BC, $HP_1 = P_1P$, докажем, что т. P лежит на опис. около ΔABC окр.

$\angle BAC = \angle\alpha$

$\angle C_1HB_1 = \angle\beta$

в четр-ух-ке AC_1HB_1 $\alpha + \beta = 180^\circ$, т.к. $\angle C_1 = 90^\circ$ и $\angle B_1 = 90^\circ$

$\angle BHC$ – вертикал. с $\angle C_1HB_1 = \beta$

$\angle BHC = \beta$

BHCP – пар-м, т.к. диагонали BC и HP точкой пересеч. делятся пополам. (пр-к пар-ма) $\Rightarrow \angle BHC = \angle BPC = \beta$ (св-во пар-ма)

но! $\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow$ чет-ух-к ABPC – впис., т.к. сумма противополож. углов $= 180^\circ \Rightarrow$ P лежит на окр., опис. около ΔABC.

теперь $BH = BB_1 \parallel PC$ и $BB_1 \perp AC \Rightarrow PC \perp AC \Rightarrow \angle ACP$ – вис. и $= 9$

В ΔAHP OP_1 – средняя линия

$\boxed{OP_1 = \frac{1}{2} AH}$

$OP_1 = \frac{1}{2} AH$ и $OP_1 \parallel AH$

он опирается на диаметр (AP)

но $AH \perp BC \Rightarrow OP_1 \perp BC$ ч.т.д.

ответ на другом листе.

№1. Чистовик

Ответ к задаче 1.

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$

$S_{\triangle ABC} = 120\sqrt{3}$

$R_{опис.окр} = 14$

211006692 (U855500 M1275080)

Чистовик

№2.

наиб. ч. – x
наим. ч. – y
n – сумма ост. чисел.

1) $x + n + 30y = 450,$
2) $y + n + 14x = 450;$

$x + n + y + 29y = 450,$
$x + n + y + 13x = 450;$

$29y = 13x$, при $x, y \in N$ и $30y \le 450$
$14x < 450$

$\Downarrow$

$y = 13$
$x = 29$, т.к. $26 \cdot 30 > 450$, $54 \cdot 14 > 450$

$x = 29,$
$y = 13;$

$n = 450 - 30 \cdot 13 - 29$
$n = 31$, при этом n нужно представить ~~в виде~~ суммы нескольких чисел, каждое из которых > 13 и < 29 таких, что в сумме они дают $31 = n$; ну таких варианта 2:

$13; 14; 17; 29$ и $13; 15; 16; 29$ ~~без учёта след. комбинации~~
~~$13; 16; 15; 29$ и $13; 17; 14; 29$ здесь просто другой порядок, а числа те же; возможен другой порядок~~

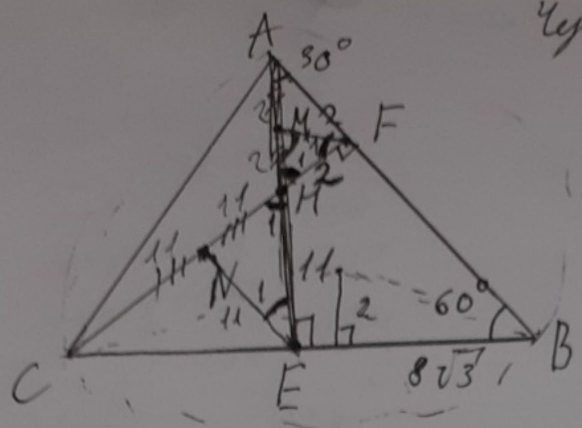
при попытке взять число, которое $r > 17$ я должен буду взять число $m = 31 - r$, что будет ≤ 13, а 13 наименьш. число, меньше него быть не может и числа различны. Брать число $m < 13$ специально нельзя по вышенаписанной причине, она подчёркнута. Ищу числа m и r в промежутке от $[14; 17]$, $m + r = 31$

Ответ:
1) $13; 14; 17; 29$. 2) $13; 15; 16; 29$.

№2. $n+\vec{x}+4$

Черновик.

N.1.



$\triangle MFH \sim \triangle NEH$

в ~~пр~~ прямоугол. тр-ке медиана $= \frac{1}{2}$ гипотенузы

1) $NH = 11 = NE \Rightarrow \angle NHE = \angle NEH$

2) $\angle NHE = \angle MHE$

3) $\angle NEH = \angle HMF$

4) $\angle MHF = \angle HFM$

$\Rightarrow \angle NHE = 60° = \frac{180}{3}$

$\angle 1 = 60°$

$\Downarrow$

$\angle ABC = 60°$

а) $\frac{EB}{AE} = ctg\,60°$

$\frac{EB}{15} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$EB = \cancel{15\sqrt{3}}\ 5\sqrt{3}$

б) $\frac{CE}{CH} = \cos 30°$

$\frac{CE}{22} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

11

$CE = 11\sqrt{3}$

$CB = CE + EB = 16\sqrt{3}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AE \cdot CB$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 15$

$S_{\triangle} = 120\sqrt{3}$

R ~~$= 2+2(+4(...$~~

$64 \cdot 3 + 4 = 196$

$\boxed{R = 14}$ по св-ву ортоцентра

211006692 (U855500 M1275080)

№2.

Черновик.

~~Hu~~ $n+x+y$

$x+n+30y=450$
$y+n+14x=450$

$x+n+y+29y=450$
$x+n+y+13x=450$

$13x=29y$

$x=29k$
$y=13k$

$13\cdot30=390$
~~13~~ ~~29~~ ~~29·14=~~ $\Rightarrow k=1$
$26\cdot30>450$

$13\cdot30+29+n=\cancel{390}\,450$

$390+29+n=450$

$419+n=450$

$n=31$

$$\begin{array}{r} 29\\ \times\ 14\\ \hline 116\\ +\ 29\ \ \\ \hline 406 \end{array}$$

$29\cdot14+13+n=450$

$n=31$

$x=29$
$y=13$
$n=31$

Ответ:

$\boxed{\begin{array}{l} 13;\ 14;\ 17;\ 29\\ 13;\ 15;\ 16;\ 29 \end{array}}$

~~13; 16; 15; 29~~

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006692**

ID профиля: **855500**

Вариант 14

Черновик.

№4.

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7, \\ x^4+y^4-x^2y^2=37; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37, \\ 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7; \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)=30$$

Замена: $x^2+y^2=a\geq 0$, т.к. $x^2\geq 0$, $y^2\geq 0$

~~$x^2y^2=b$~~

$$a^2-7a-30=0$$

$$D=49+120$$

$$D=169$$

$$a_1=\frac{7-13}{2}=-6 \text{ — не удовлетвор. усл. } a\geq 0$$

$$a_2=\frac{7+13}{2}=\underline{10}$$

$$x^2+y^2=10$$

$$\begin{cases} 7\cdot 10-3x^2y^2=7, \\ \cancel{x^4+y^4-x^2y^2=7} \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\cdot(x^2+y^2)-3\cdot x^2y^2=7, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2=21, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$$

$$x^2=\frac{21}{y^2} \qquad x^2=10-y^2;$$

$$10y^2-y^4=21$$

$$y^2=p\geq 0$$

$$-p^2+10p-21=0$$

$$D=10^2-84$$

$$D=16$$

~~$p_1=\frac{-10-16}{-2}=13$~~

~~$p_2=\frac{-10+16}{-2}=-3<0$ не удовлетвор. усл. $p\geq 0$~~

~~$y=\pm\sqrt{13}$~~

~~$x=\pm\sqrt{\frac{21}{13}}$~~

~~$\frac{21}{13}$~~

~~$y^2=13$; $x^2=-3$ нет~~

~~Ответ: нет решений~~

$$p_1=\frac{-10-4}{-2}=7$$

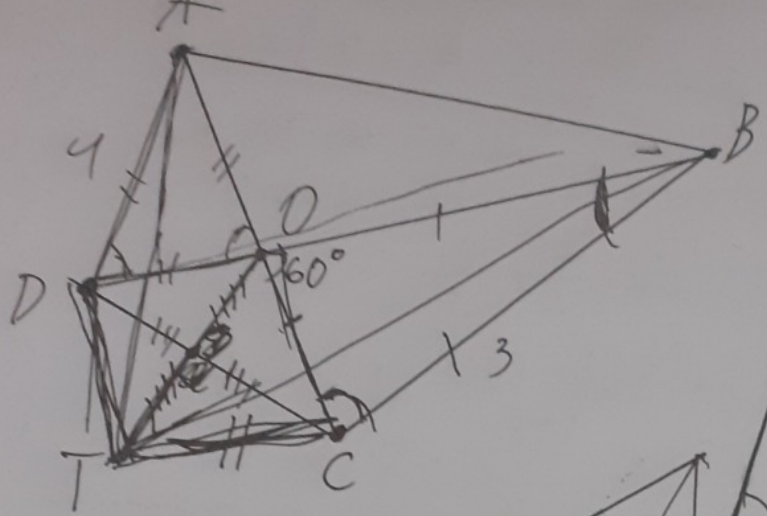
$$p_2=\frac{-10+4}{-2}=3$$

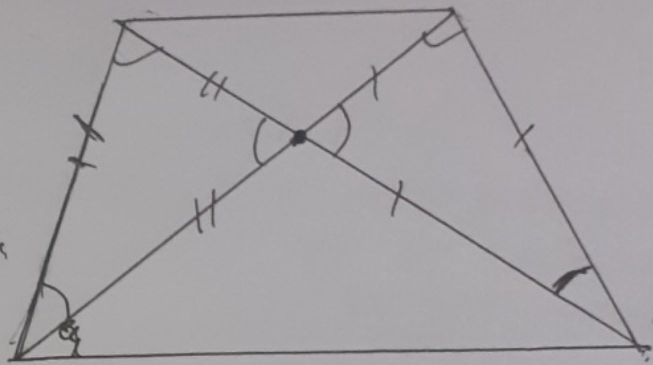
Ответ: $y_1=\sqrt{7}$; $x_1=\sqrt{3}$

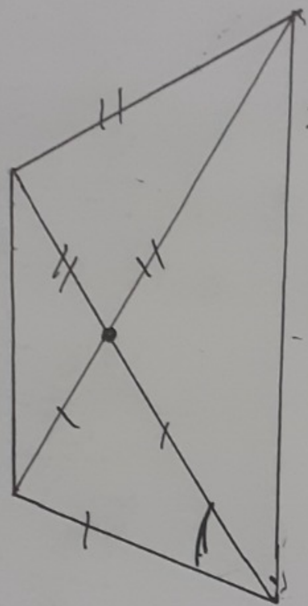
$y_2=\sqrt{3}$; $x_2=\sqrt{7}$

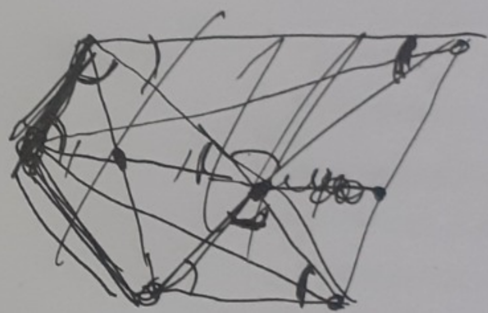
211006692 (U855500 M1275081)

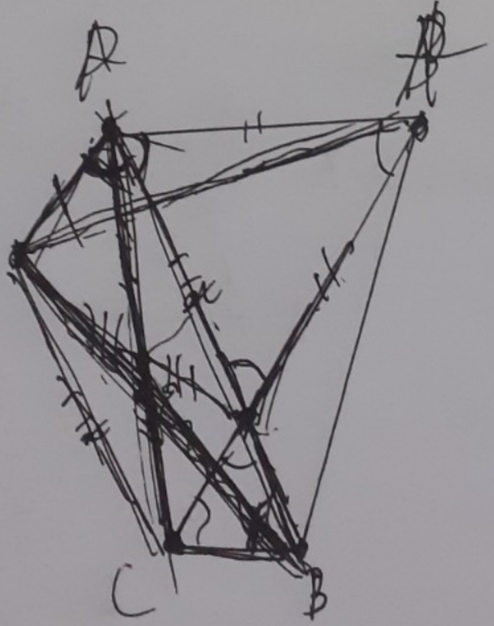
N.6. Черновик.











211006692 (U855500 M1275081)

№.6.

№.4. Чистовик.

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7, \\ x^4+y^4-x^2y^2=37; \end{cases} \quad \begin{cases} 7(x^2+y^2)-3x^2y^2=7, \\ (x^2+y^2)^2-3x^2y^2=37; \end{cases}$$

$x^2+y^2=a \geq 0$, т.к. $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$

$$-\begin{cases} 7a-3x^2y^2=7, \\ a^2-3x^2y^2=37; \end{cases}$$

$a^2-7a=30$

$D=b^2-4ac$

$D=169$

$a_1=10$

$a_2=-3$ - не подходит, т.к. <0

$$\begin{cases} 7a-3x^2y^2=7, \\ a=10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2=21, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2=21, \\ x^2=10-y^2; \end{cases}$$

$10y^2-y^4=21$ Замена $y^2=p$

$D=b^2-4ac$

$D=16$

$p_1=7 \Rightarrow y_1=\pm\sqrt{7}$; $x_1=\pm\sqrt{3}$

$p_2=3 \Rightarrow y_2=\pm\sqrt{3}$; $x_2=\pm\sqrt{7}$

Ответ:

1) $x_1=\pm\sqrt{3}$; $y_1=\pm\sqrt{7}$

2) $x_2=\pm\sqrt{7}$; $y_2=\pm\sqrt{3}$

211006692 (U855500 M1275081)

$-3x^2y^2=7,$
$3x^2y^2=37;$

$a \geqslant$

$-3x^2$

$10)$

x^2y

$^2y^2$

$=10$

Отв

№5. Чистовик.

Фокусник может вытащить 1 из 15 дублей, а оставшуюся карточку ему нужно будет вытащить так, чтобы на ней не было числа с дубля, т.е. на оставшихся карточках ~~будет~~ ~~два из~~ будут оставшиеся из 14 карточек

1) шаг дубль. др.

15 сп. X

~~$X=14\cdot14$~~ сторона а др. карточка сторона в

14 чисел 14 чисел

(к каждому из 14 чисел стороны а можно подобрать еще 14 чисел на стороне в), стороны а и в разные, значит осталось $14\cdot14$ др. карточек (число 14 на стороне а и число 14 на стороне в – разные вещи)

Всего сп. $15\cdot14^2-(1+2+3+4+5+\ldots+14)$

$2940-105=2835$

$\frac{1+14}{2}\cdot14$

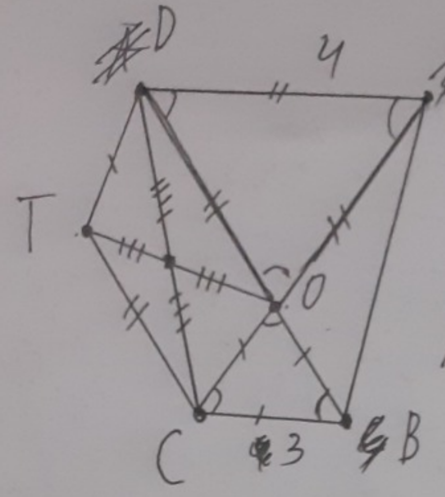
$15\cdot7=105$

$196\times15=980+196=2940$

Ответ: всего 2835 сп.

211006692 (U855500 M1275081)

№6. Чистовик. начало.



Решение:

1) Докажу, что ABCD – р/б трапеция

Дано, что $\triangle ADO$ и $\triangle CBO$ – р/с

⇓

их углы $= 60°$ (св-во р/с $\triangle$) и $AO = OD = AD = x$

и $OB = CB = CO = y$

$DB = DO + OB = x + y$

$AC = AO + CO = x + y$

$$\left.\begin{aligned} &CB \text{ – общ.} \\ &DB = AC \\ &\angle ACB = \angle DBC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle DBC = \triangle ACB \text{ (по I пр-ку)}$$

⇓

$DC = AB$

2) DOCT – пар-м, т.к. диагонали т. пересеч. делятся пополам.

⇓

$$\left.\begin{aligned} &DO \parallel TC \text{ и } DO = TC \\ &TD \parallel OC \text{ и } DT = OC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &1)\ TC \parallel DB \\ &2)\ TD \parallel AC \end{aligned}$$

$TC \parallel DB$ и $TD = CO = CB \Rightarrow TCBD$ – р/б трапеция

⇓

$DC = TB$ (как диагонали)

диагонали в р/б трапеции равны (св-во трапеции)

$TD \parallel AC$ и $TC = DO = DA \Rightarrow TCAD$ – р/б трапеция

⇓

$DC = TA$ (как диагонали)

диагонали в р/б трапеции равны (св-во трапеции; можно док-ть по I пр-ку рав-ва тр-ков)

$$\left.\begin{aligned} &1)\ DC = TA \\ &2)\ DC = TB \\ &3)\ DC = AB \end{aligned}\right\} = \triangle ATB \text{ – р/с} \quad \text{ч.т.д.}$$

продолжение на другой странице

№6. Чистовик. продолжение.

$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot h$

$h = AC \cdot \cancel{co}\ \sin 60^\circ$

$AC = OC + OA = x + y = \cancel{3+4}\ 4+3 = 7$

$S_{ABCD} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3}$

$\cancel{S_{ABC}} = S_\triangle ABT = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin 60^\circ$ (по Т. О $S_\triangle$) (т.к. ~~∠ABT~~ углы этого тр-ка = 60° и стороны равные между собой)

$S_\triangle ABT = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2$

по Т. ~~со~~ косинусов

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$

$AB^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 21 \cdot 0{,}5$

$AB^2 = 58 - 21 = 37$

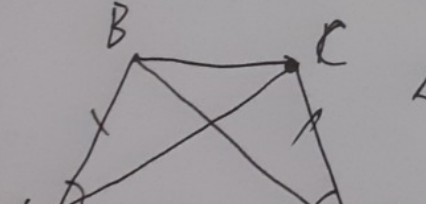
$S_{ABCD} = 49 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_\triangle ABT = 37 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$S_\triangle ABT = \frac{37}{49} S_{ABCD}$

Док-во того, что в р/б трапеции диагонали равны:
1) боковые стороны одинаковы
2) нижнее осн-е общее
3) равные углы при нижнем (выбрал) (да и при верхнем осн - выш св-во р/б трапеции)

по I пр-ку ~~такие~~ $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ будут равны



Ответ: $\frac{37}{49}$