Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006688**

ID профиля: **343577**

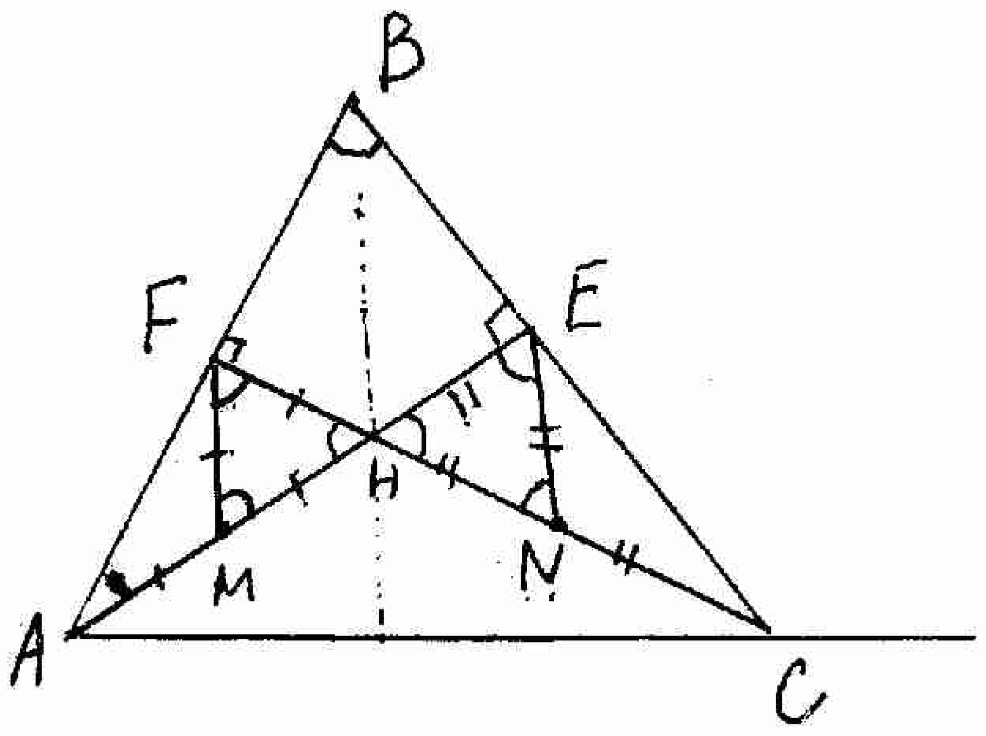
Вариант 14

Чистовик (1)

Дано: $\triangle ABC$ - остроуг, AE, CF - высоты, $AE \cap CF = H$, M, N - середины AH, CH соотв-но, $FM = 2$, $EN = 11$, $FM \parallel EN$, $\omega(O; R)$ - описана около $\triangle ABC$

Найти: $\angle ABC$, S_{ABC}, R

Решение:



1) $\triangle AFH$, $\angle F = 90^\circ$ (т.к. CF - высота), $\angle FAH + \angle AHF = 90^\circ$
$\triangle AEB$, $\angle E = 90^\circ$ (т.к. AE - высота), $\angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$
$\angle BAE$ ($\angle FAH$) - общий
сл-но $\angle ABE = \angle AHF$

$\angle AHF = \angle CHE$ как вертикальные.

2) $\triangle AFH$, $\angle F = 90^\circ$, FM - медиана сл-но $FM = \frac{1}{2} AH = AM = MH$ (как медиана, проведённая к гипотенузе); Аналогично.
$\triangle HEC$, $\angle E = 90^\circ$, EN - медиана сл-но $EN = \frac{1}{2} HC = HN = NC$.

3) $\triangle FMH$, $FM = MH$ (по п.2), значит $\angle MFH = \angle MHF$ по св-ву равнобедр. $\triangle$.
Аналогично $\triangle HNE$, $HN = NE$ (по п.2), значит $\angle NHE = \angle NEH$

4) $\angle FMH = \angle HEN$ как накрест лежащие при $FM \parallel EN$, ME - секущ.
$\angle MFH = \angle HNE$ как накрест лежащие при $FM \parallel EN$, FN - секущ.

5) $\angle MFH = \angle MHF$ (п.4)
$\angle MHF = \angle EHN$ (п.1)
$\angle EHN = \angle HEN$ (п.3)
$\angle HEN = \angle FMH$ (п.4)
~~$\angle M$~~ $\angle MFH = \angle MHF$ (п.3)
значит $\triangle MFH$, $\triangle HEN$ - правильные, сл-но $\angle ABC = \angle AHF = 60^\circ$ (п.1)

6) $AE = AM + MH + HE = 2FM + EN = 2 \cdot 2 + 11 = 15$ (п.2)

7) $\frac{AE}{BE} = tg\, ABE = tg\, 60^\circ$

$BE = \frac{AE}{tg\, 60^\circ} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

8) $\frac{EC}{EH} = tg\, EHC = tg\, 60^\circ$

$EC = EH \cdot tg\, 60^\circ = EN \cdot tg\, 60^\circ = 11\sqrt{3}$

Чистовик 2

9) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot (BE + EC) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (5\sqrt{3} + 11\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16\sqrt{3} =$

$= 15 \cdot 8\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$.

10) $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{R}$

$AB = 2BE = 10\sqrt{3}$

$BC = 16\sqrt{3}$

$\triangle AHC$ по Т. Косинусов:

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2 - 2 AH \cdot HC \cos AHC} = \sqrt{AH^2 + HC^2 - 2AH \cdot HC \cdot \cos(180 - \angle FHM)} =$

$= \sqrt{4^2 + 22^2 - 2 \cdot 4 \cdot 22 \cdot \cos 120} = \sqrt{16 + 484 + 2 \cdot 4 \cdot 22 \frac{1}{2}} = \sqrt{500 + 4 \cdot 22} =$

$= \sqrt{588} = \sqrt{4 \cdot 147} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 49} = 2 \cdot 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$

$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{S_{ABC}} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 14\sqrt{3}}{120\sqrt{3}} = \frac{10 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 3}{120} = 56$

Ответ: 60°, $120\sqrt{3}$; 56

$\sqrt{2}$

Пусть a - наименьшее число, z - наибольшее число, n - сумма остальных чисел, тогда

$30a + z + n = 450$,

$a + n + 14z = 450$

приравняем выражения и получим зависимость z от a

$30a + z = a + 14z$

$29a = 13z$

$z = \frac{29}{13} a$

для того чтобы $z \in \mathbb{N}$ нужно, чтобы $a \vdots 13$

1. при $a = 13$, $z = 29$ подставим

$30 \cdot 13 + 29 + n = 450$ и $13 + 14 \cdot 29 + n = 450$

$390 + 29 + n = 450$ | $13 + 406 + n = 450$

$419 + n = 450$ | $419 + n = 450$

Чистовик 3

для $a=13$, $z=29$ можно составить ряд чисел, в этом случае остальных чисел не более 2х т.к $\frac{31}{3}=10\frac{1}{3}$, это меньше чем значение $a=13$ - наименьшего в ряду

возможные последовательности - 13 14 17 29;

13 15 16 29

2) при $a=26$

$30\cdot 26+29+n=450$

$780+29+n=450$

$809+n=450$

$n=-359$

сумма натуральных чисел не может быть отрицательной

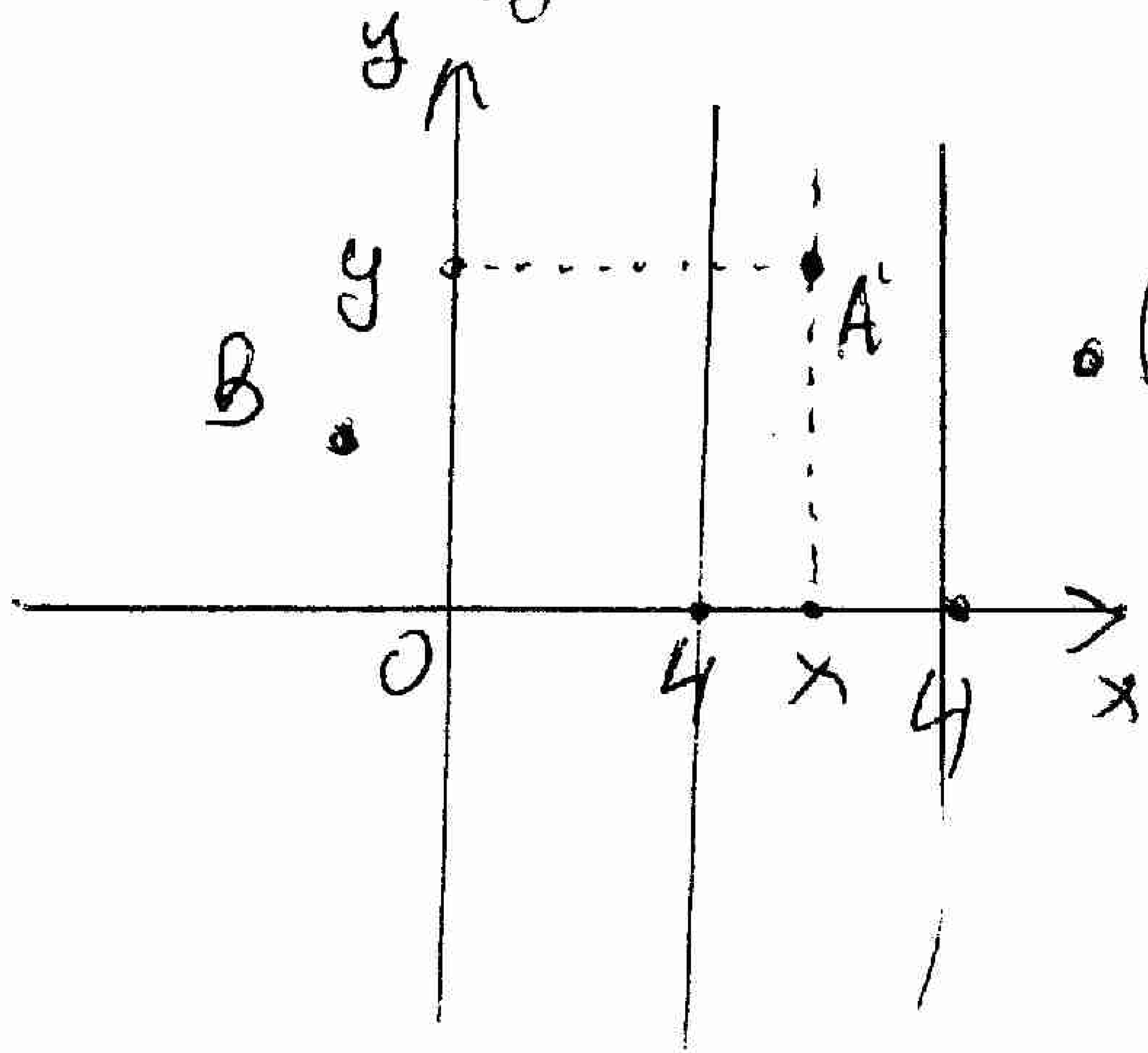
значет

Черновик

$31 = 14 + \cancel{1}17$

$31 = 15 + 16$

$$\begin{array}{r} 31 \\ -\ 14 \\ \hline 16 \end{array}$$



$2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9$

$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9$

$x(a^2x - 2a^3 - 6a) + y(a^2y - 2a^2) + a^4 + 9 = 0$

$(x - \cdot)^2 + (y - \cdot)^2 = \cdot^2$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 14 \\ \hline 116 \\ 29 \\ \hline 406 \end{array}$$

$2a^3x + 6ax + 2a^2y - a^2x^2 - a^2y^2 = a^4 + 9$

$30a + n + \frac{29}{13}a = 450$

$a \ldots \frac{a}{z} + n + 14\frac{29}{13}a = 450$

$30a + n + z = 450$

$a + n + 14z = 450$

$$\begin{array}{r} 809 \\ -\ 450 \\ \hline 359 \end{array}$$

$30a + z = a + 14z$

$29a = 13z$

$z = \frac{29}{13}a = 2\frac{3}{13}a$

$13 \qquad 29$

$13 + n + 14 \cdot 29 = 450$

$n + 13 + 406 = 450$

$n + 419 = 450$

$30 \cdot 13 + n + 29 = 450$

$390 + n + 29 = 450$

$419 + n = 450$ …

$n = 450 - 419 = 50 - 19 = 31$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\ 3 \\ \hline 78 \end{array}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

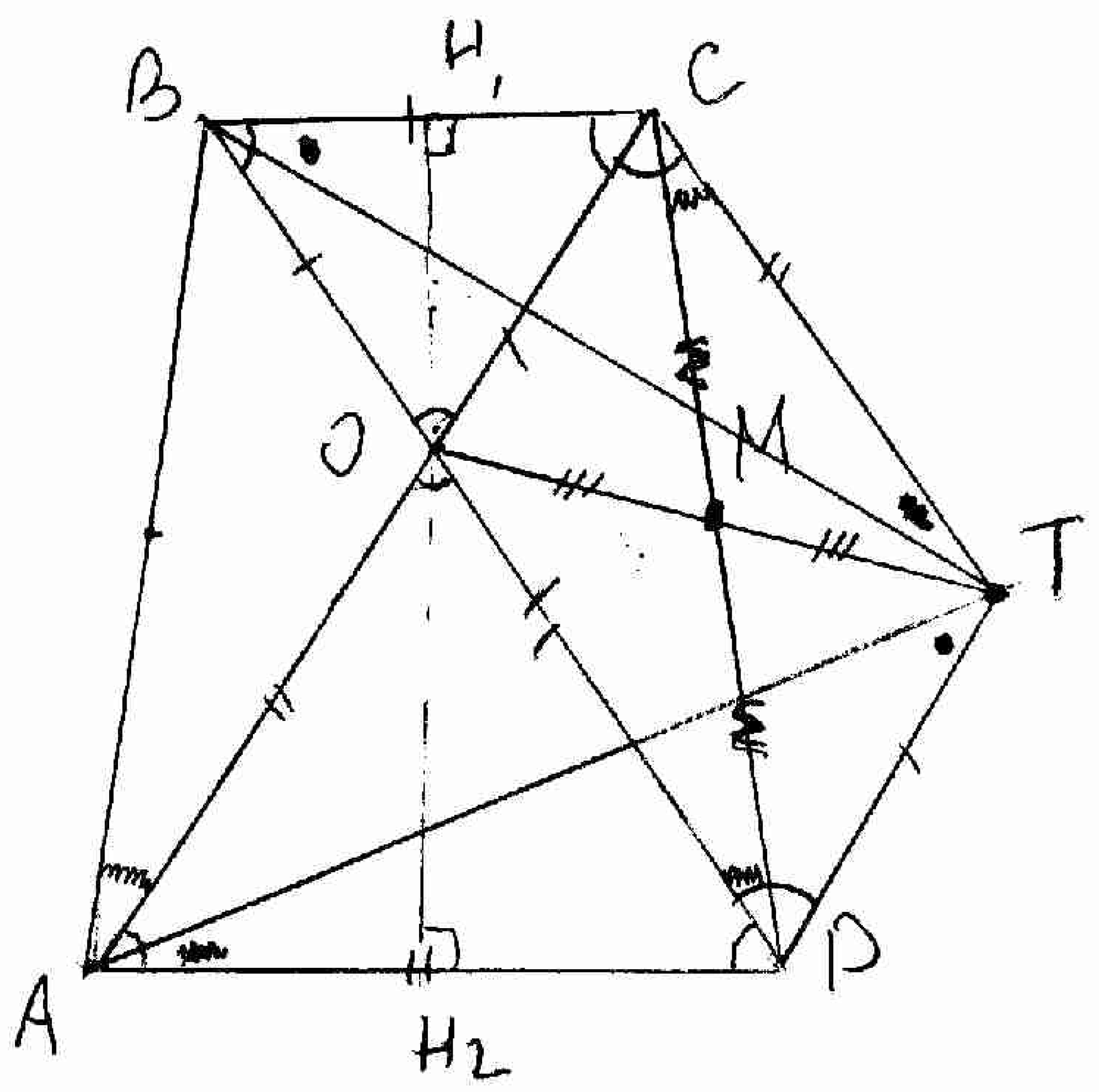
Шифр: **211006688**

ID профиля: **343577**

Вариант 14

Чистовик ①

№6



Дано: $ABCD$ - 4х-уг-ник, $AC \cap BD = O$; $\triangle BOC$, $\triangle AOD$ - правильные; M - середина CD

T симметрична относительно M

$BC = 3$, $AD = 4$

а) Док-ть: $\triangle ABT$ - правильный

б) Найти: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$

а) Док-во:

1) $\angle BCO = \angle OAD = 60°$ - накрест лежащие при BC, AD, AC - секущей, значит $BC \parallel AD$

$\triangle ABC = \triangle DCB$ по I признаку ($\angle BCA = \angle CBD = 60°$, BC - общая; $AC = OC + AO = BO + OD = BD$), значит $AB = CD$

2) $OCTD$ - парм (т.к. $CD \cap OT = M$, $CM = MD$, $OM = MT$) по признаку пар-ма.

$\angle ODT = \angle OCT = 180° - \angle COD = \angle BOC = 60°$
(по св-ву пар-ма) (смежные)

3) $\triangle BCT = \triangle TDA$ по I-му признаку ($\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60 + 60 = 120$,
$\angle TDA = \angle ADO + \angle ODT = 60° + 60° = 120°$; $DT = CO = BC$ (по св-ву пар-ма); $CT = OD = AD$ (по св-ву пар-ма))

Значит $\angle ATD = \angle TBC$; $\angle CTB = \angle DAT$; $BT = TA$ как соотв эл-ты равных $\triangle$

4) $\angle ABC + \angle BAD = 180°$ как односторонние при $BC \parallel AD$, AB - секущей.

$\angle ABC + \angle BCT + \angle CTD + \angle TDA + \angle DAB = 540°$

$180° + 120° + 120° + \angle CTD = 540°$

$\angle CTD = 120°$

$\angle CTD = \angle CTB + \angle BTA + \angle ATD = \angle BTA + (\angle ATD + \angle TAD) = \angle BTA + (180° - \angle TDA) =$
$= \angle BTA + 180° - 120° = \angle BTA + 60°$

$\angle BTA = \angle CTD - 60° = 120° - 60° = 60°$

5) $\triangle ABT$, $\angle BTA = 60°$ (п. 4), $BT = TA$ (п. 3) $\}$ $\triangle ABT$ - правильный, ч.т.д.

Чистовик 2

Б) Решение:

1) ΔBCT, $BC = 3$ (по усл), $CT = OD = AD = 4$

по св-ву пар-ми   т.к ΔAOD правильный

По Т. Косинусов:

$$BT = \sqrt{BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos\angle BCT} = \sqrt{9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120} =$$
$$= \sqrt{25 + 12} = \sqrt{37}$$

$$S_{\Delta ABT} = \frac{BT^2\sqrt{3}}{4} = \frac{37\sqrt{3}}{4} = 9{,}25\sqrt{3}$$

2) Пусть OH_1, OH_2 - высоты к BC, AD соотв-но,

т.к. $\left.\begin{matrix} OH_1 \perp BC \\ OH_2 \perp AD \\ AD \parallel BC \end{matrix}\right\}$ H_1, O, H_2 лежат на одной прямой

$$\frac{OH_1}{BH_1} = tg\angle OBH_1 = tg\,60°$$

$$OH_1 = BH_1 \cdot tg\,60° = \frac{1}{2}BC \cdot \sqrt{3} = 1{,}5\sqrt{3}$$

$$\frac{OH_2}{AH_2} = tg\angle OAH_2 = tg\,60°$$

$$OH_2 = AH_2 \cdot tg\,60° = \frac{1}{2}AD \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot H_1H_2 = \frac{7}{2} \cdot 3{,}5\sqrt{3} = 3{,}5 \cdot 3{,}5\sqrt{3} =$$
$$= 12{,}25\sqrt{3}$$

3) $$\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{9{,}25\sqrt{3}}{12{,}25\sqrt{3}} = \frac{37}{49}$$

Ответ: $\frac{37}{49}$

Чистовик (3)

№4

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

Замена 1: $x^2=t$, $y^2=f$; $t\geq 0$, $f\geq 0$

$$\begin{cases} 7t+7f-3tf=7 \\ t^2+f^2-tf=37 \end{cases}$$

Замена 2: $t+f=a$, $tf=b$; $a\geq 0$, $b\geq 0$

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-2b-b=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a-3b=7 \\ a^2-3b=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-7a=30 \\ 7a-3b=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-7a-30=0 \\ 3b=7a-7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=10 \\ a=-3 \end{array}\right. \text{, не удов. усл. } a\geq 0 \\ b=\dfrac{7a-7}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=10 \\ b=21 \end{cases}$$

Обр. зам. 2:

$$\begin{cases} t+f=10 \\ tf=21 \end{cases}$$

Чистовик 4

$$\begin{cases} t = 10 - f \\ f(10 - f) = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 10 - f \\ f^2 - 10f + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 10 - f \\ \left[\begin{array}{l} f = 7 \\ f = 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f = 7 \\ t = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} f = 3 \\ t = 7 \end{cases} \end{array}\right.$$

Обр. зам. 1:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 7 \\ y^2 = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{7} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{7} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm\sqrt{7} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Чистовик (5)

№5

1. Для какого-либо числа на карточке существует один единственный дубль. Числа в колоде от 1 до 15, значит в ней всего 15 дублей.
2. Всего в колоде карточек с числом n — 29 (15 с „n" на одной стороне и каким-либо другим на другой; 14 с остальными ~~карточ~~ числами по одному разу)

Если одна из вытащенных карт - дубль с числом „n", то ~~в колоде~~ ~~~~ вторая должна оказаться одной из 191 карт, не содержащих это число

Черновик ~~Чистовик~~ 1

№6

$$\begin{array}{r|l} 37 & 4 \\ -36 & 9 \\ 1 & \end{array}$$

$9{,}25 = 9\frac{1}{4} = \frac{37}{4}$

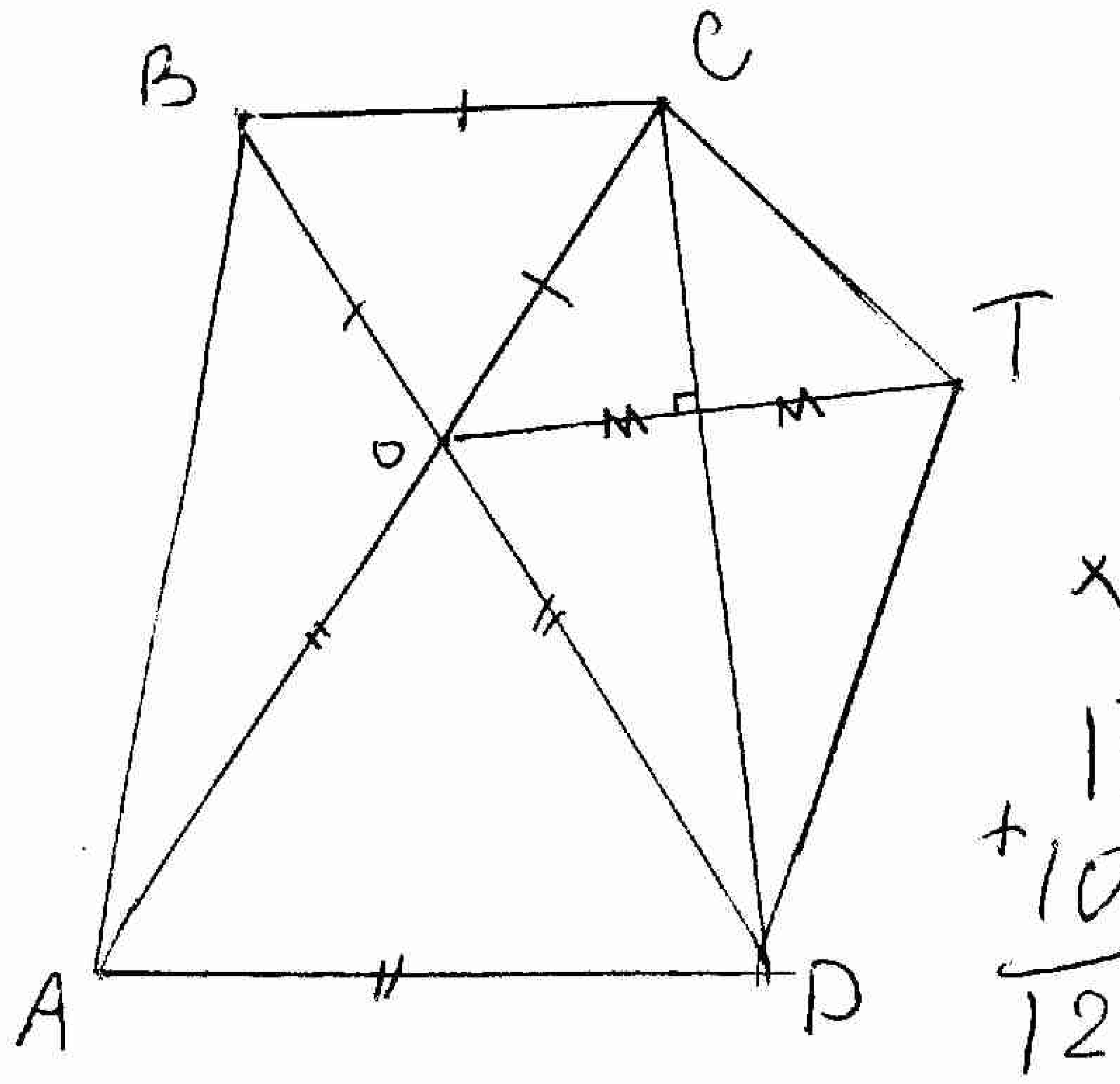
$12{,}25 = 12\frac{1}{4} = \frac{49}{4}$

$\frac{37}{4} : \frac{49}{4} = \frac{37}{49}$

Дано: ABCD - 4х-уг-ник,

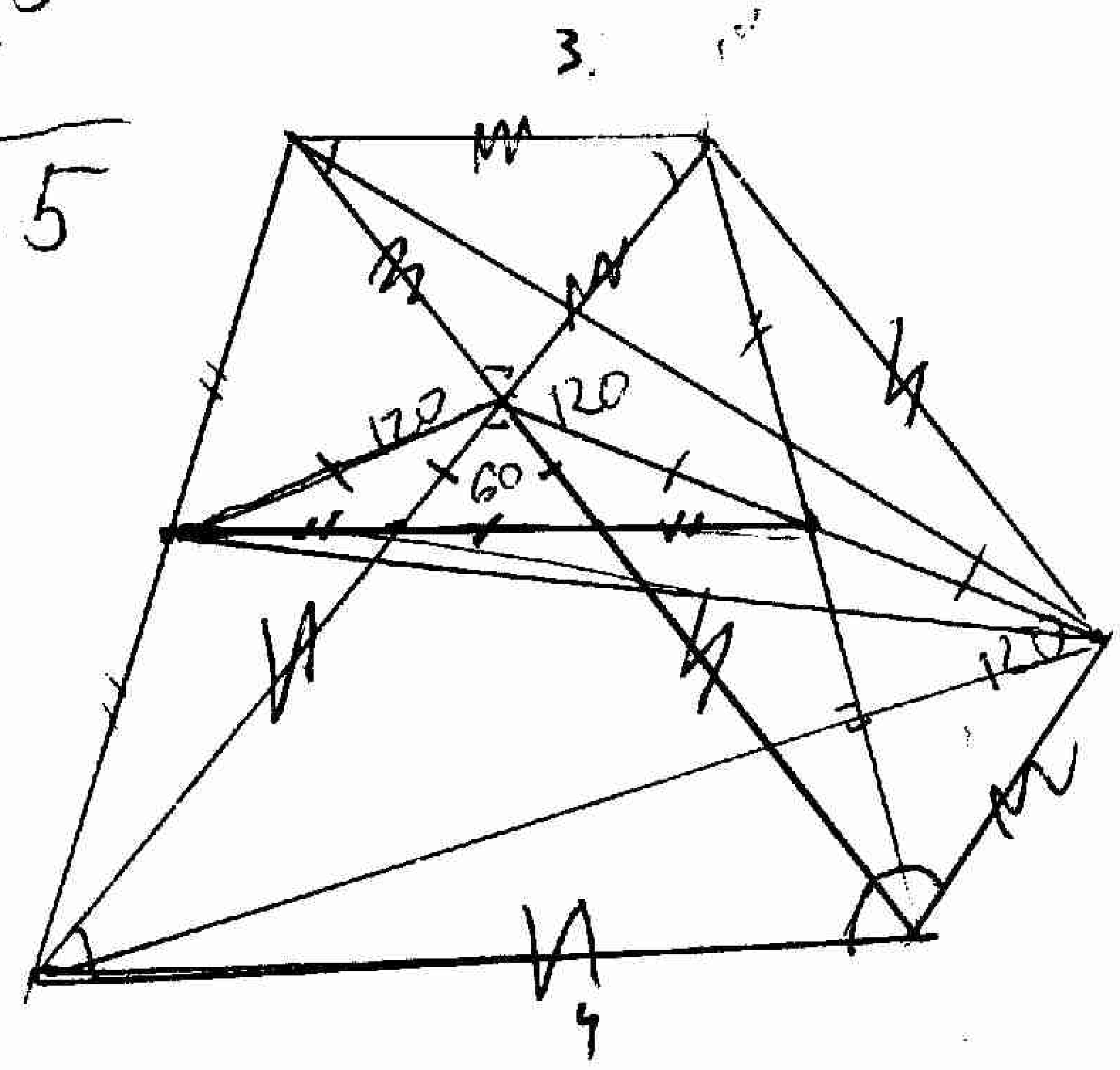
$AC \cap BD = O$ $\triangle OBC$, $\triangle AOD$ - правильные

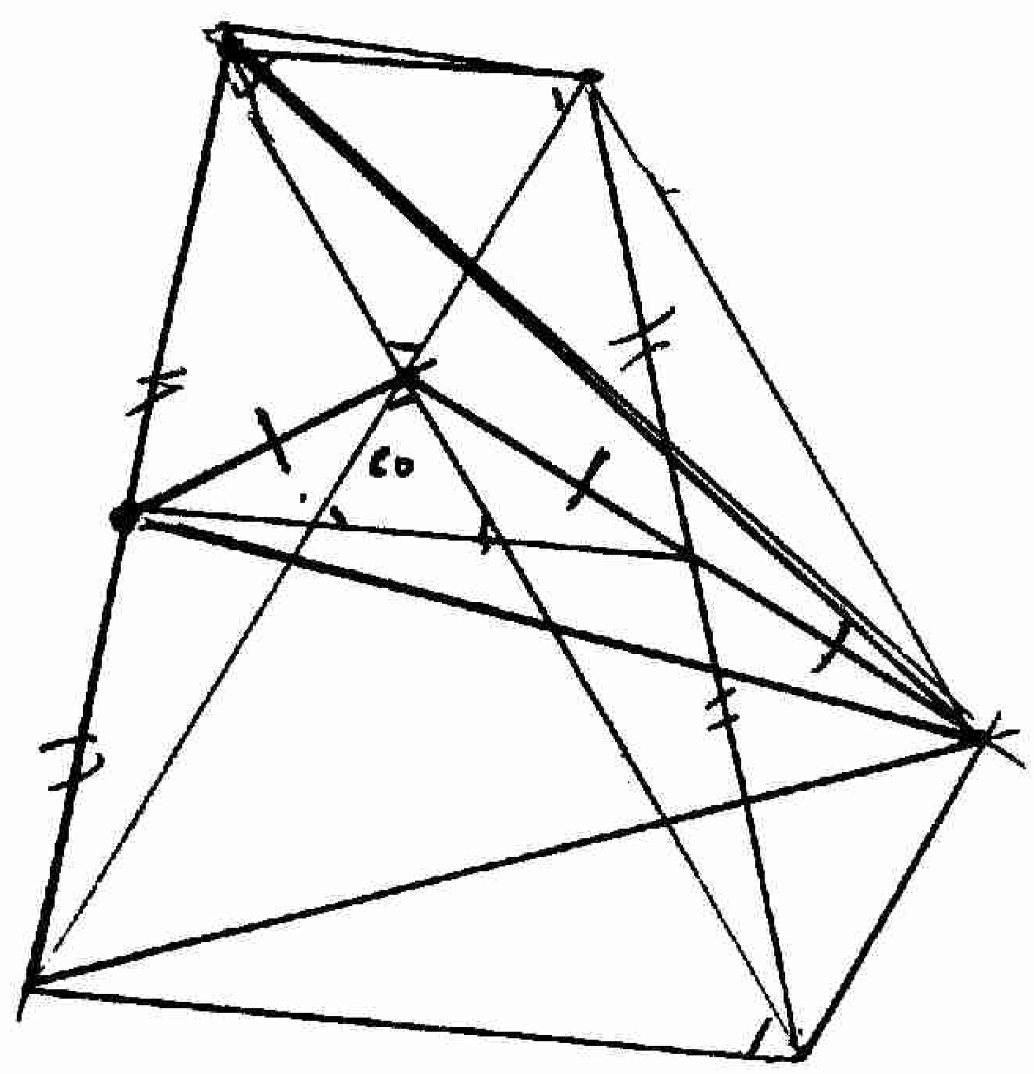
T симметрична O относительно CD

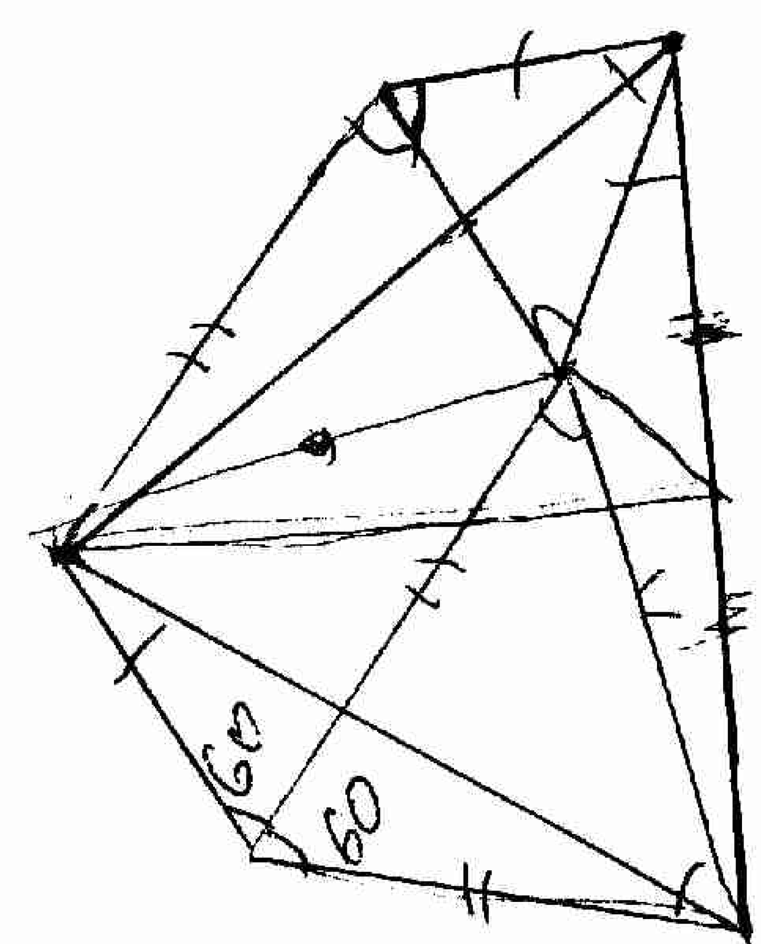


$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ +105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1225 & 35 \\ -105 & 35 \\ \hline 175 & \\ 175 & \end{array}$$







$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + n = \frac{1}{2}(a+b)$

$\frac{1}{2}a + n = \frac{1}{2}b$

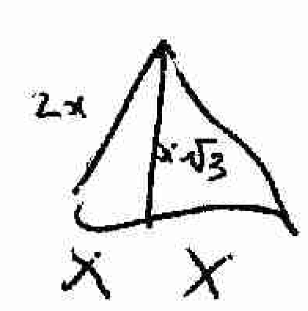
$n = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b-a)$

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 3x^2y^2 = 7 \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 37 \end{cases}$$

15

Замена: $x^2 = t$; $y^2 = f$, $t \geq 0$, $f \geq 0$

$$\begin{cases} 7t + 7f - 3tf = 7 \\ t^2 + f^2 - tf = 37 \end{cases}$$



~~$S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$~~

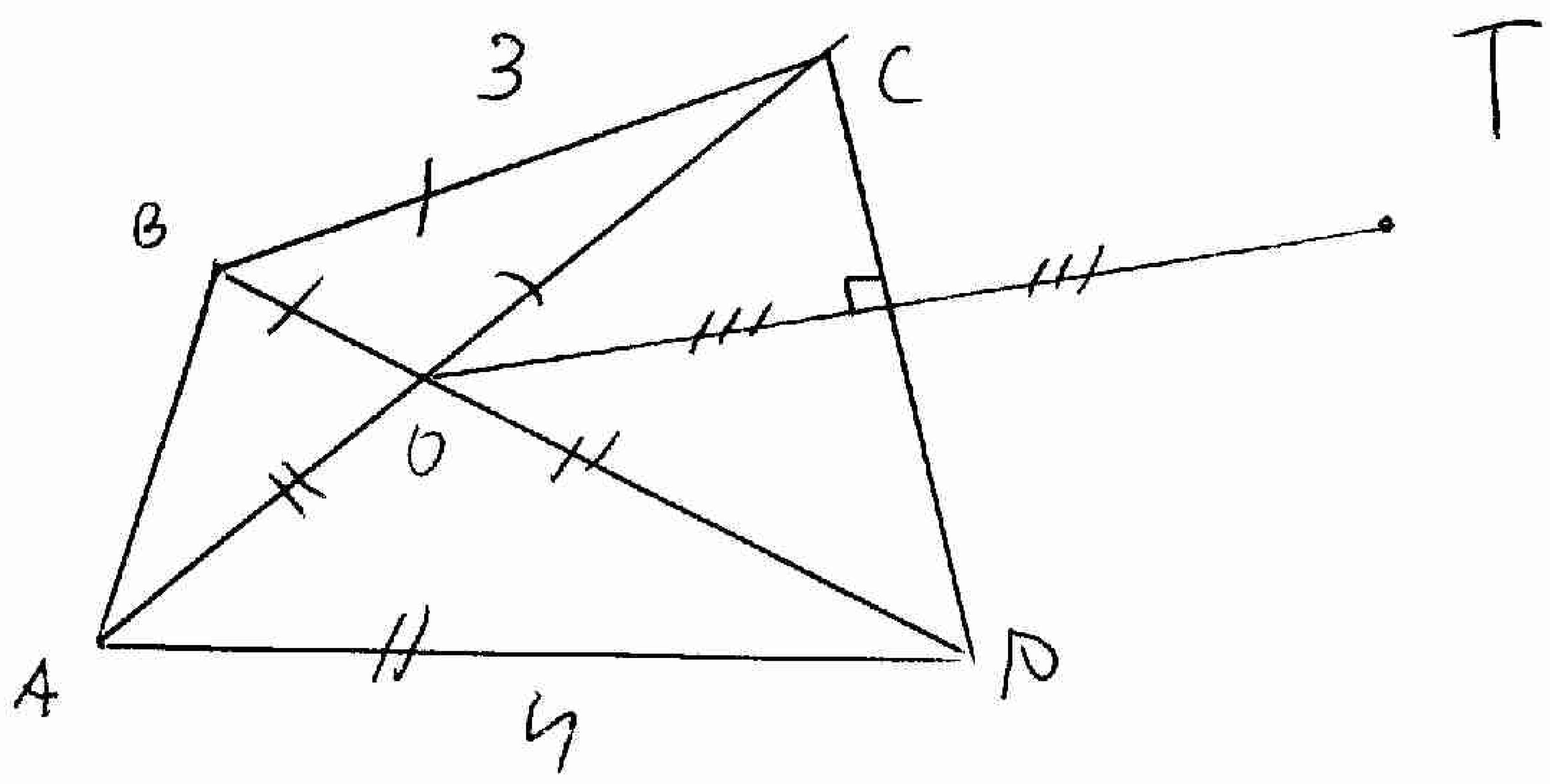
$S = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x\sqrt{3} =$

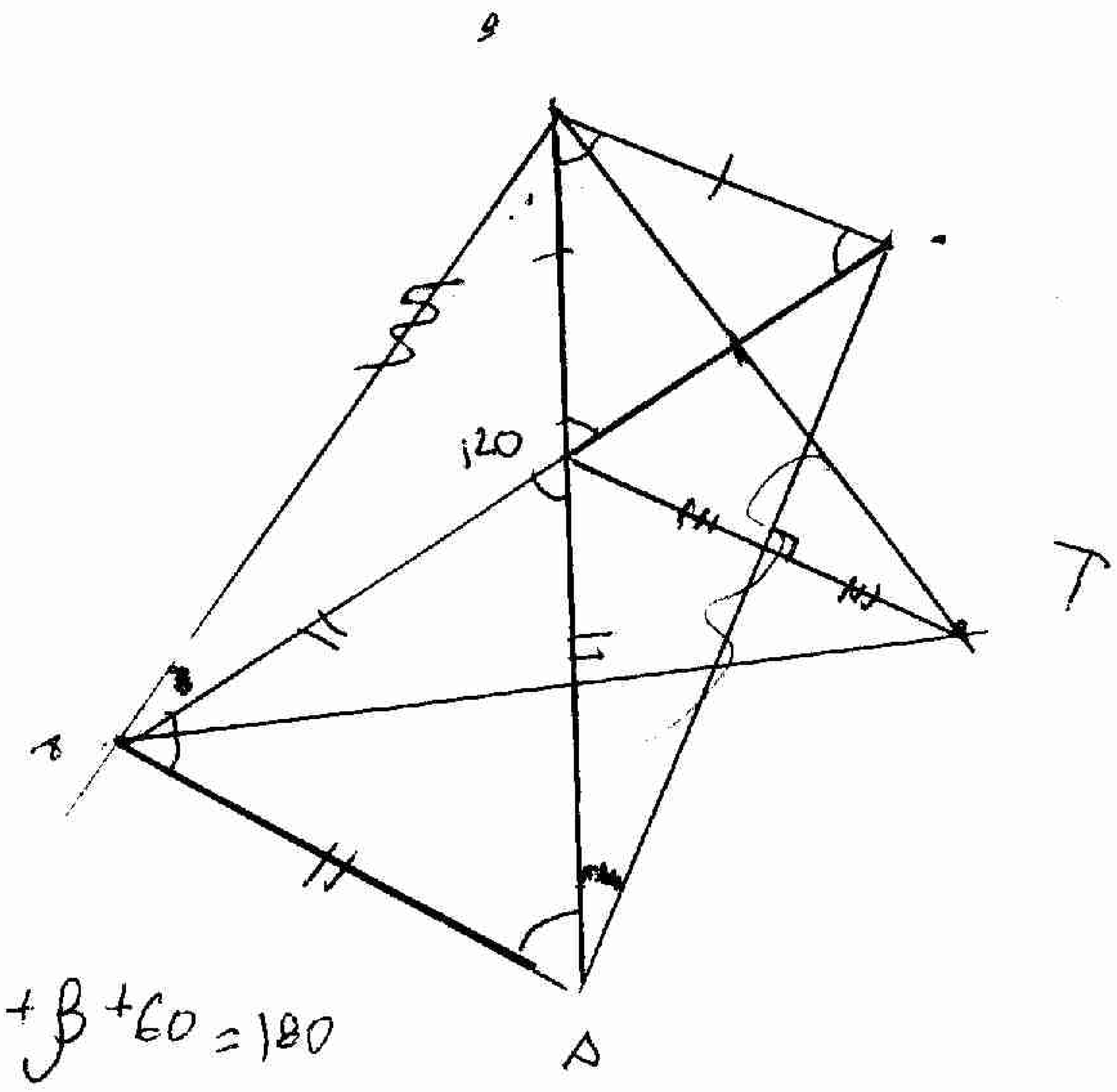
$= x^2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

~~$t^2 + f^2$~~ $- 7t - 2f + 2tf = 30$

$t^2 + f^2 + 7t + 7f - 2tf - 2tf = 44$

Черновик 2





$\alpha + 60 + \beta + 60 = 180$

$\alpha + \beta = 60$

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 3x^2y^2 = 7 \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 37 \end{cases}$$

Зам

$$\begin{cases} 7t + 7f - 3tf = 7 \\ t^2 + f^2 - tf = 37 \end{cases}$$

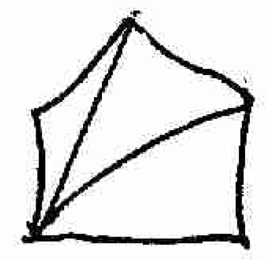
Зам: $t+f = a$; $tf = b$ $t^2+f^2 = (t+f)^2 - 2tf = a^2 - 2b$

$$\begin{cases} 7a - 3b = 7 \\ a^2 - 2b - b = 37 \end{cases}$$

$a^2 - 7a = 30$

$$\begin{array}{r} 70 \\ -\ 7 \\ \hline 63 \end{array}$$

a



~~360 = 80~~

$3 \cdot 180 = 540$