Часть 1

Олимпиада: **Математика, 9 класс (1 часть)**

Шифр: **211006603**

ID профиля: **179566**

Вариант 14

№ 2.

пусть x - колич.
y - комб.
a - сум. ост.

$\Rightarrow$ (2) $\begin{cases} 30x+y+a=450 \\ x+14y+a=450 \end{cases}$ $\begin{cases} 30x+y+a=450 \\ 29x-13y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=13 \\ y=29 \\ a=31 \end{cases}$

29 и 13 - взаимнопростые
$\Downarrow$
(1) $29x=13y$, где x и $y<450$
имеет решение только $(13;29)$

сумма чисел будет 31
числа входящие в эту сумму будут <29 и >13 (4)
рассмотрим все варианты. (заметим, что чисел ровно 2)
больше или меньше быть не может, т.к. они не будут удовлетворять (4)

(3)
14 и 17
15 и 16
16 и 15
17 и 14

Эти пары одинаковые, так как порядок не важен.

Ответ: 13, 14, 17, 29 или 13, 15, 16, 29

Других пар быть не может т.к. (1) и (2) - необходимые условия
(3) - все варианты при этом условии

№ 3.

$A=\{x;y\}$

$2a^2+2ax+x^2-2xy+2y^2=0$
решим относительно y?

$D_1=x^2-2x^2-4ax-4a^2=-\underbrace{(x+2a)^2}$
$\begin{cases} \text{неположительно} \\ D\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x=-2a$
$D=0$

$y=\frac{x}{2}$

$A=\{x;y\}$
$\boxed{\begin{cases} x=-2a \\ y=-a \end{cases}}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4<-2a \\ 4>a+\frac{3}{a} \end{cases} \\ \begin{cases} 4>-2a \\ 4<a+\frac{3}{a} \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<-2 \\ 4>a+\frac{3}{a} \end{cases} \\ \begin{cases} a>-2 \\ 4<a+\frac{3}{a} \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a<-2 \\ a\in\cancel{(1;3)}\cup(3;+\infty) \end{array}\right.$

$\Rightarrow$

B - центр. окружности:

$a\neq 0$ (при $a=0$ ур-ние (1) не имеет решений + точка B не сущ.) $(9=0)$

(1) $a^2x^2+a^2y^2-2a^3x-6ax-2a^2y+a^4+9=0$

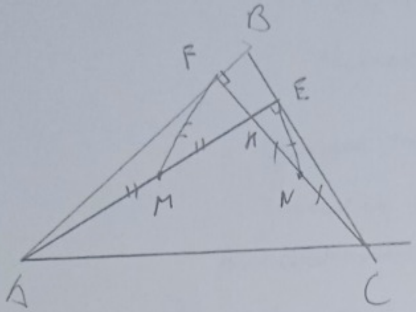
$(a^2+3-ax)^2+a^2(y-1)^2-a^2-9a^4=0$

$(x-(a+\frac{3}{a}))^2+(y-1)^2=9a^2+1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_0=a+\frac{3}{a} \\ y_0=1 \end{array}}$
≥ 0 при любом a

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\cancel{(1;3)}\cup(3;+\infty)$

2

№1.



Дано: $\triangle ABC$ – остроуг.

$CF \perp AB$; $F \in AB$

$AE \perp BC$; $E \in BC$

$AE \cap CF = K$

$AM = MK$; $M \in AK$

$CN = NK$; $N \in CK$

$FM = 2$ $\quad$ $MF \parallel EN$

$EN = 11$

Найти: 1. $\angle ABC$

2. $S_{\triangle ABC}$

3. $R_{опис.} \triangle ABC$

Решение:

$\triangle ABC$ – остроуг. $\Rightarrow$ K находится внутри $\triangle ABC$

$AB \perp FK$ (по усл.) $\Rightarrow$ $\triangle AFK$ – прямоуг. / $\Rightarrow$
$AM = MK$ (по усл.)

$\Rightarrow$ $FM = AM = MK$ (по мед. прямоуг. $\triangle$, провед. из вершины прямого угла) $\Rightarrow$ $\triangle MFK$ – р/б $\Rightarrow$ $\angle MFK = \angle MKF$ (по св-ву) (по опред.)

Аналог. для $KN = NC = EN$ $\Rightarrow$ $\triangle NKE$ – р/б (по опред) $\Rightarrow$ $\angle KNE = \angle NEK$ (по св-ву)

$MF \parallel NE$ (по усл.) $\Rightarrow$ $\angle MFN = \angle ENF$ (как внутр. накрест лежащие $\angle$ при $MF \parallel NE$ и сек. FN)

$\angle FKM = \angle NKE$ (как верт.)

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle KNE = \angle NKE = \angle KEN$ $\Rightarrow$ $\triangle NKE$ – р/с (по св-ву) $\Rightarrow$ $KE = KN = NE = NC$

Аналог. для $\triangle MFK$ – р/с

$\angle B = 360 - \angle KFB - \angle KEB - \angle FKE$ (по св-ву сум. $\angle$ 4х-$\angle$)
$\angle KFB = \angle KEB = 90°$ (по усл.)
$\angle NKE = 180 - \angle FKE$ (как смеж.)
/ $\Rightarrow$ $\angle B = \angle NKE = 60°$ (по св-ву $\angle$ р/с $\triangle$)

$\angle MKF = 60°$ (по св-ву $\angle$ р/с $\triangle$) $\Rightarrow$ $\angle FAK = 30°$ $\Rightarrow$ $BE = AE \cdot ctg(30°)$ / $\Rightarrow$ $BE = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

$AE = AK + KE = 2 \cdot 2 + 11 = 15$

$S_{\triangle ABC} = S_{ABE} + S_{AKC} + S_{KEC}$

$S_{ABE} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 15}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 37{,}5\sqrt{3}$

$S_{AKC} = AK \cdot KC \cdot \sin\angle AKC : 2$ / $\Rightarrow$ $S_{AKC} = \frac{4 \cdot 22}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 22\sqrt{3}$
$\angle AKC = 120°$ (как смеж. $\angle$ $60°$)

$S_{\triangle CKE} = \frac{11 \cdot 11 \cdot 2}{2} = 121$

$2R = \frac{AC}{\sin\angle B}$ (по т. син.) $\Rightarrow$ $R = \frac{2\sqrt{119{,}5}}{\sqrt{3}} \ldots = 2\sqrt{\frac{239}{6}}$.)

$AC = \sqrt{AK^2 + KC^2 - 2\cos\ldots \cdot AK \cdot KC} = 2\sqrt{4 + 121 \ldots \frac{11}{2}} = \ldots 2\sqrt{119{,}5}$

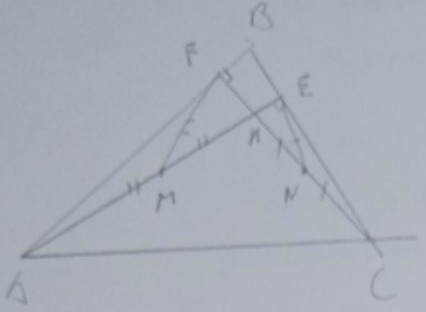
$\Rightarrow$ $S_{\triangle ABC} = 59{,}5\sqrt{3} + 121$

Ответ: $60°$; $59{,}5\sqrt{3} + 121$ и $2\sqrt{\frac{2\ldots}{\ldots}}$

1

211006603 (U179566 M1275298)

№1.



Дано: $\triangle ABC$ – остроуг.

$CF \perp AB$; $F \in AB$

$AE \perp BC$; $E \in BC$

$AE \cap CF = K$

$AM = MK$; $M \in AK$

$CN = NK$; $N \in CK$

$FM = 2$

$EN = 11$

$MF \parallel EN$

Найти: 1. $\angle ABC$

2. $S_{\triangle ABC}$

3. $R_{опис.} \triangle ABC$

Решение:

$\triangle ABC$ – остроуг $\Rightarrow K$ находится внутри $\triangle ABC$

$AB \perp FK$ (по усл.) $\Rightarrow \triangle AFK$ – прямоуг. | $\Rightarrow$

$AM = MK$ (по усл.)

$\Rightarrow FM = AM = MK$ (по мед. прямоуг. $\triangle$, провед. из вершины прямого угла) $\Rightarrow \triangle MFK$ – р/б $\Rightarrow \angle MFK = \angle MKF$ (по св-ву) (по опред.)

Соотв. для $KN = NC = EN$ $\Rightarrow \triangle NKE$ – р/б (по опред) $\Rightarrow \angle NKE = \angle NEK$ (по св-ву)

$MF \parallel NE$ (по усл.) $\Rightarrow \angle MFN = \angle ENF$ (как внутр. накрест лежащие $\angle$) при $MF \parallel NE$ и сек. FN | $\Rightarrow$

$\angle FKM = \angle NKE$ (как верт.)

$\Rightarrow \angle KNE = \angle NKE = \angle KEN$ ~~...~~ $\Rightarrow \triangle NKE$ – р/с (по св-ву) $\Rightarrow KE = KN = NE = NC$

Соотв. для $\triangle MFK$ – р/с

$\angle B = 360 - \angle KFB - \angle KEB - \angle FKE$ (по св-ву сум. $\angle$ 4х-$\angle$) | $\Rightarrow \angle B = \angle NKE = 60°$ (по св-ву $\angle$ р/с $\triangle$)

$\angle KFB = \angle KEB = 90°$ (по усл.)

$\angle NKE = 180 - \angle FKE$ (как смеж)

$\angle MKF = 60°$ (по св-ву $\angle$ р/с $\triangle$) $\Rightarrow$ $\angle FAK = 30°$ $\Rightarrow$ ~~...~~ $BE = AE \cdot ctg(30°)$ | $\Rightarrow BE = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

$AE = AK + KE = 2 \cdot 2 + 11 = 15$

$S_{\triangle ABC} = S_{ABE} + S_{AKC} + S_{KEC}$

$S_{ABE} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 15}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 37{,}5\sqrt{3}$

$S_{AKC} = AK \cdot KC \cdot \sin \angle AKC : 2$ | $\Rightarrow S_{AKC} = \frac{4 \cdot 22}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 22\sqrt{3}$

$\angle AKC = 120°$ (как смеж.) $\angle 60°$

$S_{\triangle CKE} = \frac{11 \cdot 11 \cdot 2}{2} = 121$

$2R = \frac{AC}{\sin \angle B}$ (т. синус.) $\Rightarrow R = \frac{2\sqrt{119{,}5}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2} = 2\sqrt{\frac{239}{6}}$

$AC = \sqrt{AK^2 + KC^2 - 2\cos \angle AKC \cdot AK \cdot KC} = 2\sqrt{4 + 121 - \frac{11}{2}} = 2\sqrt{119{,}5}$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 59{,}5\sqrt{3} + 121$

Ответ: $60°$; $59{,}5\sqrt{3} + 121$; $2\sqrt{\frac{239}{6}}$

1

211006603 (U179566 M1275298)

№2

1. числ ≤ 450

2. числ ≤ 420

черновик

$30x+y+a=450$

$14y+x+a=450$

$x;y<450$

$29x-13y=0$

$29x=13y$

29 и 13 - вз. пр.

x	y
1	x
13	29

$30\cdot13=390$, $450-390=60$, $60-29=31$

$14\cdot29=14\cdot30-14=420-14=306$, $450-306=144$, $144-113=31$

подходит. все вариан… !

$\boxed{x=13 \\ y=29 \\ a=31, \text{ где } a \text{ - сумма ост. чисел.}}$

$31=14+14+...$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

№3.

$a^2x^2+2a^3x-6ax+a^4+9$

$(a^2+3-ax)^2-9a^4$

$a<0$

$(a-1)(a-3)<0$

$1<a<3$

$a>0$

$(a-1)(a-3)>0$

$a>3$

$(a-1)(a-3)=0$

$a^2y^2-2a^2y+a^2$

$a^2y^2-2a^2y+a^2=a^2(y-1)^2-a^2$

$(a^2+3-ax)^2+a^2(y-1)^2-a^2-9a^4=0$

$(a+\frac{3}{a}-x)^2+(y-1)^2=9a^2+1$

$2y^2-2xy+x^2+2ax+2a^2=0$

$D_1=x^2-2x^2-4ax-4a^2=-(x^2+4ax+4a^2)=-(x+2a)^2$

$x=-2a$

$y=\frac{x}{2}$

$\boxed{y=\frac{x}{2} \\ x=-2a}$

$a\neq0$

когда $a=0$ $\Rightarrow$ $9=0$ $\Rightarrow$ точки в никуда.

$(a-1)(a-3)$

$4=a+\frac{3}{a}$

$a^2-4a+3=0$

$4-3=1$

$a=1, 3$

$a^2-4a+3=0$

$-a^2+1a$

$-3a+3$

-3

$(a^2+3-ax)^2+a^2(y-1)^2-a^2-9a^2=0$

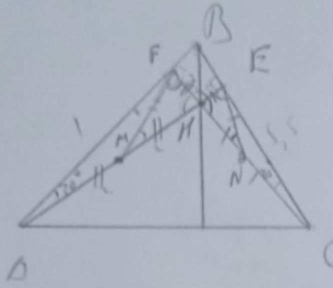
$(a+\frac{3}{a}-x)^2+(y-1)^2=9a^2+1 \Rightarrow$ $\boxed{x_0=a+\frac{3}{a} \\ y_0=1}$ при ...

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\cancel{(1;3)}\cup(3;+\infty)$ $\boxed{2}$

211006603 (U179566M1275298)

черновик №1.

$\angle BAC = 60°$

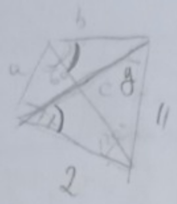


$FM = 22$
$EN = 11$
$FM \parallel EN$

$\angle ABC - ?$ +
$S_{\triangle ABC} - ?$
$R_{ABC} - ?$ +

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$a^2 + b^2 - ab = c^2$



$2^2 + 11^2 + 22 = 4 + 121 + 22 = 147$

$\frac{167}{\sin^2 120} = \frac{121}{\sin^2 x}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$ $\sin^2 x = \frac{121 \cdot 3}{167 \cdot 4}$

$(1+a)^2 - 225 = b^2$

$(1+x)^2$

$\boxed{a^2 + b^2 + ab = 167}$

$a^2 + 4 = b^2 + 121$

$\boxed{a^2 = b^2 + 117}$

$2b^2 - ab = 50$

$\sqrt{a^2 + 400}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$125 - 5{,}5 = 119{,}5$

≈ 39

$a^2 = (1+a)^2 - 225 + 117$

$225 + 117 = 108$

$0 = 1 + 2a - 108$

$2a = 107$

$a = \frac{107}{2} = 53{,}5$

$179 \cdot \frac{1}{2}$

$\boxed{S = S_\triangle CFB + S_\triangle AFH + S_\triangle BHC}$

211006603 (U179566 M1275298)

Часть 2

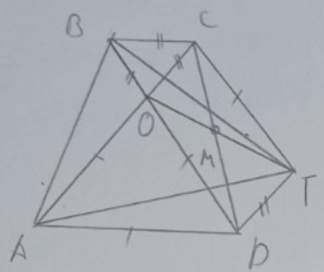
Олимпиада: **Математика, 9 класс (2 часть)**

Шифр: **211006603**

ID профиля: **179566**

Вариант 14

№3.(б)



Дано: ABCD – вып. 4х-к

$BD \cap AC = O$

(1) $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – р/с

M: $CM = MD$; $M \in CD$; T: $T \in [OM)$; $OM = MT$ ($OT = 2OM$)

Док-ть: а) ABT – р/с

б) Если $BC = 3$; $AD = 4$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{\triangle ABCD}}$ – ?

Док-во:

а) 1. OCTD – пар-м (по св-ву (т.к. диа. точкой ∩ делятся $\frac{1}{2}$)) ⇒

⇒ $OD = CT$; $OC = DT$ (по св-ву пар-ма)

$\angle OCT = \angle ODT = 180 - \angle DOC$

2. $\triangle AOD$ – р/с. ⇒ $\angle ODA = 60° = \angle AOD$

$\angle AOB = \angle COD = 180 - \angle AOD$ (как смеж.)

3. $\angle BCO = 60°$ (т.к. $\triangle OBC$ – р/с)

4. $\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT$

$\angle BCT = \angle BCO + OCT$

5. $BO = OC = CB$ (из усл. (1))

$AD = AO = OD$

6. $\angle BOA = \angle ADT = \angle BCT = 120°$

$AD = CT = AO$

$BC = DT = BO$

⇓

$\triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA$ (по 2-м ст. и ∠ м/у ними)

⇓

$AB = BT = TA$ (как соот. ст. $=\triangle$, лежащ. пр. $=\angle$)

⇓

$\triangle ABT$ – р/с (по опред.)

ч.т.д.

б) $S_{\triangle ABCD} = \frac{AC \cdot CD \cdot \sin\angle AOD}{2}$ (по св-ву S 4х-к)

$S_{ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (по св-ву S р/с $\triangle$) $= \frac{AB^2}{2} \sin 60°$ ⇒

⇒ $\frac{S_{\triangle BT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{AB^2}{2} \cdot \sin 60°}{\frac{AC \cdot CD \cdot \sin\angle AOD}{2}} = \frac{AB^2}{AC \cdot CD}$

$\angle AOD = 60°$ (из (1))

$\angle AOB = 120°$ (п. 6)

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AB \cdot BO \cdot \cos\angle AOB$ (т. кос.)

$AB^2 = AC^2 + BO^2 + AB \cdot BO$

⇒ $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{AC^2 + BO^2 + AB \cdot BO}{AC \cdot CD}$

$BD = AC = AO + OC$

$BC = 3$

$AO = 4$

⇒ $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{3^2 + 4^2 + 3 \cdot 4}{7 \cdot 7} = \frac{37}{49}$

Ответ: $\frac{37}{49}$

2

211006603 (U179566 M1275299)

№1.(4) $\boxed{в-14}$

$$\begin{cases}7x^2+7y^2-3x^2y^2=7\\x^4+y^4-x^2y^2=37\end{cases}\quad\begin{cases}7(a+b)-3ab=7\\a^2+b^2-ab=37\end{cases}\quad\begin{cases}7(a+b)-3ab=7\\(a+b)^2-37=3ab\end{cases}\quad\begin{cases}7m-3n=7\\m^2-37=3n\end{cases}$$

$x^2=a$

$y^2=b$

$a+b=m$

$ab=n$

$7m-m^2+37=7$

$m^2-7m-30=0$

$D=49+120=169$

$$m=\frac{7\pm13}{2}=\left[\begin{array}{l}10\\-3 \text{ — не уд., т.к. } m\geq0 \text{ т.к. } a\geq0 \text{ и } b\geq0, \text{ т.к. } x^2\geq0 \text{ и } y^2\geq0\end{array}\right.$$

$\Downarrow$

$m=10$

$$\begin{cases}m=10\\7m-3n=7\end{cases}\quad\begin{cases}m=10\\n=21\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{array}{l}a+b=10\\ab=21\end{array}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=7\\b=3\end{cases}\\\begin{cases}a=3\\b=7\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=7\\y^2=3\end{cases}\\\begin{cases}x^2=3\\y^2=7\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pm\sqrt7\\y=\pm\sqrt3\end{cases}\\\begin{cases}x=\pm\sqrt3\\y=\pm\sqrt7\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(\sqrt7;\sqrt3), (-\sqrt7;-\sqrt3), (\sqrt7;\sqrt3), (-\sqrt7;\sqrt3), (\sqrt3;\sqrt7), (-\sqrt3;-\sqrt7), (\sqrt3;-\sqrt7), (-\sqrt3;\sqrt7)$

№2.(5)

Очевидно, что дубль можно выложить 15 способами.
Пусть был выложен дубль X/X, найдем, сколько карточек
осталось без числа X: 14 карточек с X на красной
и 14 карточек с X на синей стороне

итого 28 карточек, да плюс еще 1, так как первой мы выложили
дубль. итого у нас остается $15^2-14\cdot2-1=196$ карточек,
удовлетворяющих условию для этой и предыдущей

т.к. у нас 15^2 различных карточек, а комбинаций из чисел от 1 до 15
на двух сторонах $=15^2$, то каждой карточки (комбинации) по 1 разу и каждая комбинация
присутствует.

Итого $15\cdot196=15\cdot200-60=3000-60=2940$ комбинаций.

Ответ: 2940 способов

$\boxed{1}$

Черновик.

$\boxed{8-14}$

№1.

$x^2=a \quad y^2=b$

$$\begin{cases} 7x^2+7y^2-3x^2y^2=7 \\ x^4+y^4-x^2y^2=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a+7b-3ab=7 \\ a^2+b^2-ab=37 \end{cases}$$

$(a^2+b^2+2ab)-37=3ab$

$(a+b)^2-37=3ab$

$a+b=z$
$ab=m$

$$\begin{cases} 7z-3m=7 \\ z^2-37=3m \end{cases}$$

$7z-z^2+37=7$

$-z^2+7z+30=0$

$z^2-7z-30=0$

$49+120=169=13^2$

$$\begin{cases} z=\frac{7\pm13}{2}=\left[\begin{array}{l}10\\-3\end{array}\right. \\ 7z-3m=7 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l}z=10\\z=-3\end{array}\right. \\ 3m=7(z-1) \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=21\\z=10\end{cases}\\ \begin{cases}z=-3\\m=-9\frac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$a\cdot b\cdot\sin\alpha+a\cdot d\cdot\sin\alpha+$

$a\cdot d_1\cdot\sin\alpha+$

$\frac{d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha}{2}$

$-\frac{b}{a} \quad \frac{c}{a}$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 3 \\ \hline 84 \\ \times\ 4 \\ \hline 336 \end{array}$$

$x^2+bx+c=0$

$x^2+3x-\frac{28}{3}=0$

$3x^2+9x-28=0$

$81+336=417$

$a+b=10$
$ab=21$
$$\boxed{\begin{cases}a=3\\b=7\end{cases}}$$

$a+b=-3$

$ab=-\frac{28}{3}$

$15\cdot x$

$x=(15+14)+225$

кол-во способов

№2.

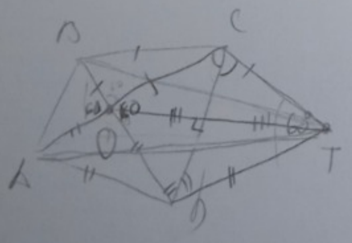
15 дубль — 14 дубль $=15\cdot14$ входить

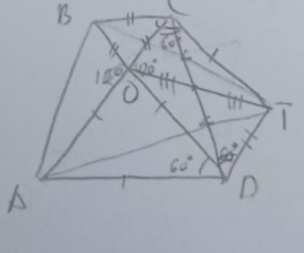
$225-15=210$

не дубль на вторые

$15\cdot210$

№3.





$ABT-p/c$?